



HAL
open science

La pascaline comme entrée dans une formation sur l'enseignement de la numération et du calcul au CP

Sophie Soury-Lavergne, Isabelle Noygues

► To cite this version:

Sophie Soury-Lavergne, Isabelle Noygues. La pascaline comme entrée dans une formation sur l'enseignement de la numération et du calcul au CP. XXXXIIIe colloque de la COPIRELEM, Jun 2016, Le Puy-en-Velay, France. hal-01816533

HAL Id: hal-01816533

<https://hal.science/hal-01816533>

Submitted on 3 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

LA PASCALINE COMME ENTREE DANS UNE FORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMERATION ET DU CALCUL AU CP

Sophie SOURY-LAVERGNE

Maîtresse de conférences

INSTITUT FRANÇAIS DE L'EDUCATION ENS DE LYON

ESPE de l'Académie de Grenoble

Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Isabelle NOYGUES

Professeur des Ecoles, MAISON POUR LA SCIENCE EN AUVERGNE

Isabelle.Noygues@ac-clermont.fr

Résumé

La pascaline est une machine arithmétique utilisée pour l'apprentissage de la numération décimale. A partir des travaux de recherche menés par l'IFE sur l'utilisation de la pascaline, le groupe de recherche de la MPSA, maison pour la science en Auvergne, a étudié l'intégration de cet outil dans une progression des apprentissages au CP proposée par le manuel *CAP Maths* (Hatier, 2009). Pour dénombrer une collection inaccessible, les élèves ont été amenés à produire une collection de sons éphémères, les clics de la pascaline, dont la quantité est mesurée par la pascaline à la manière d'un compteur. La réflexion sur l'introduction de cet outil de dénombrement dans la séquence d'activités numériques ordinaires a été l'occasion de compléments de formation pour les enseignants participant au groupe de travail sur des thèmes tels que : fonctions des nombres entiers, systèmes de numération, grandeurs et mesures.

Cette communication présente les travaux menés par le groupe « pascaline » de la Maison pour la Science en Auvergne (MPSA) depuis 2013. A partir des recherches conduites par l'Institut Français de l'Education (IFE) sur les usages de la pascaline (Figure 31), une petite machine arithmétique, pour l'apprentissage de la numération décimale et du calcul (Soury-Lavergne & Maschietto, 2013) (Riou-Azou & Soury-Lavergne, 2015), le groupe a étudié le rôle que pouvait jouer la pascaline dans les séquences d'enseignement du cycle 2 et du cycle 3.



Figure 31. La pascaline

Le choix des participants à ce groupe IREM, rassemblant enseignants du primaire, du secondaire, conseillers pédagogiques, formateurs et chercheurs en didactique et en mathématiques, a été de partir des pratiques effectives ordinaires des enseignants et d'étudier comment la pascaline pourrait être intégrée et contribuer aux apprentissages, dans le cadre défini par les programmes scolaires. Ainsi, pour les niveaux de GS, CP et CE1, le point de départ a été d'utiliser la pascaline dans une progression existante pour l'apprentissage de la numération. Pour les CM1 et CM2, il s'est agi d'utiliser la pascaline pour reprendre l'apprentissage de la numération avec les élèves en difficulté. En 6^e, c'est une entrée par l'outil et la compréhension de son fonctionnement qui a été choisie comme moyen de réviser la numération et les opérations.

D'un point de vue méthodologique, lors de la première année de travail, les enseignants du cycle 2 se sont appuyés sur les séances issues des ressources produites par l'IFE (<http://ife.ens-lyon.fr/sciences21>) (Soury-Lavergne, 2014) pour initier les premières séances avec leurs élèves. Au cours de ce travail au sein du groupe, sont apparus des besoins d'apports relatifs à la pascaline mais surtout des besoins et des discussions plus théoriques à propos des nombres, de la numération et de la relation entre nombres, grandeurs et mesures. La deuxième année, l'équipe a conçu de nouvelles séances, intégrant la pascaline dans les

progressions existantes, en particulier celle proposée par le manuel *CAP Maths* pour le CP (Hatier 2009). Les séances menées ont été rédigées de façon détaillée par l'enseignante puis présentées au groupe de travail. Elles ont fait l'objet de discussions sur le rôle de la pascaline dans la construction du concept de nombre. A la suite de ces discussions au cours de la seconde année de travail, un document de synthèse sur « Le nombre comme mesure d'une quantité » a été rédigé par Annie Noïrfalise (Noïrfalise, 2017) et une analyse des séances à partir de la *théorie anthropologique du didactique* (Chevalard, 1999) a été conduite. La troisième année de travail du groupe a permis la reprise des séances de classe à partir de leur analyse et des évolutions qui avaient suivi. Au final, ce travail a conduit à la production de ressources et la construction de connaissances partagées au sein du collectif d'enseignants et de chercheurs, qui pourraient s'analyser comme l'émergence d'une praxéologie méta-didactique (Aldon et al., 2013). Le développement de connaissances et de savoirs communs s'observe à travers la production collective de ressources, de séances d'enseignements et d'actions de formation (formations à la MPSA en 2013, 2014 et 2015, dans les circonscriptions du Puy en Velay en 2014, d'Aurillac en 2016 et de Mauriac en 2017).

Nous présentons dans ce texte certains éléments de cette *praxéologie* (Chevalard, 1999) avec, en partie I, des éléments du cadre théorique formalisé par les membres du groupe à propos du concept de nombre comme mesure d'une grandeur. Puis, en partie II, nous exposons les éléments clés du rôle de la pascaline dans les ressources d'enseignement, à travers une présentation des séances de classe de CP dans laquelle elle est utilisée comme compteur d'une collection inaccessible pour l'introduction de la numération décimale, en particulier de la dizaine. Enfin, en partie III, nous concluons sur les nouvelles ressources et connaissances qui sont apparues dans le groupe de travail de la MPSA, en particulier le développement professionnel des enseignants.

I - LE NOMBRE ENTIER NATUREL COMME MESURE D'UNE GRANDEUR

Il est bien difficile de répondre simplement à la question « qu'est-ce qu'un nombre ? » qui s'est posée dans le groupe de travail sur la pascaline. Cependant, plusieurs didacticiens (Vergnaud, 1990), (Balacheff & Margolinas, 2005) ont élaboré des cadres théoriques pour « attraper » la notion de concept en mathématiques et ces cadres peuvent s'appliquer en particulier au concept de nombre. Pour expliquer ce qu'est un nombre, il faut donc décrire :

- Les problèmes que les nombres permettent de résoudre : mémoriser la quantité ou la position, anticiper une augmentation, une diminution, un partage, faire une comparaison...
- Les opérateurs ou invariants opératoires qui composent les procédures de résolution des problèmes : estimation, comparaison, comptage, calcul, opération...
- Les différents symboles et systèmes sémiotiques qui désignent les nombres : écriture chiffrée, dénomination orale, icône, représentations analogiques (constellation du dé ou doigt de la main) ou symboliques...

Pour Vergnaud (op. cit), ces trois premières catégories suffisent à caractériser un concept. Balacheff et Margolinas (op. cit) ajoutent la catégorie des contrôles, qui rend opérationnelle le concept pour résoudre des problèmes :

- Les contrôles qui déterminent quels opérateurs doivent être mobilisés et si le problème est résolu : dans le cas du nombre, il s'agit par exemple d'énumération, de correspondance terme à terme...

Pour tous les didacticiens, la construction du concept de nombre passe par la résolution de problèmes (Vergnaud, 1990, p. 135) : « *C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant.* ». Dans le document de travail rédigé pour le groupe, Noïrfalise (2017, p. 1) fait aussi référence aux problèmes concrets que l'on résout avec les nombres : « *Pourquoi enseigner les nombres ? Je dirais qu'on enseigne les nombres, (et plus tard des mathématiques plus complexes), parce que ça sert à répondre à des questions que l'on se pose sur le monde qui nous entoure, essentiellement, dans un premier temps, des questions qui portent sur des **grandeurs** : qu'est-ce qui est aussi grand que ? Quelle quantité restera-t-il si j'enlève ça ? Quelle quantité j'aurai si je partage en plusieurs parties ?.... Et les nombres, entiers tout d'abord, décimaux et rationnels ensuite, sont de prodigieux outils pour évaluer et prévoir la valeur de grandeurs, soumises à des manipulations : partages, réunions, ..., sans avoir à faire effectivement ces manipulations.* ».

Noirfalise (op. cit) s'appuie sur la notion de grandeur et en particulier la quantité à propos des nombres entiers. Dans les travaux sur l'acquisition du concept de nombre, la notion de quantité est centrale (Fayol, 2012) (Margolinas & Wosniack, 2012). Si l'on considère les mathématiques comme une modélisation possible du monde physique, alors le nombre entier naturel peut être considéré comme un modèle d'une collection d'objets du monde sensible, plus précisément l'aspect commun entre plusieurs collections équipotentes. Cependant, le nombre comme modèle mathématique de cette collection peut servir à mesurer plusieurs caractéristiques différentes de cette collection d'objets, telles que la masse, le volume ou la quantité d'objets de la collection. La quantité, vue comme une propriété parmi d'autres de la collection d'objets est alors une grandeur particulière, distincte d'autres grandeurs, et qui est mesurée par les nombres entiers.

Ainsi, nous proposons de séparer trois champs pour définir le nombre comme mesure d'une grandeur (Figure 32) :

- (i) le champ des collections d'objets du monde réel, tangibles, sur lequel l'humain peut agir en déplaçant et transformant les objets ;
- (ii) le champ des grandeurs et des différentes propriétés que l'on peut distinguer, évaluer, repérer, comparer à propos des objets et collections d'objets du monde réel ;
- (iii) le champ des mesures, c'est-à-dire des nombres, qui permettent d'appliquer un nombre à chaque quantité et du coup d'utiliser les opérations sur les nombres pour traiter les problèmes de quantité.

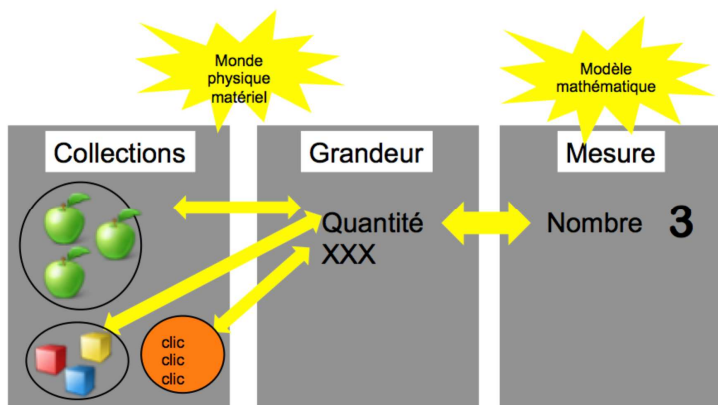


Figure 32. Trois champs permettent de distinguer les notions de collection, grandeur et mesure et de considérer le nombre entier naturel 3 comme la mesure d'une grandeur « quantité » XXX, obtenue comme classe d'équivalence des collections qui sont toutes équipotentes à un ensemble qui contient « trois » éléments.

Deux collections ont la même quantité d'éléments (le même cardinal qui est la caractéristique commune à ces deux collections) si on peut mettre leurs éléments en correspondance terme à terme dans le monde réel (collections équipotentes). Cette relation « correspondance terme à terme » entre collections définit des classes d'équivalence pour la grandeur quantité. Elle peut s'appliquer à différentes collections du monde sensible, collections d'objets ou de sons par exemple (Figure 33).

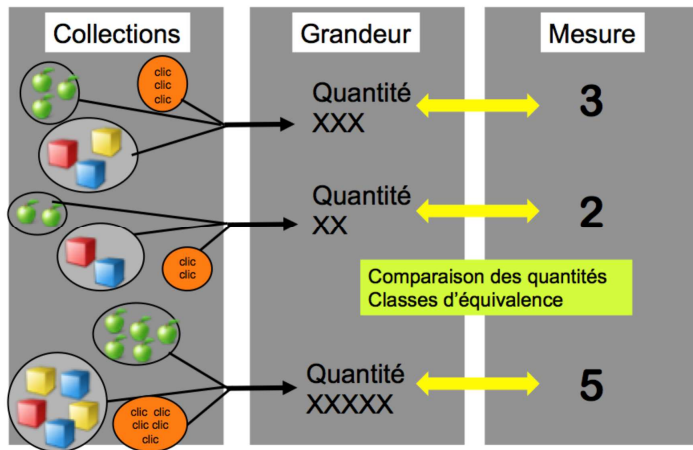


Figure 33. Les collections équipotentes définissent des quantités différentes, mesurées par des nombres différents.

Dans le champ des collections d'objets, les actions ou opérations sur les objets sont des réunions et des mises en correspondance terme à terme. Il apparaît alors du côté du monde physique que l'expérience de la réunion d'une collection de XX éléments avec une collection de XXX éléments, produit toujours une collection qui peut être mise en correspondance terme à terme avec les collections de XXXXX éléments (Figure 34). C'est ainsi que, du côté mathématique, l'opération d'addition sur les entiers peut être construite comme un modèle permettant d'anticiper le nombre d'éléments d'une collection construite comme la réunion de deux collections.

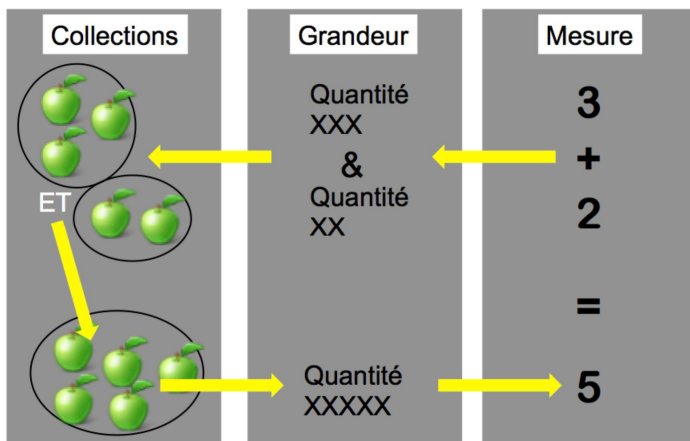


Figure 34. Définition de l'addition comme modélisation mathématique de la réunion de deux collections d'objets. La collection obtenue par réunion d'une collection de XX éléments avec une collection de XXX éléments est mise en correspondance terme à terme avec une collection de XXXXX éléments, d'où l'égalité $2+3=5$.

Pour l'introduction de l'addition, le raisonnement suit un chemin qui part des nombres (les deux termes), passe par la grandeur et les deux collections et revient vers le nombre qui mesure la quantité de la réunion des deux collections. Ainsi, les nombres et l'addition rendent compte d'une manipulation d'objets et l'effet de cette manipulation sur la grandeur quantité. Elle peut alors être définie et c'est pour rendre compte du résultat de cette manipulation qu'elle a été construite : rendre compte du fait que si l'on met ensemble une collection à trois éléments et une collection à deux éléments, alors on obtient toujours une collection qui est en correspondance terme à terme avec toutes les collections à cinq éléments (Figure 34).

Sur la base de cette réflexion, le groupe de travail a étudié les collections en jeu dans la séquence d'enseignement pour les élèves de CP et les manipulations qui étaient réalisées avec la pascaline.

II - SEQUENCE « LES SONS DES CUBES QUI TOMBENT DANS LA BOITE » EN CLASSE DE CP AVEC LA PASCALINE

Dans la progression de l'enseignante, la séquence proposée par *CAP Maths CP* est précédée de l'introduction de la pascaline comme outil de dénombrement au cours de rituels et outil de désignation d'un nombre. Dès le début de l'année scolaire, les élèves ont utilisé la pascaline, par exemple, pour mémoriser le nombre de jours d'école, en parallèle avec l'utilisation d'autres outils tels qu'un calendrier sous forme de tableau ou une collection de jetons dans un seau (Figure 35 à gauche et au milieu). Ce premier usage n'est pas problématisé. Les élèves ont aussi fait correspondre les nombres sur la bande numérique avec une image de la pascaline affichant le même nombre (Figure 35 à droite).



Figure 35. La pascaline a été ajoutée à différents outils utilisés lors d'activités rituelles dès le début de l'année scolaire. A gauche, le calendrier avec les jours de classe, au milieu la pascaline affiche le décompte des jours et le seau contient autant de jetons que de jours de classe. A droite, une image de la pascaline est associée au nombre 5 sur la bande numérique.

Après que la pascaline a été utilisée comme objet rituel, deux séances (n°1 et n°2) ont été consacrées à la découverte de la pascaline comme objet mécanique et exemple d'engrenage, sur le modèle des séances proposées dans le plan sciences en Côte d'Or (Soury-Lavergne, 2014). Les deux séances suivantes (n°3 et n°4) ont permis aux élèves d'utiliser la pascaline comme outil pour dénombrer des collections jusqu'à 9 éléments et ajouter ou retirer une unité. Enfin, la séance n°5, correspondant à l'unité 3 de la progression *CAP Maths*, a concerné l'utilisation de la pascaline comme outil de dénombrement de collections au-delà de 10 éléments avec appuis sur la dizaine. La suite du texte présente des éléments d'analyse des séances 3, 4 et 5.

1 Trame de la séquence « Les sons des cubes qui tombent dans la boîte »

L'idée centrale du rôle de la pascaline dans cette séquence est le fait qu'une collection d'objets matériels est pérenne et porte en soi l'information de la quantité. Cela ne permet pas de faire sentir aux élèves en quoi le nombre peut être utile, voire nécessaire, pour mémoriser la quantité puisque l'information est disponible dans les collections présentes. Pour reprendre la proposition de modélisation du nombre entier comme mesure d'une quantité (Figure 33), tant que la quantité est présente, le recours à la mesure peut être contourné. En revanche, une collection de « sons » est une collection éphémère, qui une fois réalisée devient inaccessible. Pour mémoriser la quantité de sons émis, il faut un outil, comme un compteur ou disposer du nombre. Ainsi, la séquence est basée sur le fait de dénombrer les sons que font les cubes quand ils tombent au fond d'un seau. La collection de sons est associée terme à terme avec la collection de cubes, qui peut alors être utilisée pour valider le dénombrement.



Figure 36. Une collection de cubes et un seau. Lorsqu'un cube tombe dans un seau il fait un son.

Le savoir visé par cette séquence est l'écriture décimale des nombres mesurant une collection de plus de 9 éléments et la correspondance entre un groupement par 10 des éléments de la collection avec l'écriture du chiffre 1 au rang des dizaines, c'est à dire la « dizaine » comme nouvel outil pour dénombrer.

La tâche proposée consiste à dénombrer une collection inaccessible, dont les éléments ne sont connus que par le bruit que fait chacun d'eux en tombant dans un seau opaque (nommé « boîte » par la maitresse) (Figure 36).

Le matériel utilisé est un seau et une collection de cubes, ainsi que des outils de dénombrement : pascaline, barquette bâtonnets et élastiques permettant le groupement par dix, bande numérique avec les chiffres des dizaines en rouge, ardoise et crayon : Figure 37).



Figure 37. Outils matériels pour le dénombrement. De gauche à droite, une pascaline, un lot de bâtonnets, d'élastiques et une barquette, une bande numérique, une ardoise et un crayon.

2 Phase 1. Dénombrer des collections de moins de 9 éléments

Déroulement de la phase 1 dans la classe : chaque élève dispose de l'un des outils de dénombrement (Figure 37). La maîtresse annonce le problème : « Je vais mettre des cubes dans une boîte en les faisant tomber les uns après les autres. Vous ne me verrez pas faire cette action car je serai derrière vous au fond de la classe. Je ne parlerai pas. [...]. Quand je m'arrêterai, vous devrez me dire combien il y a de cubes dans ma boîte ».

Avant de lancer la tâche, la maîtresse fait préciser individuellement à chaque élève la technique à mettre en œuvre, suivant le matériel disponible, pour chaque bruit entendu quand un cube tombe dans la boîte : il faut faire un clic dans le sens des aiguilles d'une montre sur la roue jaune de droite de la pascaline ; il faut avancer le doigt d'une case sur la bande numérique ; il faut mettre un bâtonnet dans la barquette ; il faut dessiner une croix sur l'ardoise. La maîtresse explicite également l'initialisation de la tâche, des outils et de la procédure : « Ma boîte est vide, mimer cet état sur votre outil ! Toutes les roues sont à zéro sur la pascaline. Le doigt est sur le zéro de la bande numérique. La boîte de bâtonnets est vide. Rien n'est dessiné sur l'ardoise. »

La maîtresse placée en fond de classe, derrière les élèves, fait alors tomber les cubes dans la boîte un par un. Les élèves dénombrent en utilisant l'une des quatre techniques précédemment présentée. La maîtresse demande alors aux élèves de lire le nombre affiché sur la pascaline ou la bande numérique ou de dénombrer les croix ou les bâtonnets. Elle demande également : « A quoi correspond ce nombre ? Comment vérifier ? » La réponse attendue est qu'il s'agit du nombre de cubes tombés dans la boîte et que l'on peut vérifier en comptant les cubes. La tâche est répétée pour plusieurs nombres jusqu'à 9.

La mise en commun de cette première phase comprend la description par les élèves des techniques utilisées pour faire « et encore un » et la justification de la validité des techniques utilisées par le fait qu'elles aboutissent à la même quantité partout, y compris à la quantité de cubes dans la boîte. Les quantités d'objets de chaque collection sont mises en relation avec l'écriture du nombre.

L'analyse de cette phase de la séquence consiste en l'identification des tâches et techniques proposées aux élèves. La tâche est de dénombrer une collection de cubes. Mais cette collection n'est accessible que par une collection intermédiaire, équipotente et éphémère, celle des « sons » que font les cubes tombant dans la boîte. Il s'agit donc d'une tâche de dénombrement d'une collection éphémère de sons à l'aide d'un matériel concret disponible. Suivant le matériel, les techniques ne seront pas les mêmes, ni les justifications. La collection de sons des cubes est elle-même mise en correspondance avec : soit une collection de clics sur la pascaline qui produisent aussi des sons, soit une collection de cases sur la bande numérique, soit une collection de bâtonnets, soit une collection de croix. Cependant, ces techniques sont toutes basées sur la correspondance terme à terme entre des collections visibles et pérennes ou invisibles et

éphémères. Des éléments de justification sont apportés par la maîtresse par des formulations telles que : « il y a la même quantité de croix que de cubes ». Pour cette tâche, la technique utilisant la pascaline permet de matérialiser le nombre de clics (collection équipotente à la collection de cubes) par l’affichage sur la pascaline. La particularité de la pascaline est de transformer une collection éphémère et inaccessible, celles des clics sur la pascaline en un affichage de nombre. C’est le cas aussi pour la technique utilisant la bande numérique. Ce n’est pas le cas des deux autres matériels utilisés qui restent à une collection d’objets équipotente.

Ainsi, ce qui se joue dans cette première phase de la situation, c’est la construction de plusieurs collections équipotentes du point de vue de leur cardinal, leur mise en correspondance comme technique et la matérialisation du nombre de clics par l’affichage sur la pascaline et la bande numérique.

3 Phase 2. Dénombrer des collections d’au moins 10 éléments à partir d’une collection de 9 éléments

Déroulement de la phase 2 dans la classe : une fois que les élèves ont pu dénombrer des collections de 9 éléments, toute la classe s’assure que les outils de dénombrement affichent 9 et qu’il y a 9 cubes dans la boîte. Puis la maîtresse ajoute un cube de plus dans la boîte en disant « et encore un ». Les élèves utilisent les techniques déjà vues pour dénombrer un cube de plus.

La maîtresse demande alors aux élèves qui n’ont pas de pascaline : « Combien y a-t-il de cubes dans la boîte ? ». Aux élèves qui ont une pascaline, la maîtresse demande : « Où lisez-vous le dix ? » puis « Que s’est-il passé quand vous êtes passés de 9 à 10 ? ». Les élèves ont pu alors dire qu’ils ont ressenti une force plus importante et que la roue du milieu a tourné. Lorsque tous les élèves disposent d’une pascaline, ils effectuent l’ajout d’une unité à partir de 9 pour ressentir la force dans les roues lors du passage de 9 à 10.

La mise en commun permet de mettre en relation l’apparition du 1 sur la roue du milieu de la pascaline avec les 10 cubes, les 10 bâtonnets, les 10 croix et les 10 premières cases de la bande numérique (Figure 38).



Figure 38. Représentation de la dizaine avec différent matériel de numération.

L’analyse de cette phase fait apparaître que la pascaline est le seul outil qui, dans la mise en œuvre de la technique de dénombrement, crée une rupture lors de l’ajout d’une unité entre 9 et 10. Avec les autres outils disponibles, rien ne différencie l’ajout d’une unité à 9 de l’ajout d’une unité à 8. La technique s’effectue de façon continue, sans rupture, lors du passage de 9 à 10. Pour les groupes sans pascaline, il est donc nécessaire que ce soit la maîtresse qui introduise une nouvelle technique pour matérialiser le paquet de 10 : il s’agira de lier par un élastique les dix bâtonnets, d’entourer d’un trait les dix croix sur l’ardoise ou de repérer par une marque les dix premières cases de la bande numérique. En revanche, il n’y a pas de technique spéciale à mettre en œuvre avec la pascaline puisqu’elle produit elle-même une modification lors du passage à la dizaine grâce à des rétroactions différenciées : retour d’effort plus important, roue du milieu qui tourne et affichage du chiffre 1 sur la roue du milieu.

4 Phase 3. Dénombrer des collections de plus de 10 éléments

Déroulement de la phase 3 dans la classe : chaque enfant dispose d’un des outils de dénombrement (pascaline, bande numérique, boîte de bâtonnets, ardoise) et le scénario se poursuit de façon identique aux phases précédentes, par ajout des cubes un à un, de 10 jusqu’à 19. La maîtresse demande à chaque ajout d’un cube : « Combien de cubes ? », « Où le voyez-vous inscrit ? », « Que s’est-il passé lorsque vous avez fait l’ajout ? ». La vérification s’opère par comparaison avec le nombre de cubes contenus dans la boîte. La séance se termine par une question aux élèves : « Que signifie le nombre affiché sur la pascaline ? ». La

réponse attendue est que la pascaline indique sur la roue du milieu le chiffre « 1 » pour le paquet de dix cubes et sur la roue de droite le nombre de cubes tous seuls.

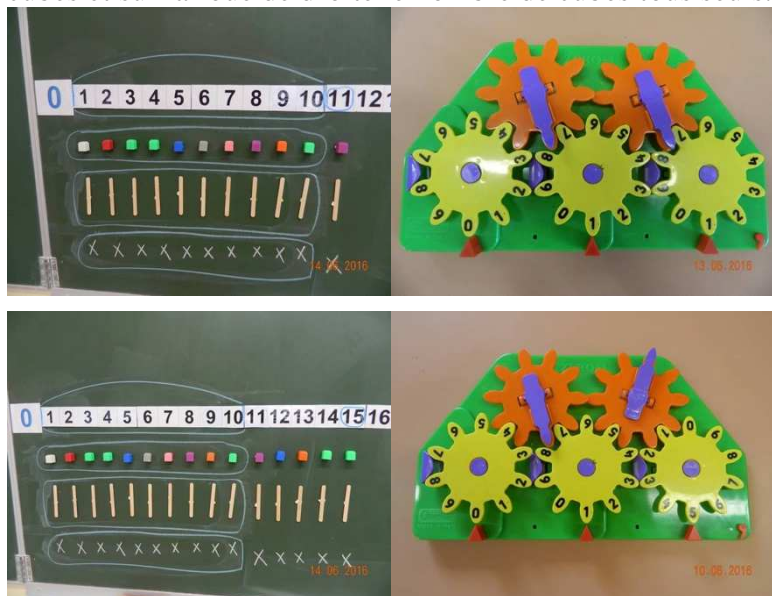


Figure 39. Correspondance entre collections d'objets et affichages de la pascaline pour les nombres 11 et 15.

L'analyse de cette phase fait ressortir l'introduction par la maîtresse ou par l'outil d'une nouvelle technique : la réalisation d'un groupement par dix dans une collection. Cette technique n'est pas nécessaire pour résoudre le problème donné, car la collection est petite. Mais elle est justifiée dans la situation par sa cohérence avec le fonctionnement de la pascaline qui introduit une rupture au moment du passage à la dizaine. La pascaline permet de préparer l'introduction d'une nouvelle unité pour dénombrer : la dizaine (Figure 40). Elle permet la construction d'un patrimoine d'expériences pour les élèves, d'un vécu avec la manipulation des objets de la collection. Du côté de la collection d'objets, il s'agit de différencier les paquets de dix et les « tous seuls ». La technique de mise en paquets de 10, introduite au cours de cette séance, sera reprise plus tard dans l'année, au mois de janvier avec les élèves, pour expliquer et justifier la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre. C'est à ce moment-là que sera introduit le lexique « dizaine » et « unité ». Du côté du nombre, on pourra compter en dizaines et on pourra mesurer une quantité en indiquant le nombre de dizaines et le nombre d'unités.

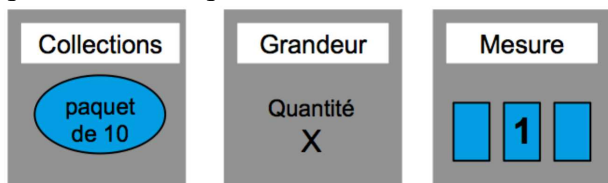


Figure 40. Correspondance entre les collections de 10 éléments, la grandeur quantité X et la mesure pour le nombre 10.

5 Synthèse sur les justifications des techniques de dénombrement

Cette séquence repose sur la mise en relation de différentes techniques de dénombrement, liées à l'utilisation de matériels concrets. Chaque technique dispose d'une justification particulière.

La possibilité de dénombrer une collection inaccessible, car éphémère, avec des croix sur une ardoise ou des bâtonnets dans une barquette, repose sur le fait qu'il s'agit de collections d'objets que l'on peut grouper ou pas et qu'il est possible de mettre en correspondance terme à terme spatialement avec la collection initiale de cubes. Il s'agit donc de collections intermédiaires visibles et pérennes. Cependant, elles ne permettent pas de mettre en œuvre une autre technique de dénombrement que celle qui est déjà possible directement sur la collection de cubes.

La bande numérique permet de dénombrer à condition de correctement initialiser le processus : pour dénombrer avec les cases sur la bande numérique, il faut partir de « 0 ». Or quel que soit le choix fait pour la bande numérique, départ à zéro ou départ à un, une difficulté apparaît. Si zéro est dans une case, alors

l'initialisation de la technique est facile, mais le nombre de cases jusqu'à n n'est pas n mais $n+1$. Le lien ordinal cardinal n'opère pas. Si la bande numérique démarre à 1, ce lien ordinal-cardinal fonctionne : à la n -ième case on a n cases avant. En revanche, l'initialisation du processus se fait sans mettre le doigt sur la bande pour pouvoir associer la première case (qui porte le nombre 1) avec le premier son et le premier cube qui tombe dans la boîte. La justification de la validité de cette technique repose sur le lien cardinal-ordinal (l'ensemble formé par les 10 premiers nombres, le premier, le deuxième... le dixième, contient 10 éléments) et sur l'itération de l'unité pour générer la suite des nombres. La bande numérique, lorsqu'elle démarre à 1, permet de convertir le cardinal de la collection en un nombre avec son écriture décimale. Mais que la bande numérique commence à 0 ou 1, la technique pour dénombrer ne fait pas apparaître de rupture ou de rétroaction particulière lors de l'ajout d'une unité à 9.

La pascaline, quant à elle, permet de dénombrer en associant un clic à un cube qui tombe dans la boîte et génère simultanément l'écriture décimale du nombre. La justification de la validité de la technique est mécanique, liée au nombre de dents sur chaque roue : il y a 10 dents numérotées de 0 à 9. Mais le plus important est que la pascaline génère une rétroaction particulière, visuelle, sonore et haptique¹⁵⁴ et lors du passage à la dizaine. Ce phénomène bien identifié par les élèves est ensuite utilisé pour justifier le groupement par dix et la dizaine des autres collections utilisées dans la séquence.

III - LES APPRENTISSAGES AU SEIN DU GROUPE PASCALINE DE LA MAISON POUR LA SCIENCE EN AUVERGNE

Les résultats de ce travail concernent les séances d'enseignement et l'introduction de la pascaline dans une progression sur la numération décimale en CP. Les séances conduites et leur analyse ont permis d'identifier des spécificités résultant de l'utilisation de la pascaline intéressantes pour l'apprentissage de la numération et en particulier l'introduction de la dizaine. La manipulation des différents outils, pascaline, bâtonnets, bande numérique, ardoise par les élèves fait apparaître la spécificité de la pascaline. Elle permet d'associer gestes et sons et ainsi de fonder une action symbolique, l'écriture du nombre avec un 1 aux dizaines, sur une action concrète qui passe par le corps. Plus précisément, le passage à la dizaine est ressenti physiquement par une rupture combinant la vue (sur la pascaline, la roue du milieu bouge), l'ouïe (le bruit émis est plus fort) et le sens haptique (le retour de force dans le geste est plus important). Enfin, la pascaline garde en mémoire le cardinal d'une collection et l'affiche par un nombre, comme un compteur. Mais par rapport au compteur papier disponible dans certains manuels, elle est plus fiable lors des manipulations et au final les élèves produisent peu d'erreurs de dénombrement une fois qu'ils ont appris à manipuler l'outil.

Les résultats de ce travail concernent également le développement de connaissances et savoirs au sein du collectif d'enseignants, formateurs, conseillers pédagogiques et chercheurs du groupe pascaline de la MPSA. Il y a d'une part les ressources produites par le collectif pour les enseignants et les formateurs (actuellement disponibles uniquement de façon interne). L'objectif de la dernière année de travail est de mettre à disposition, par une publication, le fruit de l'activité du groupe. Mais la production concerne également le développement professionnel des membres du groupe, qu'ils soient enseignants, formateurs ou chercheurs. De nouvelles connaissances ont été construites par les enseignants qui déclarent, par exemple, être maintenant plus attentifs à bien présenter la tâche à accomplir aux élèves et, lors des mises en commun, à veiller à ce que les élèves verbalisent les procédures qu'ils ont utilisées pour accomplir la tâche en s'appuyant sur les outils utilisés. Cette prise de conscience chez les enseignants de la différence entre la tâche donnée et la technique à utiliser pour la réaliser (que faut-il faire et comment le faire), comme la distinction entre la technique et la justification de la technique (comment faire et pourquoi ça marche) résulte de l'analyse théorique que le groupe a conduite en distinguant les tâches, les techniques et les justifications selon la théorie anthropologique du didactique (Chevalard, 1999). Pour les chercheurs apparaissent également de nouvelles connaissances par rapport aux travaux antérieurs (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). Par exemple, une particularité de la pascaline est de générer une collection éphémère de sons, ce que ne font pas les autres outils de dénombrement habituellement utilisés en classe. C'est cette propriété qui n'avait pas émergée dans les projets précédents avec la pascaline, qui a été utilisée dans le groupe de travail de la MPSA pour concevoir des situations d'apprentissage. Une autre connaissance

¹⁵⁴ L'haptique désigne la science du toucher, par analogie à l'acoustique ou l'optique. Le sens haptique englobe le toucher et les phénomènes kinesthésiques. Son rôle dans l'apprentissage est étudié en sciences cognitives, en particulier avec les travaux de Gentaz (2014).

développée par les formateurs du groupe de travail est relative au fait qu'il est possible et utile de distinguer collection, grandeur et mesure pour former les enseignants.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ALDON G., ARZARELLO F., CUSI A., GARUTI R., MARTIGNONE F., ROBUTTI O., SOURY-LAVERGNE S. (2013) The Meta-Didactical Transposition: A Model for Analysing Teachers Education Programs. In *Proceedings of PME 37*. Kiel, Germany.
- BALACHEFF N., & MARGOLINAS C. (2005) cKç Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Ecole d'Ete de Didactique des Mathématiques* (pp. 1–32). Corps, France: La pensée Sauvage Grenoble, France.
- CHEVALARD Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- FAYOL M. (2012) *L'acquisition du nombre*. Paris: Presses universitaires de France.
- GENTAZ E. (2014) Comment aider les enfants de 5-6 ans à connaître les figures géométriques planes ? Un point de vue des sciences cognitives de l'éducation. In *XLe colloque de la COPIRELEM* (pp. 81–86). Nantes, France.
- MARGOLINAS C., & WOSNIACK F. (2012) *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. (De Boeck). Bruxelles.
- NOIRFALISE A. (2017) Mesures et grandeurs, système de numération. Publication de la Maison pour la science en Auvergne.
- RIOU-AZOU G., & SOURY-LAVERGNE S. (2015) Mallette d'outils mathématiques, le boulier et la pascaline. In *XXXIe colloque de la COPIRELEM*. Mont de Marsan, France.
- SOURY-LAVERGNE S. (2014) *MOM pascaline et e-pascaline, une Mallette d'Outils Mathématiques pour la numération et le calcul en CP*. Rapport IFE Canopé. <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette>
- SOURY-LAVERGNE S., & MASCHIETTO M. (2013) A la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale. In C. Ouvrier-Buffet (Ed.), *XXXIXe colloque de la COPIRELEM*. Quimper.
- SOURY-LAVERGNE S., & MASCHIETTO M. (2015) Number system and computation with a duo of artefacts: The pascaline and the e-pascaline. In X. Sun, B. Kaur, & J. Novotna (Eds.), *The Twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (pp. 371–378). Macau, China: ICMI.
- VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 10(2.3), 133–170.