



HAL
open science

Intégration numérique de la partie élastique du taux de déformation

Vincent Mora, Hervé Laurent, Gérard Rio

► **To cite this version:**

Vincent Mora, Hervé Laurent, Gérard Rio. Intégration numérique de la partie élastique du taux de déformation. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813072

HAL Id: hal-01813072

<https://hal.science/hal-01813072>

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Intégration numérique de la partie élastique du taux de déformation

Vincent Mora — Hervé Laurent — Gérard Rio

*Laboratoire Génie Mécanique et Matériaux
UPRESS : EA2595
rue de Saint Maudé – BP 92116
56321 Lorient Cedex
vincent.mora@univ-ubs.fr*

RÉSUMÉ. Nous proposons une méthode, directement utilisable dans le cadre d'un calcul élastoplastique en grandes transformations par élément finis, pour intégrer la partie élastique du taux de déformation et obtenir la partie élastique de la mesure de déformation logarithmique. Cette méthode s'appuie sur l'utilisation du système de coordonnées matérielles entraînées naturellement associé aux éléments finis.

ABSTRACT. The purpose of this paper is to propose a method to integrate the elastic part of the deformation rate tensor in order to obtain the elastic part of the logarithmic strain tensor. This method is based on the use of the convective coordinate system directly associated with finite elements and is particularly suited for an implantation in a finite element computer code.

MOTS-CLÉS : Intégration numérique, grande transformation, dérivée objective, élastoplasticité, coordonnées matérielles entraînées.

KEYWORDS: Numerical integration, finite strain, objective derivative, elastoplasticity, convective coordinates.

1. Introduction

Le développement de lois de comportement en grandes transformations consiste, d'une manière générale, à *décrire* et à *intégrer* les *vitesse d'évolution* de différentes grandeurs : la contrainte dans le cas de lois hypoélastiques, une déformation plastique pour les lois élasto(visco)plastiques, ou, plus généralement, des variables internes dans le cadre thermodynamique proposé par Germain [GER 86]. Le problème qui se pose alors est, d'une part, de choisir une dérivée objective pour définir sa vitesse d'évolution, d'autre part, d'intégrer cette vitesse de manière cohérente.

Dans le cas des lois de comportements élastoplastiques, nous avons montré que le choix d'une dérivée objective unique pour la déformation totale, sa partie élastique et sa partie plastique conduit à une impasse (voir Mora *et al.* [MOR 04b]). En effet, bien que la dérivée logarithmique proposée récemment par Xiao *et al.* [XIA 98] soit la plus adaptée pour relier le taux de déformation et une mesure de déformation eulérienne, cette dérivée n'est pas adaptée pour relier la partie élastique de la déformation à sa vitesse d'évolution.

Une solution est alors d'employer une dérivée objective différente pour relier la partie élastique du taux de déformation à la la partie élastique de la déformation (cf. [MOR 04a]). Une conséquence de cette analyse est qu'il est nécessaire, pour chaque grandeur tensorielle introduite dans une loi de comportement, d'utiliser une dérivée objective différente. Choisir cette dérivée revient à définir par rapport à quel référentiel local objectif une grandeur évolue (ou reste constante).

L'objectif de ce papier est de présenter une approche originale pour l'implantation de modèles de comportement utilisant plusieurs dérivées objectives. L'intégration numérique du taux de déformation et de sa partie élastique sert ici à illustrer l'intérêt de cette approche. Nous commençons par introduire les notations utilisées pour la dérivation et l'intégration temporelle des tenseurs, puis nous montrons comment la déformation élastique, définie comme l'intégrale de la partie élastique du taux de déformation peut-être intégrée dans le repère naturel associé à un élément fini.

2. Dérivations et intégrations temporelles des tenseurs

Il existe de nombreuses notations pour les dérivées objectives où l'on substitue le point, utilisé pour la dérivée temporelle « classique », par un autre symbole. Nous préférons cependant employer, comme nous l'avons fait dans [MOR 04a], une notation proche de celle utilisée en mécanique générale où l'on précise systématiquement l'élément constant lorsque l'on dérive. Dans le cas d'un tenseur, cet élément de référence doit être une base. Pour un tenseur du second ordre $\mathbf{A} = A^{ab} \vec{e}_a \otimes \vec{e}_b$, nous notons la dérivée par rapport au temps τ dans la base \vec{e}_a :

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \right)_{\vec{e}_a} = \dot{A}^{ab} \vec{e}_a \otimes \vec{e}_b$$

L'intégration temporelle est l'opération inverse de la dérivation temporelle. La principale différence est que l'intégration temporelle d'un tenseur s'effectue sur un intervalle de temps alors que la dérivée d'un tenseur s'effectue à un instant donné. Il faut donc définir à quel temps est pris le résultat de l'intégrale. Nous notons l'intégrale du tenseur $\mathbf{A} = A^{ab} \vec{e}_a \otimes \vec{e}_b$, entre t_0 et t_1 dans \vec{e}_a pris à l'instant t :

$$\int_{t_0/\vec{e}_a @ t}^t \mathbf{A} d\tau = \int_{t_0}^t A^{ab} d\tau \vec{e}_a(t) \otimes \vec{e}_b(t) \quad (1)$$

le temps situé après le signe @ est le temps auquel est pris le résultat (ici t). Soulignons que *si les vecteurs de base \vec{e}_a sont objectifs, la dérivation et l'intégration temporelle dans \vec{e}_a d'une grandeur objective est une grandeur objective*. Nous nous intéressons ici à deux bases objectives particulières.

La première est la base naturelle \vec{g}_i , attachée localement à la matière. Dans le cadre d'un calcul par éléments finis, les coordonnées ξ^i de l'élément de référence fournissant un paramétrage matériel, les vecteurs de la base naturelle \vec{g}_i sont directement disponibles en chaque point d'intégration en dérivant les fonctions d'interpolation $\varphi_r(\xi^i)$:

$$\vec{g}_i(\tau) = x^{ar}(\tau) \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi^i} \vec{I}_a \quad (2)$$

où les x^{ar} sont les degrés de liberté de l'élément fini et les \vec{I}_a les vecteurs de la base associés au référentiel global.

La seconde est la base orthonormée directe \vec{E}_a qui relie la partie élastique ε_e de la mesure de déformation logarithmique à la partie élastique du taux de déformation :

$$\left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau} \right)_{\vec{E}_a} = \mathbf{D}_e \quad (3)$$

La base \vec{E}_a est caractérisée par sa vitesse de rotation par rapport au référentiel global :

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} + \Upsilon(\mathbf{B}_e, \mathbf{D}_e)$$

où Υ est la fonction utilisée par Xiao *et al.* [XIA 98] pour définir la vitesse de rotation logarithmique et où $\mathbf{B}_e = \exp(2\varepsilon_e)$ est la partie élastique du tenseur de Cauchy-Green gauche. Comme ε_e n'est connu que par sa vitesse d'évolution \mathbf{D}_e , il est nécessaire d'intégrer \mathbf{D}_e pour calculer ε_e .

3. Méthode d'intégration dans la base naturelle : application à \mathbf{D}_e

La base \vec{g}_i étant naturellement associée à l'élément fini, au lieu d'intégrer directement les composantes de \mathbf{D}_e dans la base \vec{E}_a , nous pouvons, avec la règle de composition des dérivées, exprimer la dérivée du tenseur ε_e par rapport à \vec{E}_a en fonction de sa dérivée par rapport à \vec{g}_i , de la fonction Υ et du taux de déformation (cf. [MOR 04a]) :

$$\left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau} \right)_{\vec{E}_a} = \left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau} \right)_{\vec{g}_i} + \mathbf{D} \cdot \varepsilon_e + \varepsilon_e \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_e \cdot \Upsilon(\mathbf{B}_e, \mathbf{D}_e) - \Upsilon(\mathbf{B}_e, \mathbf{D}_e) \cdot \varepsilon_e \quad (4)$$

Il est alors possible d'intégrer l'évolution de ε_e dans \vec{g}_i au lieu de l'intégrer dans \vec{E}_a . En effet, en introduisant (3) dans (4) il vient :

$$\left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau}\right)_{\vec{g}_i} = \mathbf{D}_e - \mathbf{D} \cdot \varepsilon_e - \varepsilon_e \cdot \mathbf{D} - \varepsilon_e \cdot \mathbf{\Upsilon} + \mathbf{\Upsilon} \cdot \varepsilon_e \quad (5)$$

En intégrant $\left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau}\right)_{\vec{g}_i}$ dans la base \vec{g}_i , nous obtenons alors ε_e à une constante près :

$$\varepsilon_e(t) = \int_{t_0/\vec{g}_i @ t}^t \left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau}\right)_{\vec{g}_i} d\tau + \mathbf{C}/\vec{g}_i \quad (6)$$

où \mathbf{C}/\vec{g}_i est un tenseur constant dans \vec{g}_i . Si on suppose qu'à l'instant initial t_0 la déformation $\varepsilon_e(t_0)$ est nulle, le tenseur \mathbf{C}/\vec{g}_i est nul. Finalement, en introduisant (4) dans (5), la déformation élastique s'écrit :

$$\varepsilon_e(t) = \int_{t_0/\vec{g}_i @ t}^t (\mathbf{D}_e - \mathbf{D} \cdot \varepsilon_e - \varepsilon_e \cdot \mathbf{D} - \varepsilon_e \cdot \mathbf{\Upsilon} + \mathbf{\Upsilon} \cdot \varepsilon_e) d\tau \quad (7)$$

Considérons maintenant le cas où l'on cherche à intégrer ε_e en deux temps, c'est-à-dire d'abord entre t_0 et t , puis entre t et $t + \Delta t$, ce qui correspond, en fait, à la méthode utilisée au cours du calcul incrémental pour intégrer numériquement ε_e . En utilisant la définition (1), on peut écrire :

$$\varepsilon_e(t + \Delta t) = \int_{t_0/\vec{g}_i @ t + \Delta t}^t \left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau}\right)_{\vec{g}_i} d\tau + \int_{t/\vec{g}_i @ t + \Delta t}^{t + \Delta t} \left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau}\right)_{\vec{g}_i} d\tau \quad (8)$$

où, dans le cadre d'une formulation en déplacement, on connaît :

$$\int_{t_0/\vec{g}_i @ t + \Delta t}^t \left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau}\right)_{\vec{g}_i} d\tau = \varepsilon_e^{ij}(t) \vec{g}_i(t + \Delta t) \otimes \vec{g}_j(t + \Delta t)$$

et où l'on doit déterminer, par intégration numérique, l'incrément de déformation élastique $\Delta\varepsilon_e$:

$$\Delta\varepsilon_e = \int_{t/\vec{g}_i @ t + \Delta t}^{t + \Delta t} \left(\frac{d\varepsilon_e}{d\tau}\right)_{\vec{g}_i} d\tau = \int_{t/\vec{g}_i @ t + \Delta t}^{t + \Delta t} (\mathbf{D}_e - \mathbf{D} \cdot \varepsilon_e - \varepsilon_e \cdot \mathbf{D} - \varepsilon_e \cdot \mathbf{\Upsilon} + \mathbf{\Upsilon} \cdot \varepsilon_e) d\tau$$

Ce changement de base d'intégration peut être utilisé dans un cadre beaucoup plus large que celui de l'intégration de \mathbf{D}_e . Nous pouvons par exemple, avec la même démarche, donner l'évolution dans \vec{g}_i d'un tenseur constant dans une référentiel local objectif quelconque. Une telle constante peut être utilisée pour modéliser une caractéristique du matériaux, des directions d'orthotropie ou encore la mémoire d'un état particulier (comme l'état de contrainte ou de déformation, maximum enduré par un matériau).

4. Application pratique

Dans le cadre d'une formulation en déplacements, les inconnues du problème discrétisé sont les degrés de liberté aux nœuds, que nous notons x^{ar} . A un instant donné du processus itératif, nous connaissons toutes les grandeurs mécaniques (déformation élastique, contrainte, etc.) au temps t et il nous faut déterminer l'évolution de ces grandeurs entre t et $t + \Delta t$ en fonction des degrés de liberté x^{ar} à $t + \Delta t$.

Notre but dans cet exemple est de déterminer la variation des composantes $\Delta \varepsilon_e^{ij}$ de la déformation élastique¹ entre t et $t + \Delta t$. Les expressions proposées sont adaptées à une intégration numérique de type θ -méthode, c'est-à-dire qu'elles permettent de satisfaire l'équation $(\frac{d\varepsilon_a}{dt}) \bar{E}_a = \mathbf{D}$ au temps $t + \theta \Delta t$ ($0 \leq \theta \leq 1$). En exprimant la relation (5) en termes de composantes dans la base naturelle, il vient :

$$\varepsilon_e^{ij} = D_e^{ij} - D_k^i \varepsilon_e^{kj} - \varepsilon_e^{ik} D_k^j - \varepsilon_e^{ik} \Upsilon_k^j + \Upsilon_k^i \varepsilon_e^{kj} \quad (9)$$

Dans le cas d'une intégration de type θ -méthode, nous avons :

$$\dot{\varepsilon}_e^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta \varepsilon_e^{ij}}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \varepsilon_e^{ij}(t + \theta \Delta t) = \varepsilon_e^{ij}(t) + \theta \Delta \varepsilon_e^{ij}$$

Pour que la relation (9) soit satisfaite à $t + \theta \Delta t$, il faut résoudre un système de six équations où les inconnues sont les six composantes indépendantes de $\Delta \varepsilon_e^{ij2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varepsilon_e^{ij}}{\Delta t} &= D_e^{ij}(t + \theta \Delta t) \\ &- D_k^i(t + \theta \Delta t) [\varepsilon_e^{kj}(t) + \theta \Delta \varepsilon_e^{kj}] - [\varepsilon_e^{ik} + \theta \Delta \varepsilon_e^{ik}] D_k^j(t + \theta \Delta t) \\ &- [\varepsilon_e^{ik} + \theta \Delta \varepsilon_e^{ik}] \Upsilon_k^j(t + \theta \Delta t) + \Upsilon_k^i(t + \theta \Delta t) [\varepsilon_e^{kj}(t) + \theta \Delta \varepsilon_e^{kj}] \end{aligned} \quad (10)$$

Un des intérêts de l'intégration dans \vec{g}_i est que les composantes du taux de déformation dans la base naturelle \vec{g}_i et dans sa base duale \vec{g}^i ont une forme particulièrement simple. Nous avons en effet :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}, \quad D_i^j = D_{ik} g^{kj} \quad \text{et} \quad D_j^i = g^{ik} D_{kj} \quad (11)$$

où g_{ij} et g^{ij} sont les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique qui, par définition, sont telles que :

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = x^{ar} x^{bs} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi^j} \delta_{ab} \quad \text{et} \quad g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \quad (12)$$

1. Dans le cas d'une résolution globale par une méthode de type Newton-Raphson, nous serons aussi amenés à calculer la variation des ces $\Delta \varepsilon_e^{ij}$ par rapport aux degrés de liberté du problème.
2. Le tenseur ε_e étant symétrique, la matrice ε_e^{ij} de ses composantes à t est aussi symétrique, par conséquent $\Delta \varepsilon_e^{ij}$ est symétrique

où δ est le symbole de Kronecker (les composantes contravariantes g^{ij} du tenseur métrique sont obtenues en inversant la matrice g_{ij}).

Si l'on émet l'hypothèse cinématique d'une vitesse constante entre t et $t + \Delta t$ ($\dot{x}^{ar} = v^{ar} = \text{cst}$), on a :

$$\left(\frac{d\vec{g}_i}{d\tau} \right)_{\vec{I}_a} = v^{ar} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi^i} \vec{I}_a \quad (13)$$

Les composantes covariantes du taux de déformation sont alors calculées en utilisant les relations (11), (12) et (13) :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(v^{ar} x^{bs} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi^j} \delta_{ab} + x^{ar} v^{bs} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi^i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi^j} \delta_{ab} \right)$$

qui, comme les x^{ar} , est une fonction linéaire de θ que nous pouvons directement inclure dans la relation (10).

5. Conclusion

Dans le cadre du développement de lois de comportements en grandes transformations, nous avons rappelé la nécessité d'introduire une base objective pour chaque grandeur tensorielle introduite. Nous avons montré, dans le cas particulier de la partie élastique de la mesure de déformation logarithmique, comment une grandeur définie par sa vitesse d'évolution dans une base objective particulière pouvait être intégrée dans la base naturelle. Cette dernière base présente en effet l'intérêt d'être directement accessible dans un calcul par éléments finis.

Les points clefs de l'implantation numérique ont aussi été présentés. Il faut souligner que ces développements peuvent être utilisés pour intégrer des grandeurs définies dans d'autres bases objectives en choisissant une fonction Υ différente (cf. [XIA 98]). Il est ainsi aisé d'intégrer dans la base naturelle des grandeurs dont la vitesse d'évolution est initialement définie à partir de la dérivée objective de Jaumann ou de la dérivée objective de Green-Naghdi.

6. Bibliographie

- [GER 86] GERMAIN P., *Mécanique*, Ecole Polytechnique, Edition Ellipses, Paris, 1986.
- [MOR 04a] MORA V., « Etude de l'intégration temporelle du tenseur taux de déformation. Application à la modélisation de l'élastoplasticité en grandes transformations », Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, Lorient, 2004.
- [MOR 04b] MORA V., LAURENT H., RIO G., « Déformation cumulée tensorielle dans le référentiel en rotation logarithmique », *Compte Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 332, 2004, p. 921-926.
- [XIA 98] XIAO H., BRUHNS O. T., MEYERS A., « On objective corotational rates and their defining spin tensors », *Int. J. Solids Structures*, vol. 35, n° 30, 1998, p. 4001-40134.