



**HAL**  
open science

# Un modèle éléments finis pour le calcul non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes

Foudil Mohri, Nouredine Damil, Michel Potier-Ferry

## ► To cite this version:

Foudil Mohri, Nouredine Damil, Michel Potier-Ferry. Un modèle éléments finis pour le calcul non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813070

**HAL Id: hal-01813070**

**<https://hal.science/hal-01813070>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Un modèle éléments finis pour le calcul non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes

Foudil Mohri <sup>\*,\*\*\*</sup> - Nouredine Damil <sup>\*\*</sup> - Michel Potier-Ferry <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> IUT Nancy-Brabois, UHP, Nancy 1, France < [mohri@iutnb.uhp-nancy.fr](mailto:mohri@iutnb.uhp-nancy.fr) >

<sup>\*\*</sup> Laboratoire de Calcul Scientifique, Université Hassan II, Casablanca, Maroc

<sup>\*\*\*</sup> LPMM, UMR CNRS 7554, ISGMP, Université Paul Verlaine, Metz, France

---

*RESUME* . Un modèle théorique de calcul des poutres à parois minces et à sections ouvertes est développé dans le cas des grandes torsions. Dans le modèle numérique, des éléments poutres 3D à 14 degrés de liberté sont considérés. Au niveau théorique et numérique aucune approximation n'est faite sur l'amplitude de l'angle torsion. Les équations d'équilibre sont non linéaires et toutes couplées en présence de la torsion. Les méthodes itératives sont utilisées dans la solution. Les applications données concernent le comportement non linéaire en torsion et le comportement post-critique sous charges axiales (flambement) ou transversales (déversement).

*ABSTRACT* : A theoretical model for thin-walled beams with open section is investigated in large torsion. This model is extended to finite element method where beam elements with 14 degrees of freedom are considered. Equilibrium equations are non linear and highly coupled. Iterative methods are used in solution procedure. Some applications are reported. They concern torsion response and post buckling behaviour of columns under compressive loads or beams in lateral-buckling behaviour.

*MOTS-CLES* : élément fini, gauchissement, instabilité, section ouverte, torsion non uniforme

*KEYWORDS* : finite element, warping, instability, open section, non uniform torsion

---

## 1. INTRODUCTION

Le comportement des poutres à sections minces et ouvertes est dominé par la torsion et les instabilités. Le modèle de Vlasov développé au premier ordre est couramment adopté dans les calculs théoriques et numériques (éléments finis) [1,2]. Cependant, ces modèles ne permettent pas la prise en compte des phénomènes importants tel que le gauchissement non linéaire, l'effet des pré-déflexions et le comportement post-critique. Des modèles en torsion modérée ont été développés récemment et ont donné des résultats meilleurs tant pour la stabilité que pour le comportement non linéaire [3-6]. Un modèle élément fini pour le calcul non linéaire des treillis spatiaux utilisant le modèle de Vlasov est développé dans [7]. L'ensemble de ces modèles a permis un développement important et une compréhension meilleure et raffinée du comportement des poutres spatiales à sections ouvertes. Cependant, en présence de la torsion, ces modèles sont valables en torsion modérée. Le modèle théorique développé [5] pour les éléments poutres en torsion est étendu aux éléments finis en grande torsion. Dans le développement, aucune approximation n'est faite sur l'angle de torsion. Un élément poutre à sections asymétriques ayant deux nœuds et 14 ddl est utilisé.

## 2. Modèle théorique:

### 2.1 Cinématique

On considère un élément à parois minces et à section ouverte dans un repère 3D (fig. 1a). Les axes  $y$  et  $z$  sont les axes principaux d'inertie. Pour une section, le centre de torsion  $C$  est repéré par ses coordonnées  $(y_c, z_c)$ . Un point  $M$  est défini sur le contour par ses coordonnées  $y, z$  et  $\omega$  où  $\omega$  la coordonnée sectorielle, définit le gauchissement de la section en ce point. Les déplacements  $u_M, v_M,$  et  $w_M$ , du point  $M$  peuvent être exprimés en fonction de ceux du centre de torsion  $C$  (notés  $u, v, w$  et  $\theta_x$ ) par les relations suivantes [5].

$$u_M = u - y\alpha_z - z\alpha_y - \omega\theta_x' ; \quad (1)$$

$$v_M = v - (z - z_c)\sin\theta_x + (y - y_c)(\cos\theta_x - 1) ; \quad (2)$$

$$w_M = w + (y - y_c)\sin\theta_x + (z - z_c)(\cos\theta_x - 1) \quad (3)$$

Les rotations couplées en grande torsion  $\alpha_y$  et  $\alpha_z$  autour des axes  $y$  et  $z$  sont données par:

$$\alpha_y = w' + w'(\cos\theta_x - 1) - v'\sin\theta_x \text{ et } \alpha_z = v' + v'(\cos\theta_x - 1) + w'\sin\theta_x \quad (4,5)$$

Les relations (1-3) sont non linéaires et dépendent de l'approximation donnée aux fonctions  $\cos\theta_x$  et  $\sin\theta_x$ . On rappelle que les relations linéaires utilisées dans le modèle de Vlasov peuvent être déduites facilement de (1-3) en adoptant un calcul au 1<sup>er</sup> ordre.

Le tenseur de Green incluant les grands déplacements est défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (6)$$

En utilisant les relations (1-3), on arrive aux expressions suivantes des composantes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xy}$  et  $\varepsilon_{xz}$  du point M de la poutre :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon - yk_z - zk_y - \omega\theta_x'' + \frac{1}{2}R^2\theta_x'^2 \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}(z - z_c + \frac{\partial\omega}{\partial y})\theta_x' \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(y - y_c - \frac{\partial\omega}{\partial z})\theta_x' \quad (8-9)$$

Dans la composante axiale  $\varepsilon_{xx}$ , on peut remarquer la contribution de l'effet de membrane  $\varepsilon$ , de la flexion autour des axes  $y$  et  $z$  où  $k_y$  et  $k_z$  notent les courbures non linéaires. Le 4<sup>ème</sup> terme est lié au gauchissement. Le dernier terme est souvent omis dans la littérature. Il est responsable du gauchissement non linéaire. Ces termes sont non linéaires dans notre cas et sont définis par :

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) - \psi\theta_x' \quad (10a)$$

$$k_y = w'' + w''(\cos\theta_x - 1) - v''\sin\theta_x \quad (10b)$$

$$k_z = v'' + v''(\cos\theta_x - 1) + w''\sin\theta_x \quad (10c)$$

$$R^2 = (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \quad (10d)$$

$$\psi = y_c\alpha_y - z_c\alpha_z \quad (10e)$$

## 2.2. Equations d'équilibre élastiques

Les équations d'équilibre sont dérivées dans les directions principales d'inertie en utilisant les conditions de stationnarité  $\delta(U - W) = 0$ , où  $U$  note l'énergie de déformation et  $W$  est le travail des forces extérieures. Celles-ci sont limitées à des charges réparties centrées  $q_x, q_y, q_z$  et à un moment de torsion  $m_x$  (fig. 1b). Ci-après la notation matricielle sera adoptée systématiquement. Pour écrire les équations d'équilibre, on introduit dans une première étape les vecteurs suivants :

$$\{F\}^t = \{q_x \quad q_y \quad q_z \quad m_x\} \quad (11a)$$

$$\{q\}^t = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x\} \quad (11b)$$

$$\{S\}^t = \{N \quad M_y \quad M_z \quad M_{sv} \quad B_\omega \quad M_R\} \quad (11c)$$

$$\{\gamma\}^t = \left\{ \varepsilon \quad -k_y \quad -k_z \quad \theta_x' \quad \theta_x'' \quad \frac{1}{2} \theta_x'^2 \right\} \quad (11d)$$

$\{F\}$  et  $\{q\}$  sont les vecteurs forces et déplacements.  $\{\gamma\}$  est le vecteur déformation.  $\{S\}$  est le vecteurs efforts généralisés calculés dans l'état déformé (fig.1c). Ces efforts sont définis par :

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \quad (12a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad M_z = \int_A \sigma_{xx} y dA \quad (12b,c)$$

$$M_{sv} = \int_A \left( \sigma_{xz} (y - y_c - \frac{\partial \omega}{\partial z}) - \sigma_{xy} (z - z_c + \frac{\partial \omega}{\partial y}) \right) dA \quad (12d)$$

$$B_\omega = - \int_A \sigma_{xx} \omega dA \quad M_R = \int_A \sigma_{xx} R^2 dA \quad (12e,f)$$

$N$  est l'effort normal,  $M_y$  et  $M_z$  sont les moments de flexion autour des axes principaux  $y$  et  $z$ ,  $B_\omega$  et  $M_{sv}$  sont le bimoment, le moment de St-Venant. La dernière composante  $M_R$  est responsable du gauchissement non linéaire et joue un rôle important dans la stabilité et le comportement non linéaire. Dans le cas d'une loi de comportement élastique linéaire avec  $E$  et  $G$  les modules d'élasticité longitudinale et transversale, on a:

$$N = \int_A E \varepsilon_{xx} dA = EA \varepsilon + \frac{1}{2} EAI_0 \theta_x'^2 \quad (13a)$$

$$M_y = \int_A E \varepsilon_{xx} z dA = -EI_y (k_y - \beta_z \theta_x'^2) \quad (13b)$$

$$M_z = \int_A E \varepsilon_{xx} y dA = -EI_z (k_z - \beta_y \theta_x'^2) \quad (13c)$$

$$B_{\omega} = \int_A E \varepsilon_{xx} \omega dA = EI_{\omega} (\theta_x'' - \beta_{\omega} \theta_x'^2) \quad (13d)$$

$$M_{sv} = 2 \int_A (G \varepsilon_{xz} (y - y_c - \frac{\partial \omega}{\partial z}) - G \varepsilon_{xy} (z - y_c + \frac{\partial \omega}{\partial y})) dA = GJ \theta_x' \quad (13e)$$

$$M_R = EAI_0 \varepsilon - 2EI_z \beta_y k_z - 2EI_y \beta_z k_y - 2EI_{\omega} \beta_{\omega} \theta_x'' + \frac{1}{2} EI_R \theta_x'^2 \quad (13f)$$

$A$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $I_{\omega}$  et  $J$  notent les caractéristiques géométriques classiques de la section droite, à savoir, l'aire, les moments d'inertie de flexion autour des axes  $y$  et  $z$ , le moment d'inertie de gauchissement et le moment d'inertie de St-Venant.  $I_0$  est le moment d'inertie polaire de la section droite.  $I_R$  est le moment d'inertie de gauchissement non-linéaire.  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  et  $\beta_{\omega}$  sont les coefficients de Wagner. La définition de ces caractéristiques géométriques ainsi qu'une méthode numérique de calcul efficace sont développées dans (Mohri & al, 2001). En notation matricielle, le vecteur contrainte  $\{S\}$  peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \\ M_{sv} \\ B_{\omega} \\ M_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & EAI_0 \\ 0 & EI_y & 0 & 0 & 0 & 2EI_y \beta_z \\ 0 & 0 & EI_z & 0 & 0 & 2I_z \beta_y \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{\omega} & -2EI_{\omega} \beta_{\omega} \\ EAI_0 & 2I_y \beta_z & 2I_z \beta_y & 0 & -2EI_{\omega} \beta_{\omega} & EI_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -k_y \\ -k_z \\ \theta_x' \\ \theta_x'' \\ \frac{1}{2} \theta_x'^2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Après développement, on aboutit aux équations d'équilibre avec une loi de comportement de type élastique linéaire:

$$\int_L \{\delta \gamma\}' \{S\} dx - \lambda \int_L \{\delta q\}' \{F\} dx = 0 \quad \forall \{\delta q\} \quad (15)$$

$$\{S\} = [D] \{\gamma\} \quad (16)$$

$\lambda$  est le facteur de charge.  $[D]$  est la matrice de comportement donnée dans (14). Elle est fonction des constantes élastiques et des caractéristiques géométriques de la section ouverte.

Dans les équations d'équilibre (15) et la loi de comportement (16), un développement supplémentaire est nécessaire afin d'explicitier le vecteur  $\{\gamma\}$  et sa variation  $\{\delta \gamma\}$ . Pour cet effet, on introduit les vecteurs supplémentaires suivants:

$$\{\varphi\}' = \{u' \quad v' \quad w' \quad \theta_x' \quad v'' \quad w'' \quad \theta_x'' \quad \theta_x'\} \quad (17)$$

$$\{\alpha\}' = \{\cos \quad \sin \quad \psi\} \quad (18)$$

avec :

$$\cos = \cos(\theta_x) - 1 \quad (19)$$

$$\sin = \sin(\theta_x) \quad (20)$$

La variable  $\psi$  a été définie dans (10e). En se référant aux relations (10a-c), on peut séparer la contribution des termes linéaires et des termes non linéaires intervenant dans  $\varepsilon$ ,  $k_y$  et  $k_z$ . Les termes non linéaires proviennent des non linéarités de flexion, fonction des composantes du vecteur gradient  $\{\varphi\}$  seulement et des termes de couplages flexion-torsion faisant intervenir les vecteurs  $\{\varphi\}$  et  $\{\alpha\}$ . Le vecteur  $\{\gamma\}$  s'écrit alors :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} u' \\ -w'' \\ -v'' \\ \theta_x' \\ \theta_x'' \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) - \psi\theta_x' \\ -w''\cos + v''\sin \\ -v''\cos - w''\sin \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\theta_x'^2 \end{Bmatrix} \quad (21a)$$

Soit :

$$\{\gamma\} = \{\gamma_l\} + \{\gamma_{nl}\} \quad (21b)$$

où  $\{\gamma_l\}$  et  $\{\gamma_{nl}\}$  notent les parties linéaires et les parties non linéaires du vecteur  $\{\gamma\}$ . Le vecteur  $\{\gamma_{nl}\}$  se décompose à son tour en :

$$\{\gamma_{nl}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\theta_x'^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \psi\theta_x' \\ w''\cos - v''\sin \\ v''\cos + w''\sin \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21c)$$

Soit:

$$\{\gamma_{nl}\} = \{\gamma_{nc}(\varphi)\} - \{\gamma_{ns}(\varphi, \alpha)\} \quad (21d)$$

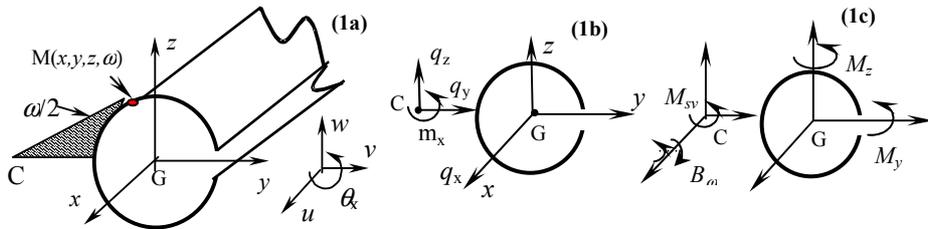
$\{\gamma_{nc}\}$  et  $\{\gamma_{ns}\}$  notent les parties non linéaires quadratiques et non linéaires trigonométriques de  $\{\gamma_{nl}\}$ . Chacun des vecteurs  $\{\gamma_l\}$ ,  $\{\gamma_{nc}\}$  et  $\{\gamma_{ns}\}$  est exprimé ensuite en fonction du vecteur  $\{\varphi\}$ . On aboutit alors :

$$\{\gamma\} = \left( [H] + \frac{1}{2} [A(\varphi)] - [C(\alpha)] \right) \{\varphi\} \quad (21e)$$

La matrice  $[H]$  est une matrice constante. Les autres matrices  $[A(\varphi)]$  et  $[C(\alpha)]$  sont non linéaires et dépendent des composantes des vecteurs  $\{\varphi\}$  et  $\{\alpha\}$ . A partir de (21e), on peut calculer  $\{\delta\gamma\}$ . Les expressions de  $\{\gamma\}$  et  $\{\delta\gamma\}$  sont utilisées dans les équations d'équilibre (15) et la loi de comportement (16) pour obtenir :

$$\begin{cases} \int_L \{\delta\varphi\}^T \left( [H] + [A(\varphi)] - [C(\alpha)] - [\hat{C}(\alpha, \varphi)] \right) \{S\} dx - \lambda \int_L \{\delta q\}^T \{F\} dx = 0 \quad \forall \{\delta q\} \\ \{S\} = [D] \left( [H] + \frac{1}{2} [A(\varphi)] - [C(\alpha)] \right) \{\varphi\} \end{cases} \quad (22-23)$$

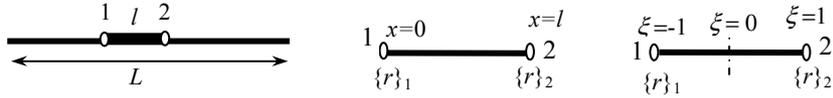
Le système (22-23) a été dérivé sans considération de l'amplitude de l'angle de torsion. Les fonctions trigonométriques *cos* et *sin* sont considérées dans le modèle sans aucune approximation. Des relations cinématiques couplées et fortement non linéaires ont été obtenues. A notre connaissance, cette formulation n'a jamais été considérée dans la littérature et constitue une contribution originale à la théorie des poutres à parois minces. Dans ce qui suit, un modèle poutre par éléments finis est présenté dans les mêmes conditions.



**Figure 1** : poutre à section ouverte : cinématique (1a), charges (1b), efforts (c)

### 3. Modèle numérique

Une poutre à section ouverte de longueur  $L$  est divisée en plusieurs éléments finis poutre de longueur  $l$  (fig.2). Un élément poutre à deux nœuds et 7 degrés de liberté par nœud ( $\{r\}_i^t = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad v' \quad w' \quad \theta_x'\}_{i=1,2}$ ) est utilisé pour la discrétisation des déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $\theta_x$ . Au niveau élémentaire, deux références sont utilisées. La première utilise la coordonnée naturelle  $x$ , a son origine au nœud 1 ( $0 \leq x \leq l$ ). La deuxième utilise la coordonnée de référence  $\xi$  ayant pour origine le centre de l'élément ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ). Des fonctions de forme linéaires utilisant la coordonnée  $\xi$  sont choisies pour le déplacement axial  $u$ . Les fonctions cubiques d'Hermite sont adoptées pour les autres composantes  $v$ ,  $w$  et  $\theta_x$ . Leurs expressions sont données dans [8].



**Figure 2** : élément poutre et définition de la coordonnée naturelle  $x$  et de référence  $\xi$

Ci-après, les équations d'équilibre et la loi de comportement sont d'abord dérivées au niveau élémentaire, la matrice tangente est ensuite obtenue par assemblage. Au niveau élémentaire, en notant les déplacements nodaux  $\{r\}_e^t = \{\{r\}_1 \quad \{r\}_2\}$ , on arrive aux relations suivantes liant  $\{q\}$ ,  $\{q\}$  et leur variation à  $\{r\}_e$  et  $\{\delta r\}_e$  :

$$\{q\} = [N] \{r\}_e \quad \{\varphi\} = [G] \{r\}_e \quad (24a,b)$$

$$\{\delta q\} = [N] \{\delta r\}_e \quad \{\delta \varphi\} = [G] \{\delta r\}_e \quad (24c,d)$$

En appliquant ces relations aux équations d'équilibre et la loi de comportement obtenues dans le système (22-23) et après assemblage sur les éléments, on arrive à :

$$\begin{cases} \sum_e \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \{\delta r\}^t [B(\alpha, \varphi)]^t \{S\} d\xi - \lambda \sum_e \int_{-1}^1 \{\delta r\}^t \{f\} d\xi = 0 & \forall \{\delta r\} \\ \{S\} = [D] [BS(\alpha, \varphi)] \{r\} \end{cases} \quad (25-26)$$

$$\text{où:} \quad [B(\alpha, \varphi)] = [B_l] + [B_{nl}(\varphi)] - [B_{nl}^\alpha(\alpha)] - \left[ \hat{B}_{nl}^\alpha(\alpha, \varphi) \right] \quad (27a)$$

$$\text{et} \quad [BS(\alpha, \varphi)] = [B_l] + \frac{1}{2} [B_{nl}(\varphi)] - [B_{nl}^\alpha(\alpha)] \quad (27b)$$

Ces matrices sont telles que :

$$[B_l] = [H] [G] \quad [B_{nl}(\varphi)] = [A(\varphi)] [G] \quad (28a,b)$$

$$[B_{nl}^\alpha(\alpha)] = [C(\alpha)] [G] \quad [\hat{B}_{nl}^\alpha(\alpha, \varphi)] = [\hat{C}(\varphi)] [G] \quad (28c,d)$$

Les équations d'équilibre sont toutes non linéaires et fortement couplées. Les méthodes itératives sont adoptées. Pour la solution, on pose comme inconnues du problème général le vecteur :  $\{U, \lambda\}^t = \{r\} \{s\} \{\alpha\} \lambda$ . En partant d'un point initial connu  $\{\{U_0\}, \lambda_0\}^t$ , le vecteur solution en un point voisin  $\{\{U_1\}, \lambda_1\}^t$  est obtenu par une procédure de prédiction correction avec un paramètre de contrôle. La matrice tangente du problème est obtenue. On arrive à la forme compacte suivante au niveau élémentaire du résidu:

$$\{R_1\}^e = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 [B(\alpha, r)_0]^t [D] [B(\alpha, r)_0] \{r_1\} d\xi + \frac{l}{2} \int_{-1}^1 [G]^t [S(\alpha, r)_0] [G] \{r_1\} d\xi - \lambda_1 \{f\} \quad (29)$$

$[B(\alpha, r)_0]$  est la matrice géométriques incluant les grands déplacements et le couplage flexion et grande torsion. La matrice  $[S(\alpha, r)_0]$  inclut les contraintes initiales et tient compte des grandes torsions. Elles sont calculées au point initial. La matrice tangente est assemblée à partir des matrices élémentaires. Elle est calculée par intégration numérique sur les points de Gauss et stockée en ligne de ciel. Elle est donnée par :

$$[K_t] = \sum_e \frac{l}{2} \int_{-1}^1 [B(\alpha, r)_0]^t [D] [B(\alpha, r)_0] d\xi + \sum_e \frac{l}{2} \int_{-1}^1 [G]^t [S(\alpha, r)_0] [G] d\xi \quad (30)$$

#### 4. Applications

Ci-après les résultats de notre modèle sont nommés B3Dw. Dans un premier temps, on étudie le comportement non linéaire en torsion d'une console. La stabilité des poutres sous charges axiales avec flambement est ensuite discuté. A la fin, la stabilité non linéaire des poutres sous charges transversales avec le phénomène déversement est présentée.

##### 4.1 Comportement en torsion d'une poutre à section ouverte

La torsion dans les poutres à sections ouverte est non uniforme à cause de la présence du gauchissement. En appliquant le modèle de Vlasov, on arrive à une solution linéaire pour l'angle de torsion en fonction du moment. En torsion non linéaire, le comportement de la poutre à parois minces est fortement influencé par le gauchissement non linéaire du à la présence d'un terme cubique. L'équation d'équilibre s'écrit:

$$EI_{\omega} \theta_x^{(4)} - GJ \theta_x'' - \frac{3}{2} EI_t \theta_x'^2 \theta_x'' = m_x \quad \text{où } I_t = I_R - AI_0^2 \quad (31)$$

Ascione & al [3] ont étudié le comportement en torsion d'une poutre en aluminium à section en I bi-symétrique (figure 3a) Des dimensions impériales ont été utilisées pour cette étude avec :  $b=2.0$ ;  $h=2.5$ ;  $t_f = t_w = 0.125$  in (1 in = 25.4 mm).

La figure 3b montre la variation de l'angle de torsion à l'extrémité libre en fonction du moment adimensionnel. Le modèle de Vlasov est représenté par la courbe linéaire. En petite torsion, les courbes de réponse sont les mêmes. En grande torsion, la courbe de réponse est non linéaire due à la présence du gauchissement non linéaire [5]. En petite torsion, la courbe de Vlasov est tangente à notre courbe au point A. Par contre, elle est sécante à la courbe d'Ascione en deux points A et B.

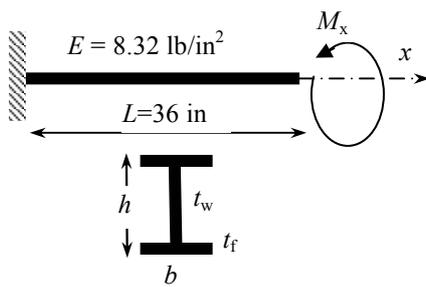


Fig.3a : torsion d'une poutre en I

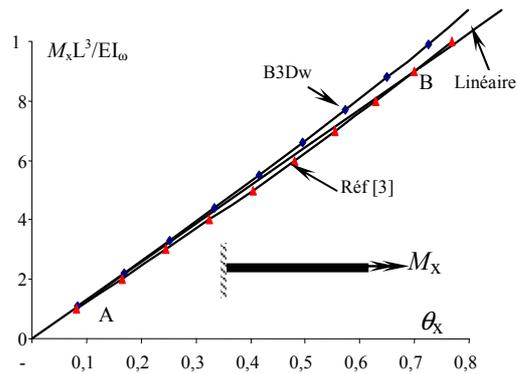


Fig.3b : courbe de réponse en torsion de l'extrémité libre.

## 4.2 Comportement post-critique sous charge axiale

Le 2<sup>ème</sup> exemple concerne le flambage élastique d'une poutre en Croix sollicitée en compression. Cette section a été étudiée par Battini & al [9]. Les caractéristiques dimensionnelles et élastiques de la poutre sont données en fig. 4a. Les caractéristiques géométriques utilisées dans les calculs sont:

$$A = 12.8 \text{ cm}^2; I_y = 136.62; I_z = 136.62; J = 0.683 \text{ cm}^4; I_\omega = 3.641; I_R = 10493 \text{ cm}^6$$

La première charge critique est en torsion pure. Dans [9], la charge critique de flambage parfaite en torsion pure est 272,57 kN (Solution par valeurs propres). Nous trouvons par un calcul non linéaire avec imperfection en torsion  $m_x = 10^{-4}$ , une charge de bifurcation égale à 266 kN. Les courbes de réponse  $(P, \theta_x)$  obtenues sont identiques (fig.4).

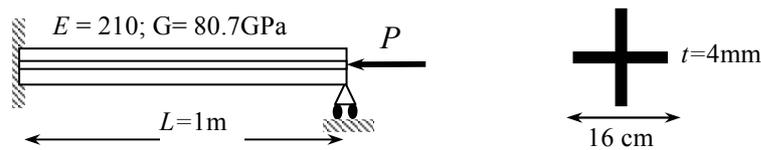


Fig.4a: Dimensions de la poutre

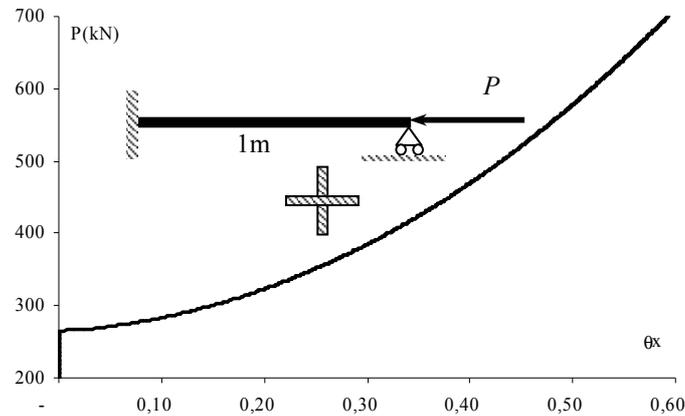


Fig.4b: comportement post-critique de la poutre en croix en compression

### 4-3 Comportement post-critique d'une poutre sous charges latérales

Le dernier exemple concerne le comportement post-critique de poutres sous charges latérales provoquant l'instabilité de la poutre en flexion torsion couramment appelée déversement. Des solutions analytiques pour le calcul des charges critiques de déversement existent. La plupart sont dérivées de la stabilité linéaire. Cependant, ces solutions sont valables pour les sections en I à semelles courtes pour lesquelles les déformations pré-critiques sont négligeables et les moments d'inertie de flexion sont tels que ( $I_z \ll I_y$ ). Nous avons aussi développé récemment des solutions analytiques à partir de la stabilité non linéaire. Ces solutions tiennent en compte du point d'application des charges par rapport au centre de torsion et de l'effet des déformations pré-critiques représentées par le rapport  $I_z/I_y$ . Dans cas d'une poutre simplement appuyée en flexion et en torsion, l'expression générale de la charge critique de déversement (ou moment critique de déversement) est donnée par la relation compacte suivante pour une section en I bi-symétrique (fig.5):

$$M_b = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ (C_2 e_z) \pm \sqrt{(C_2 e_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega}\right)} \right] \quad (32)$$

Les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  dépendent du cas de charge appliqué à la poutre. Par exemple, dans le cas d'une poutre sollicitée par une charge concentrée appliquée à mi travée, la relation entre le moment critique  $M_b$  et la charge  $Q_z$  ainsi que les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  sont:

$$M_b = Q_z \frac{L}{4}; \quad C_1 = \frac{1.36}{\sqrt{k_1}}; \quad C_2 = \frac{0.55}{\sqrt{k_1}}; \quad \text{où } k_1 = 1 - \frac{I_z}{I_y} \quad (33a,d)$$

Avec la stabilité linéaire, la même solution analytique est trouvée, mais les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  sont constants et indépendants du rapport  $I_z/I_y$ , respectivement  $C_1 = 1.36$  et  $C_2 = 0.55$ . La différence entre la stabilité linéaire et non linéaire est donc d'autant plus importante que le rapport  $I_z/I_y$  est grand.

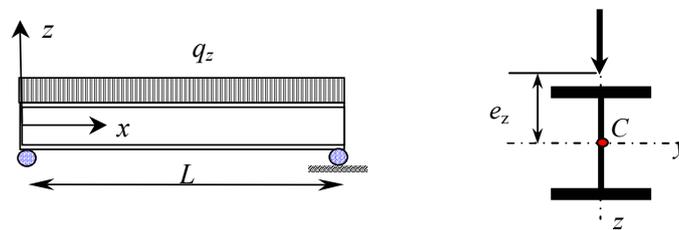


Fig.5: Poutre à section bi-symétrique sous charges latérales

Pour cette étude, on présente à la figure 6, les dimensions de la poutre étudiée. La section est un profilé en acier standard appelé HEA200. Les caractéristiques géométriques utilisées dans les calculs sont:

$$A = 51,7 \text{ cm}^2; I_y = 3556; I_z = 1333; J = 15 \text{ cm}^4; I_\omega = 108 \cdot 10^3; I_t = 574 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$$

La poutre est sollicitée par une charge concentrée appliquée à mi-travée. La figure 7a présente la réponse en torsion d'une poutre en acier HEA 200 sollicitée par une charge concentrée au milieu. La flèche transversale  $v$  est donnée dans la figure 7b et comparée aux résultats du modèle coque d'Abaqus. On remarque un bon entre les deux modèles. Ces déplacements ( $\theta_x$  et  $v$ ) sont présents seulement dans le domaine post-critique. L'état déformé de la poutre dans le domaine post-critique est représenté dans la figure 8, à partir du modèle coque.

Pour la section étudiée, le rapport  $I_z/I_y$  est de l'ordre de 0.38. La bifurcation est observée pour une valeur de la charge égale à 136 kN. Cette valeur correspond exactement à la charge critique prévue par la stabilité non linéaire. Les calculs par la stabilité linéaire ou valeurs propres donnent une charge critique proche de 107 kN, valeur nettement inférieure par rapport à la valeur observée numériquement. Cet exemple montre les limites des solutions développées à partir de la stabilité linéaire pour les sections à rapport  $I_z/I_y$  élevé (supérieur à 0.15).

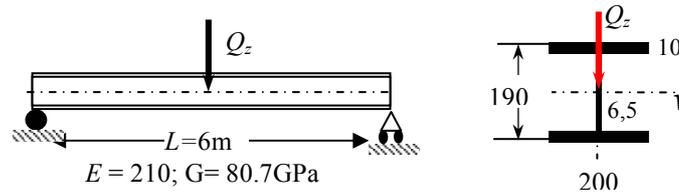


Figure 6: dimensions de la poutre HEA200 (dimensions en mm)

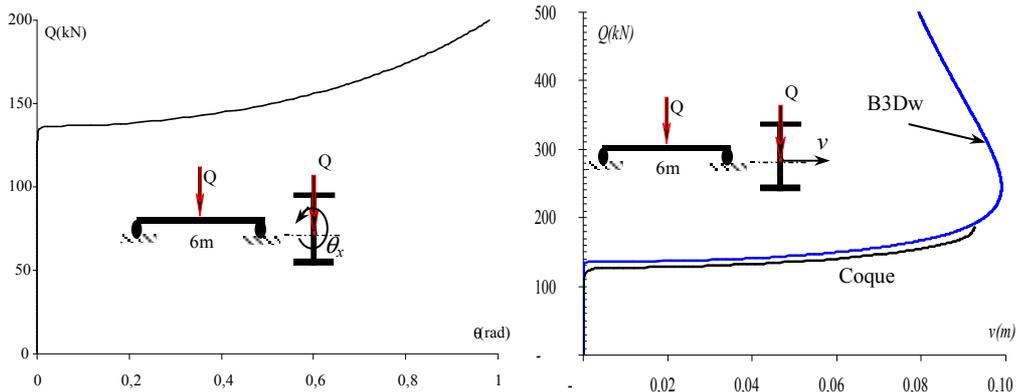


fig.7a : réponse en torsion

fig.7b: déplacement transversal  $v$

Figure 7: comportement post-critique d'une poutre en I en présence du déversement

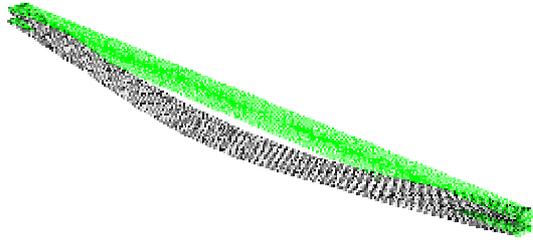


Fig.8 : Etat initial et déformé de la poutre après déversement (modèle coque)

### Conclusions

Un modèle théorique et numérique pour le calcul des poutres à parois minces et à sections ouvertes en grandes torsion a été présenté. Les équations d'équilibre ont été établies sans aucune approximation sur l'angle de torsion. Le couplage flexion-torsion est pris en compte. Le modèle numérique utilise des poutres 3D à 7 ddl par nœud. La matrice de rigidité tangente a été calculée avec l'hypothèse des grandes torsions. Les exemples présentés ont permis de valider le modèle et apportent une compréhension plus raffinée de ces structures à priori simples mais à comportement fort complexe.

### Bibliographie

- 1- Bazant, Z. P, El Nimeiri M (1973) Large-deflection spatial buckling of thin walled beams and frames, *Journal of Engineering Mechanics Division*, 99, 1259-1281.
- 2-Laudiero F, Zaccaria D (1988) A consistent approach to linear stability of thin-walled beams of open section, *International Journal of Mechanical Science*, 30, 503-315.
- 3-Ascione L, Feo L (2001) On the non-linear statical behaviour of thin-walled elements beams of open cross- sections. A numerical approach. *International Journal Computational Engineering Science.*, 2, 513-536.
- 4- Ronagh H.R, Bradford M.A, Attard M.M (2000) Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section, Part I: Theory. *Computers and Structures*, (77), 285-299.
- 5- Mohri F, Azrar L and Potier-Ferry M (2001). Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections. *Thin-Walled Structures* 39, 907-938
- 6- Mohri F, Azrar L and Potier-Ferry M (2002) , 40, 1013-1036. Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams. *Thin-Walled Structures*
- 7- Shakourzadeh, H, Guo YQ, Batoz JL, Pensirini P. (1993) Modélisation du comportement non linéaire des structures formées de poutres 3D, *Colloque national de calcul des structures, Giens 93* ,72-81
- 8- Batoz JL, Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis*. Vol.2, Hermes 1990
- 9- Battini J.M, Pacoste C (2002) Co-rotational beam elements with warping effects in instabilities problems. *Computer methods in applied mechanics*, 191, 1755-1789.