



**HAL**  
open science

## Renforcement d'une coque cylindrique par des cordes

Imed Miraoui, Hedi Hassis

► **To cite this version:**

Imed Miraoui, Hedi Hassis. Renforcement d'une coque cylindrique par des cordes. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813071

**HAL Id: hal-01813071**

**<https://hal.science/hal-01813071>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Renforcement d'une coque cylindrique par des cordes

**I. Miraoui et H. Hassis**

*Laboratoire de Génie Civil, LGC  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis  
B.P 37 Le belvédère 1002 Tunis Tunisie.  
E-mail : hedi.hassis@enit.rnu.tn*

---

**RESUME :** Pour l'analyse des coques cylindriques renforcées par des cordes, on présente un modèle 2D, tenant compte du comportement 1D des cordes. Les effets mécaniques (1D) associés aux cordes sont considérés à travers une formulation bidimensionnelle. Cette dernière ne néglige ni le couplage entre l'extension et la torsion, ni la disposition géométrique des cordes.

**ABSTRACT :** *For reinforced cylindrical shell by cords, a 2D model is here presented taking into account of the one dimensional behaviour of the cords. The one dimensional effects associated to the cords are here considered with a two dimensional equivalent effects. This model takes into account the twist extension coupling and the thickness position of the cords.*

MOTS-CLES : Cordes, renforcement, modèle 2D

KEYWORDS : Cords, reinforcement, 2D model

---

## 1. Introduction

Les plaques et les coques renforcées par des cordes métalliques sont utilisées pour la fabrication des pneumatiques, des tuyaux, des structures-ceintures,.. La combinaison des cordes avec un matériau relativement souple, est utilisable quand on a besoin d'un matériau très rigide en extension et "souple" en flexion. Ce type de structure a été analysé en utilisant les techniques d'homogénéisation, aboutissant ainsi à une structure mince anisotrope. Le modèle couramment utilisé est celui de Akasaka-Hirano ([AKA 72]) et Gough-Tangara ([GOU 68], [TAN 68]) défini par :

$$E_1 = c_1 E_c \eta_c + E_m (1 - \eta_c); E_2 = \frac{4E_m(1-\eta_c)[c_1 E_c \eta_c + E_m(1-\eta_c)]}{3E_c \eta_c + 4E_m(1-\eta_c)} \quad (1.a)$$

$$G_{12} = G_m(1 - \eta_c); \nu_{12} = 0.25; \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (1.b)$$

$E_1$  et  $E_2$  sont respectivement le module de Young dans les deux directions  $x_1$  et  $x_2$  de la surface,  $\nu_{12}$  est le coefficient de Poisson pour une déformation selon la direction  $x_2$  et un effort selon la direction  $x_1$ ,  $G_{12}$  est le module de cisaillement. Les constantes  $E_c$  et  $E_m$  sont les modules de Young de la corde et de la matrice, respectivement.  $\eta_c$  est la fraction volumique des cordes.  $c_1$  est un coefficient d'adhérence entre cordes. Paris et Costello ([PAR 00]) ont associé une formulation 1D et une autre 2D. Pidaparti et al. ([PID 92], [PID 95]) ont analysé les contraintes de liaison et la rupture, en solvant un problème tridimensionnel complet.

On présente ici un modèle bidimensionnel (2D), basé sur le comportement de chaque matériau isolé, et dans lequel les propriétés unidimensionnelles des cordes sont considérées à travers un modèle équivalent 2D.

## 2. Comportement de la corde et de la matrice

Une corde, constituée de plusieurs torons, est formée par un toron central, de rayon  $R_i$  et  $n$  torons hélicoïdaux d'angle  $\alpha$  et de rayon  $R_0$  (figure 1.b). On assume que la corde est capable de supporter un effort axial  $N_c$ , un moment de torsion  $C_c$  et un moment de flexion  $M_c$ . Le comportement de la corde est défini par les relations de Shield et Costello ([COS 90], [SHI 94], [SHI 96a], [SHI 96b]) :

$$N_c = A^c E_c [c_1 \varepsilon_{11} + c_2 R \tau]; C_c = E_c R [c_3 \varepsilon_{11} + c_4 R \tau]; M_c = E_c R^4 [c_5 \kappa] \quad (3)$$

$R = R_i + 2R_0$  (figure 1.b) est le rayon de la corde,  $A^c$  est la section de la corde,  $\varepsilon_{11}$  est la déformation axiale,  $\kappa$  est la courbure et  $\tau$  est la déformation de torsion. Les

coefficients  $c_1 - c_5$  sont définis par Shield et Costello. La matrice est considérée homogène, isotrope.

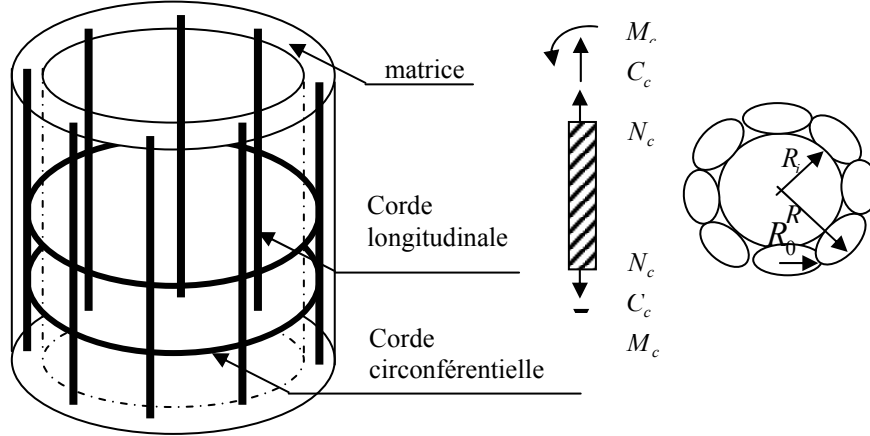


Figure 1.a. Vue générale de la coque renforcée par des cordes

Figure 1.b. Effort et géométrie d'une corde

### 3. Présentation du modèle bidimensionnel

En considérant un volume élémentaire du milieu biphase (corde et matrice) (figure 2.a), et pour une corde appartenant à la couche  $i$ , les forces intérieures sont représentées par le tenseur suivant (écrit au niveau de la surface moyenne de la matrice)

$$\left( \begin{array}{c} \bar{X}^l \\ \bar{M}^l + \bar{X}^l \wedge e^l \bar{x}_3 \end{array} \right)_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} ; \left( \begin{array}{c} \bar{X}^c \\ \bar{M}^c + \bar{X}^c \wedge e^c \bar{x}_3 \end{array} \right)_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (4.a)$$

$e^l$  et  $e^c$  sont respectivement l'excentricité longitudinale et circonférentielle.

Pour construire un modèle bidimensionnel, les cordes sont supposées distribuées sur l'élément de surface avec leurs tenseurs équivalents (voir aussi figure 2.c).

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\bar{X}^l}{d^l} \\ \frac{\bar{M}^l}{d^l} + \frac{\bar{X}^l}{d^l} \wedge e^l \bar{x}_3 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \frac{\bar{X}^c}{d^c} \\ \frac{\bar{M}^c}{d^c} + \frac{\bar{X}^c}{d^c} \wedge e^c \bar{x}_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \bar{\bar{X}}^l \\ \bar{\bar{M}}^l + \bar{\bar{X}}^l \wedge e^l \bar{x}_3 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \bar{\bar{X}}^c \\ \bar{\bar{M}}^c + \bar{\bar{X}}^c \wedge e^c \bar{x}_3 \end{array} \right) \quad (4.b)$$

$d^l$  et  $d^c$  sont respectivement la distance entre les cordes longitudinales et circonférentielles. Pour ce modèle, les caractéristiques de chaque constituant et la disposition géométrique des cordes suffisent pour déterminer le comportement de l'ensemble.

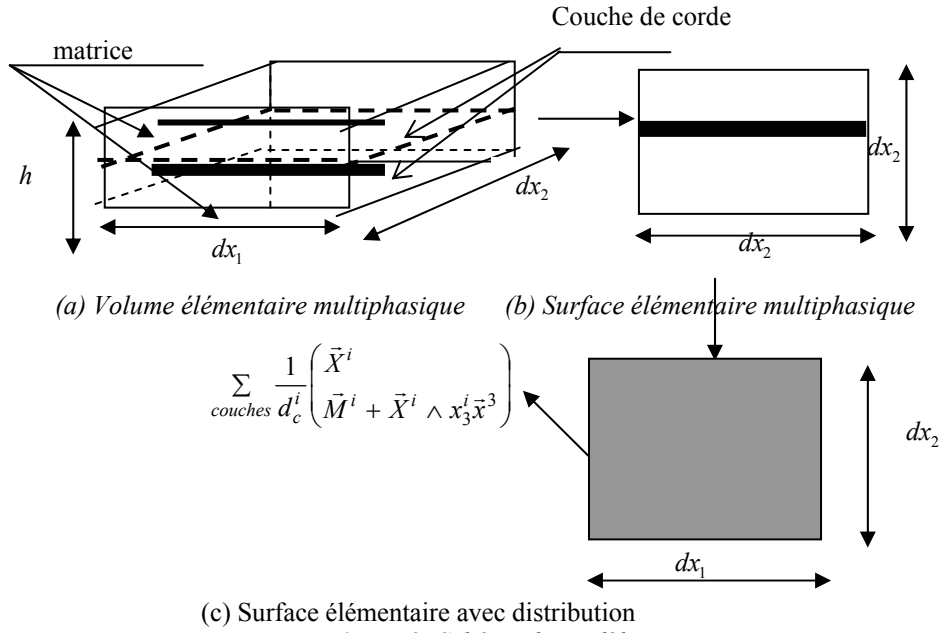


Figure 2. Schéma du modèle.

#### 4. Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre (5) sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels :

$$\begin{cases} \bullet \operatorname{div} N_m - \operatorname{div}(M_m \cdot C) - C \cdot \bar{T} + \operatorname{div} N_r + \bar{F} \omega = \bar{0} \\ \bullet \operatorname{div} M_m - \bar{T}_m + \operatorname{div} M_r + \bar{m}_\omega = \bar{0} \\ \bullet N_m : C + \operatorname{div} \bar{T}_m - (M_m \cdot C) : C + N_r : C + F_3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

( $N_m$ ,  $M_m$ ,  $T_m$ ) sont respectivement le tenseur des efforts normaux, le tenseur des moments et le vecteur des efforts tranchants de la matrice.  $\bar{\nu}$  est un vecteur normal à la ligne frontière et appartenant à la surface moyenne,  $C$  est le tenseur de courbure. Les tenseurs  $N_r$  et  $M_r$  introduisant l'effet des cordes sur la matrice sont définis par :

$$\begin{aligned} N_r &= \bar{x}^1 \otimes \bar{X}^1 + \bar{x}^2 \otimes \bar{X}^c = N^1 \bar{x}^1 \otimes \bar{x}^1 + N^c \bar{x}^2 \otimes \bar{x}^2 \\ M_r &= \left[ \bar{x}^1 \otimes \left( \bar{M}^1 + \bar{X}^1 \wedge e^1 \bar{x}_3 \right) + \bar{x}^2 \otimes \left( \bar{M}^c + \bar{X}^c \wedge e^c \bar{x}_3 \right) \right] \cdot \underline{\mathfrak{R}} \end{aligned} \quad (6)$$

$\bar{F}_\omega$  et  $F^3$  sont respectivement la force tangente et normale à la surface.  $(\bar{F}_\omega)_s$  et  $F_s^3$  sont respectivement la force tangente et normale à la frontière de la surface.  $\bar{m}_\omega$

et  $(\vec{m}_\omega)_s$  sont respectivement le moment porté par le plan tangente à la surface et à la frontière de la surface.

## 5. Application

Soit un cylindre de hauteur  $H$ , de rayon  $R$  (figure 3), appuyé simplement sur le premier cercle frontière et soumise à une pression  $p$  et une charge linéique  $q$  de traction sur le deuxième cercle frontière. La coque cylindrique est renforcée par des cordes longitudinales et circonférentielles. Dans le tableau 1, on compare la solution sans renforcement et avec renforcement (déplacement longitudinal,  $u_1$ , déplacement radial,  $u_3$ , effort normal longitudinal,  $N_{11}$ , et effort normal circonférentiel  $N_{22}$ ).

Dans la littérature, les analyses ont été axées sur l'optimisation et l'étude de l'effet des paramètres suivants: la proportion volumique des cordes, le rapport des modules de Young des cordes et de la matrice et la distance entre les cordes. Les résultats du tableau 1 (coque est membranaire) montrent que le paramètre important combine les trois paramètres cités par la littérature et prend l'expression suivante :

$$\frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d_l} = \frac{E_r^l}{E_m} \frac{A^l}{h_m d^l} (1 - \nu_m^2)$$

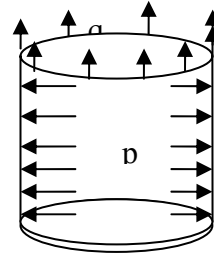


Figure 3. Coque cylindrique renforcée

## 6. Conclusion

Une formulation générale des coques cylindriques renforcées par des cordes a été présentée. Le couplage entre l'extension et la torsion est pris en compte, même pour des positions non symétriques (par rapport à la surface moyenne) des cordes. Cette théorie est différente de celle obtenue par homogénéisation qui ne tient pas compte ni de la disposition en épaisseur, ni du couplage.

### Références

- [AKA 72] T. Akasaka and M. Hirano, Approximate elastic constants of fiber reinforced rubber sheet and its composite laminate. Composite materials and structures Vol. 1, pp 70-76.
- [COS 90] G. A. Costello 1990, Theory of wire rope. Springer-Verlag, New York.
- [GOU 68] V.E. Gough 1968, Stiffness of cord and rubber constructions. Rubber chemistry technology Vol. 41 N°4, pp 988-1021.
- [PAR 00] A.J. Paris and G. A. Costello 2000, Bending of cord composite cylindrical shells. Journal of Applied Mechanics Vol. 67, pp 117-127
- [PID 92] R.V.M. Pidaparti 1992, Modelling and fracture of single play cord-rubber composites. J. of composite materials. Vol. 26 N° 2, pp 152-170.

- [PID 95] R.V.M. Pidaparti 1995, Hierarchical Bending Analysis of Cord-Rubber Composites. AIAA journal. Vol. 33 N° 12, pp 2359
- [SHI 94] C. K. Shield and G. A. Costello 1994, Bending of cord composite plates. Journal of Engineering Mechanics Vol. 120, N°4, pp 876-892
- [SHI 96a] C. K. Shield and G. A. Costello 1996, The effect of wire rope mechanics of the material properties of cord composites: An elastic approach. Journal of Applied Mechanics Vol. 61, pp 1-8.
- [SHI 96b] C. K. Shield and G. A. Costello 1996, The effect of wire rope mechanics of the material properties of cord composites: An energy approach. Journal of Applied Mechanics Vol. 61, pp 9-15.
- [TAN 68] G. Tangaro 1968, Fiber-reinforced, oriented rubber sheets. Proc. Int. Rubber Conf. , Moscou, Russia, pp 459-466.

**Tableau 1.** *Déplacements et efforts intérieurs sans et avec renforcements*

| Solution sans renforcement                            | Solution avec renforcement longitudinal et circonférentiel   |
|---|--|
| $u_1(x^1) = \frac{(-\nu pR + q)x^1}{D_{2m}(1-\nu^2)}$ | $u_1(x^1) = \frac{\left(-\nu pR + q + q \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c}\right)x^1}{D_{2m} \left( (1-\nu^2) + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} + \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \cdot \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right)}$  |
| $u_3(x^1) = \frac{R(-pR + \nu q)}{D_{2m}(1-\nu^2)}$   | $u_3(x^1) = \frac{R \left( -pR + \nu q - pR \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right)}{D_{2m} \left( (1-\nu^2) + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} + \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \cdot \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right)}$  |
| $N_{11}^m(x^1) = q$                                   | $N_{11}^m(x^1) = \frac{q \left( 1 - \nu^2 + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \right) + \nu pR \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l}}{\left( (1-\nu^2) + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} + \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \cdot \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right)}$<br>$N_{11}^r(x^1) = \frac{\frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \left( -\nu pR + q \left( 1 + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \right) \right)}{\left( (1-\nu^2) + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} + \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \cdot \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right)}$ |
| $N_{22}^m(x^1) = pR$                                  | $N_{22}^m(x^1) = \frac{\nu q \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} + pR \left( 1 - \nu^2 + \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right)}{\left( (1-\nu^2) + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} + \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \cdot \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right)}$<br>$N_{22}^r(x^1) = \frac{\frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \left( pR \left( 1 + \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right) - \nu q \right)}{\left( (1-\nu^2) + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} + \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} + \frac{A^c E_r^c}{D_{2m} d^c} \cdot \frac{A^l E_r^l}{D_{2m} d^l} \right)}$  |