



HAL
open science

Un modèle discret du problème de Robbins

Etienne Bellin

► **To cite this version:**

| Etienne Bellin. Un modèle discret du problème de Robbins. 2018. hal-01815749v2

HAL Id: hal-01815749

<https://hal.science/hal-01815749v2>

Preprint submitted on 3 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle discret du problème de Robbins

Etienne Bellin

École normale supérieure de Lyon

Avril 2020

On observe successivement la valeur de n variables aléatoires indépendantes et de lois uniformes sur $[0, 1]$. A chaque observation il faut prendre la décision de s'arrêter ou de continuer et ainsi de passer à l'observation suivante. L'objectif est de minimiser l'espérance du rang final de l'observation sur laquelle on s'est arrêté. Ce problème porte le nom de problème de Robbins. Notre approche est d'étudier un modèle discret de ce problème où les observations sont à valeur dans un ensemble fini. On présente ici un algorithme qui permet de trouver une stratégie optimale dans le cas discret pour des petites valeurs de n .

Introduction

Rappelons plus formellement l'énoncé du problème de Robbins (que l'on abrégera par PR dans la suite). On dispose de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, \mathcal{F}_k la tribu engendrée par X_1, \dots, X_k et $\langle X_k \rangle$ le rang de X_k c'est-à-dire :

$$\langle X_k \rangle = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \leq X_k}. \quad (1)$$

L'objectif est alors de trouver un temps d'arrêt T , adapté à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{k=1 \dots n}$, qui soit optimal, c'est-à-dire, qui minimise $\mathbb{E}[\langle X_T \rangle]$. On s'intéresse également aux quantités :

$$V_n = \inf \{ \mathbb{E}[\langle X_T \rangle] : T \text{ est un temps d'arrêt} \} \quad \text{et} \quad V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n. \quad (2)$$

L'article de Bruss (2005) apporte un éventail complet des travaux effectués sur le PR jusqu'en 2005, faisant référence aux travaux de Bruss et Ferguson (1993, 1996),

de Assaf et Samuel-Cahn (1996), dans le contexte d'un problème très similaire de *Poisson-embedding*, de Bruss et Rogers (1991) et enfin de Gnedin (2004). L'idée du *Poisson-embedding* est reprise par Gnedin (2009) et Bruss et Swan (2009). Ces derniers ont d'ailleurs démontré, que la valeur asymptotique V du PR, toujours inconnue de nos jours, doit coïncider avec la valeur asymptotique de la version de Poisson du problème.

Voir aussi Gnedin et Iksanov (2011) pour des résultats supplémentaires et Tamaki (2004) pour quelques interprétations et visualisations du *Poisson-embedding*.

Bruss et Ferguson (1993) ont trouvé, grâce à une stratégie de seuil sans mémoire, la majoration $V \leq 7/3$. Assaf et Samuel-Cahn (1996) ont affiné cette méthode pour avoir la majoration $V \leq 2,3267$. Par une méthode de troncation Bruss et Ferguson (1993) démontrent que $V \geq 1,908$.

A notre connaissance, la dernière contribution intéressante à ce problème est celle de Meier et Sögner (2017). Ces auteurs nouent l'aspect des stratégies à seuils sans mémoire avec l'aspect de "rangs désirables" et obtiennent une stratégie combinée pour un résultat légèrement amélioré avec une nouvelle borne $V \leq 2,32614$. Cependant cette amélioration ne dit pas si la stratégie optimale asymptotique (pour n tendant vers l'infini) se trouve, oui ou non, dans la classe des stratégies à seuils sans mémoire.

Notre approche

Notre approche consiste à étudier le problème de Robbins discret (abrégé en PRD), similaire au PR à la différence que dans cette situation les variables aléatoires sont à valeurs dans un ensemble fini. Plus précisément, posons pour $m \geq 1$:

$$I_m = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1 \right\} \quad (3)$$

et considérons des variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n i.i.d de loi uniforme sur I_m . Posons pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, \mathcal{G}_k la tribu engendrée par Y_1, \dots, Y_k . Comme dans cette situation des Y_i peuvent prendre la même valeur avec une probabilité non nulle il faut préciser un peu plus la notion de rang :

Définition 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$ de cardinal fini. On appelle *rang* de x dans F la quantité :

$$\# \{y \in F : y < x\} + 1. \quad (4)$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble F on notera ce rang $\langle x \rangle$.

Remarque 1. Cette définition de rang est presque sûrement compatible avec celle donnée dans l'introduction pour les X_i .

Comme pour le PR on recherche un temps d'arrêt optimal T adapté à $(\mathcal{G}_k)_{k=1\dots n}$, ainsi que la quantité :

$$V_{n,m} = \inf \{ \mathbb{E}[\langle Y_T \rangle] : T \text{ est un temps d'arrêt} \}. \quad (5)$$

Le premier objectif est de montrer que le PRD approxime le PR pour n fixé et m tendant vers $+\infty$. Le deuxième est d'écrire un algorithme permettant de résoudre numériquement le PRD pour de petites valeurs de m et n .

Afin d'écrire un algorithme, il va être plus commode de ne pas parler de temps d'arrêt mais plutôt de stratégies :

Définition 2. Une *stratégie* est une fonction :

$$S : \bigcup_{k=1}^n E^k \longrightarrow \{\mathbf{A}, \mathbf{C}\} \quad (6)$$

telle que pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$, $S(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{A}$. Où $E = [0, 1]$ pour le PR et $E = I_m$ pour le PRD, \mathbf{A} et \mathbf{C} sont deux symboles désignant respectivement "arrêter" et "continuer" et E^k désigne les k -uplets de E . De plus on dira qu'une stratégie S pour le PR est adaptée si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $S(X_1, \dots, X_k)$ est \mathcal{F}_k -mesurable.

En résumé une stratégie est la donnée d'une décision face aux k premières variables observées : soit on s'arrête et on sélectionne la k -ième variable, soit on continue et on observe la $(k + 1)$ -ième variable. De plus on impose de s'arrêter s'il n'y a plus de variables à observer ensuite (donc si $k = n$).

Remarque 2. On peut définir de la même manière la notion de stratégie adaptée pour le PRD mais comme va le montrer la proposition suivante, dans le PRD toutes les stratégies sont adaptées ce qui n'est pas nécessairement le cas dans le PR.

Dans la suite on impose que les X_i et Y_i soient définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 3. Soit S une stratégie pour le PR. Le *rang associé* à S est la fonction $\langle S \rangle : \Omega \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ définie comme suit. Pour tout $\omega \in \Omega$ soit $T(\omega) \in \{1, 2, \dots, n\}$ le plus petit entier vérifiant :

$$S(X_1(\omega), \dots, X_{T(\omega)}(\omega)) = \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \forall i < T(\omega), S(X_1(\omega), \dots, X_i(\omega)) = \mathbf{C}. \quad (7)$$

$\langle S \rangle(\omega)$ est alors défini comme le rang de $X_{T(\omega)}(\omega)$ dans $\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$. En outre T sera appelé *l'instant d'arrêt associé* à S . On adapte cette définition à une stratégie pour le PRD en changeant les X_i en Y_i .

Le but est de chercher une stratégie optimale minimisant l'espérance de son rang associé, mais avant de parler d'une telle espérance il faut traiter les questions de mesurabilité.

Proposition 1. 1. Soit S une stratégie (pour le PR ou le PRD), notons T son instant d'arrêt associé. Alors : S est adapté $\Rightarrow T$ est un temps d'arrêt $\Rightarrow \langle S \rangle$ est mesurable.

2. Pour le PR comme pour le PRD, si T est un temps d'arrêt, alors il existe une stratégie adaptée S telle que T est l'instant d'arrêt associé à S .

3. Dans le PRD, toutes les stratégies sont adaptées.

Démonstration. Montrons 1 et 2 pour le PR, les preuves restent identiques pour le PRD.

1. Pour la première implication on utilise le fait que :

$$\{T = k\} = \bigcap_{i=1}^{k-1} \{S(X_1, \dots, X_i) = \mathbf{C}\} \cap \{S(X_1, \dots, X_k) = \mathbf{A}\}. \quad (8)$$

Pour la deuxième implication on utilise la formule :

$$\{\langle S \rangle = r\} = \bigcup_{k=1}^n \{T = k\} \cap \{\langle S \rangle = r\}. \quad (9)$$

2. Si T est un temps d'arrêt, on définit la stratégie suivante :

$$\forall \omega \forall k, \quad S(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)) = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si } k < T(\omega) \\ \mathbf{A} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (10)$$

A priori la formule précédente ne définit S que presque partout mais on complète la définition en posant $S = \mathbf{A}$ sur les points non atteints. Il faut remarquer que S est bien définie sous cette forme car T est un temps d'arrêt. On vérifie ensuite que la stratégie S est adaptée et que T est l'instant d'arrêt associé à S .

3. Soit S une stratégie pour le PRD et soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On voit aisément que l'ensemble $\{S(X_1, \dots, X_k) = \mathbf{A}\}$ s'écrit comme une union finie d'ensembles de la forme $\bigcap_{i=1}^k \{Y_i = y_i\}$ où $y_i \in I_m$. □

La correspondance ainsi établie entre stratégies et temps d'arrêt permet alors de formuler :

$$V_n = \inf \{\mathbb{E}[\langle S \rangle] : S \text{ est une stratégie adaptée pour le PR}\} \quad (11)$$

$$V_{n,m} = \inf \{\mathbb{E}[\langle S \rangle] : S \text{ est une stratégie pour le PRD}\}. \quad (12)$$

On remarque que pour le PRD, il n'existe qu'un nombre fini de stratégies. Cela implique alors qu'il existe une stratégie optimale S_{opt} telle que $V_{n,m} = \mathbb{E}[\langle S_{opt} \rangle]$.

L'objectif est de montrer que $V_{n,m} \rightarrow V_n$ lorsque $m \rightarrow +\infty$, mais on aimerait aussi estimer la vitesse de cette convergence. Nous allons démontrer un encadrement du type $V_{n,m} \leq V_n \leq V_{n,m} + C_{n,m}$ avec $C_{n,m} = O(1/m)$ quand $m \rightarrow +\infty$ et n est fixé.

Proposition 2. Pour $m \geq n$ on a la majoration :

$$V_n \leq V_{n,m} + n \left(1 - \frac{m!}{(m-n)! m^n} \right). \quad (13)$$

Démonstration. Soit $m \geq n$. Appelons *boîte* tout intervalle de la forme $]l/n ; (l+1)/n[$ avec $0 \leq l \leq n-1$. Considérons E_m l'évènement "il existe $i \neq j$ tels que X_i et X_j sont dans une même boîte". Alors on voit que :

$$1 - \mathbb{P}(E_m) = \frac{m!}{(m-n)!} \frac{1}{m^n}. \quad (14)$$

En effet pour que E_m ne se réalise pas il faut et il suffit que X_1 tombe dans une boîte, puis X_2 tombe dans une boîte différente, puis X_3 dans une boîte encore différente etc.

Soit S_{opt} une stratégie optimale pour le PRD. On va construire une stratégie adaptée S pour le PR telle que $\mathbb{E}[\langle S \rangle] \leq n\mathbb{P}(E_m) + V_{n,m}$ et la proposition sera alors démontrée. Notons pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)$ le plus petit élément de I_m tel que $x \leq f(x)$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$, on pose alors :

$$S(x_1, \dots, x_k) = S_{opt}(f(x_1), \dots, f(x_k)). \quad (15)$$

On observe que S est adaptée et que :

$$\mathbb{E}[\langle S \rangle] = \mathbb{E}[\langle S \rangle \mathbf{1}_{E_m}] + \mathbb{E}[\langle S \rangle \mathbf{1}_{E_m^c}]. \quad (16)$$

Or $\langle S \rangle \leq n$ donc :

$$\mathbb{E}[\langle S \rangle \mathbf{1}_{E_m}] \leq n\mathbb{P}(E_m). \quad (17)$$

Il reste donc à montrer :

$$\mathbb{E}[\langle S \rangle \mathbf{1}_{E_m^c}] \leq V_{n,m} = \mathbb{E}[\langle S_{opt} \rangle]. \quad (18)$$

Remarquons que pour tout $y_1, \dots, y_n \in I_m$, $\langle S_{opt} \rangle$ est constant sur l'évènement $\{Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n\}$. Si on note $R(y_1, \dots, y_n)$ cette constante, alors :

$$\mathbb{E}[\langle S_{opt} \rangle] = \frac{1}{m^n} \sum_{y_1, \dots, y_n \in I_m} R(y_1, \dots, y_n). \quad (19)$$

De même, pour tout $y_1, \dots, y_n \in I_m$ deux à deux distincts, $\langle S \rangle$ est constant sur l'évènement $\{f(X_1) = y_1, \dots, f(X_n) = y_n\}$, de plus cette constante vaut exactement $R(y_1, \dots, y_n)$. Ainsi :

$$\mathbb{E}[\langle S \rangle \mathbf{1}_{E_m^c}] = \frac{1}{m^n} \sum_{\substack{y_1, \dots, y_n \in I_m \\ i \neq j \Rightarrow y_i \neq y_j}} R(y_1, \dots, y_n) \leq \mathbb{E}[\langle S_{opt} \rangle]. \quad (20)$$

□

Maintenant pour démontrer l'autre sens de l'inégalité, on va introduire la notion de stratégie aléatoire pour le PRD.

Définition 4. Une *stratégie aléatoire* pour le PRD est une fonction :

$$s : \bigcup_{k=1}^n I_m^k \longrightarrow \{Y : \Omega \rightarrow \{\mathbf{A}, \mathbf{C}\} \text{ variable aléatoire}\} \quad (21)$$

telle que pour tout $y_1, \dots, y_n \in I_m$, $s(y_1, \dots, y_n)$ est constante égale à \mathbf{A} et l'image de s forme une famille de variables aléatoires indépendantes de (Y_1, \dots, Y_n) . De plus on définit le *rang associé* à s , noté $\langle s \rangle$ comme suit. Pour tout $\omega \in \Omega$ prenons k le plus petit entier dans $\{1, 2, \dots, n\}$ vérifiant :

$$s(Y_1(\omega), \dots, Y_k(\omega))(\omega) = \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \forall i < k, s(Y_1(\omega), \dots, Y_i(\omega))(\omega) = \mathbf{C}. \quad (22)$$

$\langle s \rangle(\omega)$ est alors le rang de $Y_k(\omega)$ dans $\{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\}$.

Remarque 3. Le rang associé à une stratégie aléatoire est toujours mesurable.

Si on note :

$$v_{n,m} = \inf \{ \mathbb{E}[\langle s \rangle] : s \text{ est une stratégie aléatoire pour le PRD} \}, \quad (23)$$

alors on veut montrer que $v_{n,m} = V_{n,m}$. Déjà il est clair que $v_{n,m} \leq V_{n,m}$ car une stratégie, comme on l'a défini, est un cas particulier de stratégie aléatoire. Avant de démontrer l'égalité nous introduisons certaines notations et définitions.

Définition 5. Soit s une stratégie aléatoire et $y = (y_1, \dots, y_k) \in I_m^k$ avec k dans $\{1, \dots, n\}$. On définit l'évènement :

$$A(y) = \{ \forall i < k, s(y_1, \dots, y_i) = \mathbf{C} \}. \quad (24)$$

On définit aussi :

$$b(y) = r + (my_k - r) \left[1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-k} \right]. \quad (25)$$

De plus si on note $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ et si $\mathbb{P}(A(y)) > 0$ alors on pose :

$$r_s(y) = \mathbb{E}[\langle s \rangle | Y = y \text{ et } A(y)] \quad \text{et} \quad p(y) = \frac{\mathbb{P}(A(y) \text{ et } s(y) = \mathbf{C})}{\mathbb{P}(A(y))}. \quad (26)$$

Pour finir, si $\mathbb{P}(A(y) \text{ et } s(y) = \mathbf{C}) > 0$ alors on note :

$$a_s(y) = \frac{1}{m} \sum_{z \in I_m} r_s(y, z). \quad (27)$$

Proposition 3. Soit s une stratégie aléatoire et $y = (y_1, \dots, y_k) \in I_m^k$ avec k dans $\{1, \dots, n\}$. Notons r le rang de y_k dans $\{y_1, \dots, y_k\}$.

1. Si $\mathbb{P}(A(y)) > 0$,

$$r_s(y) = a_s(y)p(y) + b(y)(1 - p(y)). \quad (28)$$

2. En toute généralité on a :

$$\mathbb{E}[\langle s \rangle] = \frac{1}{m} \sum_{z \in I_m} r_s(z). \quad (29)$$

Remarque 4. Le point 1 de la proposition appliqué avec $k = n$ dit que si $\mathbb{P}(A(y)) > 0$, alors $r_s(y) = r$. On remarque aussi que $a_s(y)$ n'est pas défini pour $p(y) = 0$ mais dans ce cas on prend la convention $a_s(y)p(y) = 0$ et le point 1 de la proposition reste vrai.

Avant de démontrer la proposition, énonçons un lemme.

Lemme 1. Soit Z_1, \dots, Z_l des variables aléatoires i.i.d de loi uniforme dans $\{1, \dots, N\}$ et $E \subset \{1, \dots, N\}$ de cardinal j . Alors :

$$\mathbb{E}[\#(E \cap \{Z_1, \dots, Z_l\})] = j \left[1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^l \right]. \quad (30)$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $E = \{1, \dots, j\}$. Notons pour tout $i \in E$, A_i la variable aléatoire qui vaut 1 si un des Z_p vaut i et 0 sinon. Ainsi :

$$\#(E \cap \{Z_1, \dots, Z_l\}) = \sum_{i=1}^j A_i. \quad (31)$$

Donc :

$$\mathbb{E}[\#(E \cap \{Z_1, \dots, Z_l\})] = \sum_{i=1}^j \mathbb{P}(A_i = 1). \quad (32)$$

Or, pour tout $i \in E$:

$$\mathbb{P}(A_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(A_i = 0) = 1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^l. \quad (33)$$

□

Nous pouvons désormais démontrer la proposition 3.

Démonstration. Pour montrer le point 1 de la proposition 3 il suffit de montrer que :

$$a_s(y) = a := \mathbb{E}[\langle s \rangle | Y = y, A(y) \text{ et } s(y) = \mathbf{C}] \quad (34)$$

$$b(y) = b := \mathbb{E}[\langle s \rangle | Y = y, A(y) \text{ et } s(y) = \mathbf{A}] \quad (35)$$

Or d'une part si $p(y) > 0$,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{m} \sum_{z \in I_m} \mathbb{E}[\langle s \rangle | Y = y, Y_{k+1} = z, A(y) \text{ et } s(y) = \mathbf{C}] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{z \in I_m} \mathbb{E}[\langle s \rangle | Y = y, Y_{k+1} = z \text{ et } A(y, z)] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{z \in I_m} r_s(y, z) = a_s(y). \end{aligned} \quad (36)$$

et d'autre part on remarque que si $p(y) < 1$ alors b correspond au rang moyen de y_k dans $\{y_1, \dots, y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_n\}$ qui correspond aussi au cardinal moyen de l'ensemble $\{y_1, \dots, y_k, Y_{k+1}, \dots, Y_n\} \cap \{1/m, 2/m, \dots, y_k - 1/m\}$ auquel on ajoute 1. Par le lemme on obtient alors l'égalité $b(y) = b$.

Le point 2 s'obtient en remarquant que $A(z) = \Omega$ pour tout $z \in I_m$. □

Nous proposons maintenant la construction d'une stratégie optimale S_{opt} pour le PRD (qui n'est pas aléatoire). Pour cela on va construire par récurrence décroissante une suite $(S^{(k)})_{k=1 \dots n}$ de stratégies et on prendra $S_{opt} = S^{(1)}$.

On initialise en prenant $S^{(n)}$ la stratégie qui vaut toujours **C** (sauf sur I_m^n). Ensuite pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $y \in I_m^i$ avec $i \in \{1, \dots, n\}$ on prend $S^{(k)}(y) = S^{(k+1)}(y)$ si $i \neq k$ et si $i = k$ alors on prend $S^{(k)}(y) = \mathbf{C}$ si $a_{S^{(k+1)}}(y) < b(y)$ et $S^{(k)}(y) = \mathbf{A}$ sinon. Ainsi on a que $r_{S^{(k)}}(y) = \min\{a_{S^{(k+1)}}(y), b(y)\}$.

Proposition 4. *Si S_{opt} est la stratégie construite ci-dessus alors elle est optimale pour les stratégies aléatoires (et donc, a fortiori, aussi pour les stratégies non aléatoires). Ainsi :*

$$v_{n,m} = V_{n,m} = \mathbb{E}[\langle S_{opt} \rangle]. \quad (37)$$

Démonstration. Soit s une stratégie aléatoire pour le PRD. On va montrer par récurrence décroissante sur k que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et $y \in I_m^k$, $r_{S^{(k)}}(y) \leq r_s(y)$ lorsque la quantité de droite est bien définie (celle de gauche l'est toujours).

Pour $k = n$ il s'agit d'une égalité par le point 1 de la proposition 3 (et la remarque qui suit). Supposons l'inégalité vraie pour un certain $k \in \{2, \dots, n\}$ et soit $y \in I_m^{k-1}$. Si $p(y) = 0$, alors $r_s(y) = b(y) \geq r_{S^{(k)}}(y)$. Sinon, on observe que $r_s(y) \geq \min\{a_s(y), b(y)\}$ par le point 1 de la proposition 3. Or $a_s(y) \geq a_{S^{(k+1)}}(y)$ par hypothèse de récurrence et on a vu que $r_{S^{(k)}}(y) = \min\{a_{S^{(k+1)}}(y), b(y)\}$, donc l'hérédité est assurée.

On conclut la preuve en utilisant le point 2 de la proposition 3. □

Maintenant que l'on a étudié les stratégies aléatoires, on peut démontrer la proposition 5.

Proposition 5. *On a l'inégalité :*

$$V_{n,m} \leq V_n \quad (38)$$

Démonstration. Soit S une stratégie pour le PR. On va définir une stratégie aléatoire s pour le PRD tel que $\mathbb{E}[\langle s \rangle] \leq \mathbb{E}[\langle S \rangle]$ et ainsi la proposition sera démontrée.

Prenons des variables aléatoires i.i.d Z_1, \dots, Z_n définies sur Ω , de loi uniforme sur $[0, 1/m[$ et indépendantes de Y_1, \dots, Y_n . On définit s de la manière suivante :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \text{ et } y_1, \dots, y_k \in I_m, \quad s(y_1, \dots, y_k) = S(y_1 - Z_1, \dots, y_k - Z_k). \quad (39)$$

On remarque que le rang de y_k dans $\{y_1, \dots, y_n\}$ est toujours plus petit que le rang de $y_k - Z_k$ dans $\{y_1 - Z_1, \dots, y_n - Z_n\}$. Ainsi on a que :

$$\mathbb{E}[\langle s \rangle | Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n] \leq \mathbb{E}[\langle S \rangle | \forall k, y_k - 1/m < X_k \leq y_k]. \quad (40)$$

Et donc :

$$\mathbb{E}[\langle s \rangle] = \sum_{y \in I_m^n} \mathbb{E}[\langle s \rangle | Y = y] \leq \sum_{y \in I_m^n} \mathbb{E}[\langle S \rangle | \forall k, y_k - 1/m < X_k \leq y_k] = \mathbb{E}[\langle S \rangle]. \quad (41)$$

□

En conclusion on a bien l'encadrement voulu $V_{n,m} \leq V_n \leq V_{n,m} + C_{n,m}$ avec $C_{n,m}$ donné par la proposition 2 qui est en $O(1/m)$ pour (n fixé). En outre nous proposons un algorithme (code Python en annexe) pouvant calculer $V_{n,m}$. Sa complexité en temps est en $O(m^n)$ et sa complexité en espace est en $O(mn)$.

$V_{n,m}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
$m = 10$	1	1,2	1,296	1,3427	1,3686	1,3781	1,3785
$m = 100$	1	1,245	1,38118	1,47694			
$m = 1000$	1	1,2495	1,39051				
$m = 10000$	1	1,24995					
$C_{n,m}$	0	0,0002	0,008994	0,235624	3,488	5,0928	6,57664
V_n	1	1,25	1,39155	1,4932			

TABLE 1 – Quelques valeurs de $V_{n,m}$ données par l'algorithme. Dans chaque colonne, $C_{n,m}$ a été calculé avec le plus grand m tel que la valeur de $V_{n,m}$ apparaît dans la colonne. V_4 a été calculée par Dendievel et Swan (2016).

La complexité en temps de l'algorithme rend le calcul bien trop long même pour de petites valeurs de m et n . Il serait possible d'améliorer cette complexité en remarquant la chose suivante. L'algorithme actuel calcule pour chaque situation (c'est-à-dire pour la donnée d'une observation $Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k$) s'il est mieux de continuer ou de s'arrêter. Comme le nombre de situations est de l'ordre de m^n la complexité est en $O(m^n)$. Seulement, si face à la situation $Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k$ l'algorithme conclut qu'il vaut mieux s'arrêter, alors il faudra aussi s'arrêter face à la situation $Y_1 = y_1, \dots, Y_k = z_k$ avec $z_k \leq y_k$ et donc des calculs peuvent être épargnés.

Quelques propriétés du PRD

L'objectif dans ce qui suit est d'établir des relations entre les $V_{n,m}$. On notera maintenant $\text{PRD}(n,m)$ le problème de Robbins discret avec les paramètres n et m .

Proposition 6. $\forall n \geq m - 1 :$

$$V_{n+1,m} \leq V_{n,m}. \quad (42)$$

Démonstration. Soit S_{opt} une stratégie optimale pour le PRD(n, m). On va définir une stratégie S_{n+1} pour le PRD($n+1, m$) telle que $\mathbb{E}[\langle S_{n+1} \rangle] = V_{n, m}$.

Supposons $n \geq m$. Dans ce cas l'idée est d'observer que Y_1, \dots, Y_{n+1} ne peuvent pas être tous distincts et donc au moins un des Y_i n'apportera rien à l'estimation du rang et pourra être ignoré. Formellement, soit $y_1, \dots, y_k \in I_m$ avec $1 \leq k \leq n+1$. Si les y_i sont tous distincts alors on pose :

$$S_{n+1}(y_1, \dots, y_k) = S_{opt}(y_1, \dots, y_k). \quad (43)$$

Sinon on prend j le plus petit indice tel que $y_j \in \{y_1, \dots, y_{j-1}\}$ et on pose alors :

$$S_{n+1}(y_1, \dots, y_k) = S_{opt}(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_k). \quad (44)$$

On a alors que $\mathbb{E}[\langle S_{n+1} \rangle] = \mathbb{E}[\langle S_{opt} \rangle] = V_{n, m}$.

Supposons maintenant $n = m - 1$. Ici les Y_i peuvent éventuellement être tous distincts mais dans ce cas un des Y_i vaudra la valeur maximale 1 et n'aura pas d'influence sur le rang. Il pourra donc aussi être ignoré et le résultat tient encore. \square

Proposition 7. $\forall n, m \geq 1 :$

$$V_{n, m} \leq V_{n, m+1}. \quad (45)$$

Démonstration. Soit S_{opt} une stratégie optimale pour le PRD($n, m+1$). On va définir une stratégie aléatoire s_n pour le PRD(n, m) telle que $\mathbb{E}[\langle s_n \rangle] = V_{n, m+1}$.

L'idée est de décaler tous les Y_i qui sont au dessus d'une valeur seuil y d'un cran vers la droite et ensuite d'appliquer la stratégie S_{opt} . Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme dans I_{m+1} indépendante de Y_1, \dots, Y_n . Pour tout i définissons \tilde{Y}_i par :

$$\tilde{Y}_i = \begin{cases} Y_i & \text{si } Y_i < Y \\ Y_i + 1/m & \text{sinon.} \end{cases} \quad (46)$$

On définit alors la stratégie aléatoire :

$$s(Y_1, \dots, Y_k) = S_{opt}(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_k). \quad (47)$$

On remarque que le rang reste inchangé par la transformation, c'est-à-dire que pour tout i , $\langle Y_i \rangle = \langle \tilde{Y}_i \rangle$. De plus les \tilde{Y}_i sont i.i.d de loi uniforme dans I_{m+1} . Ainsi on a exactement $\mathbb{E}[\langle s_n \rangle] = \mathbb{E}[\langle S_{opt} \rangle] = V_{n, m+1}$. \square

Annexe

```
import time

import numpy as np

from fractions import *

def rang(x,L):
    r=1
    Y=[]
    for i in range(0,len(L)):
        if L[i]<x and not L[i] in Y:
            r+=1
            Y.append(L[i])
    return r

def rang_moyen_si_A(k,n,x,L):
    r=rang(x,L)
    a=Fraction(1,n)
    return r+(x-r)*(1-(1-a)**k)

def moyenne(L,n):
    s=0
    for i in range(0,n):
        s+=L[i]
    return Fraction(s,n)

def f(k,n,R,L):
    a=moyenne(R,n)
    x=L[-1]
    b=rang_moyen_si_A(k,n,x,L)
    return min(a,b)

def g(L):
    x=L[-1]
    return rang(x,L)

def aux(k,n,f,g,L):
    if k==0:
        return g(L)
    R=[]
    for i in range(1,n+1):
        R.append(aux(k-1,n,f,g,L+[i]))
```

```

    return f(k,n,R,L)

def V(k,n):
    t1=time.time()
    R=[]
    for i in range(1,n+1):
        R.append(aux(k-1,n,f,g,[i]))
    t2=time.time()
    V=moyenne(R,n)
    print(t2-t1)
    return V+0.0

def kp(k,n):
    if k==1:
        return 0
    a=1
    for i in range(n-k+1,n):
        a*=i
    return k*(1-float(a)/(n**(k-1)))

```

Références

- [1] ASSAF D. et E. SAMUEL-CAHN. “The secretary problem : minimizing the expected rank with i.i.d. random variables”. In : *Adv. Appl. Prob.* 42 (1996), p. 828-852.
- [2] BRUSS F. T. “What is known about Robbins’ problem ?” In : *J. Appl. Prob.* 42 (2005), p. 108-120.
- [3] BRUSS F. T. et FERGUSON T. S. “Minimizing the expected rank with full information”. In : *J. Appl. Prob.* 30 (1993), p. 616-621.
- [4] BRUSS F. T. et FERGUSON T. S. “Half-prophets and Robbins’ problem of minimizing the expected rank”. In : *Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis, Vol. I (Lect. Notes Statist. 114, 1996)*. Springer, New York, pp.1-17. (1996).
- [5] BRUSS F. T. et ROGERS L. C. G. “Embedding optimal selection problems via Poisson”. In : *Stoch. Process. Appl.* 38 (1991), p. 267-278.
- [6] BRUSS F. T. et SWAN Y. C. “A continuous-time approach to Robbins’ problem of minimizing the expected rank”. In : *J. Appl. Prob.* 46 (2009), p. 1-18.
- [7] DENDIEVEL R. et SWAN Y. C. “One step more in Robbins’ problem : Explicit solution for the case $n = 4$ ”. In : *Math. Appl.* 44(1) (2016), p. 135-148.
- [8] GNEDIN A. V. “Best choice from the planar Poisson process”. In : *Stoch. Process. Appl.* 111 (2004), p. 317-354.
- [9] GNEDIN A. V. “Optimal stopping with rank-dependent loss”. In : *J. Appl. Prob.* 44 (2009), p. 996-1011.

- [10] GNEDIN A. V. et IKSANOV A. “Moments of random sums and Robbins’ problem of optimal stopping”. In : *J. Appl. Prob.* 48 (2011), p. 1197-1199.
- [11] MEIER M. et SÖGNER L. “A new strategy for Robbins’ problem of optimal stopping”. In : *J. Appl. Prob.* 54 (2017), p. 331-336.
- [12] TAMAKI M. “The PPP approach to Robbins’ problem of minimizing the expected rank”. In : *RIMS Kokyuroko* 1383 (2004), p. 130-139.