

Comportement vibratoire des arbres de transmission composites surcritiques: Étude théorique, expérimentale et dimensionnement

Olivier Montagnier, Christian Hochard

► To cite this version:

Olivier Montagnier, Christian Hochard. Comportement vibratoire des arbres de transmission composites surcritiques: Étude théorique, expérimentale et dimensionnement. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813069

HAL Id: hal-01813069 https://hal.science/hal-01813069

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Comportement vibratoire des arbres de transmission composites surcritiques

Etude théorique, expérimentale et dimensionnement

Olivier Montagnier[→]— Christian Hochard^{*}

*Centre de Recherche de l'Ecole de l'Air Laboratoire de Dynamique du Vol BA 701 13361 Salon Air *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique 31 chemin Joseph Aiguier 13402 Marseille Cedex 20 e-mail : <u>oliviermontagnier@yahoo.fr</u>

RÉSUMÉ. Ce travail traite du dimensionnement d'arbres de transmission surcritiques composites. Ces systèmes doivent être conçus de manière à minimiser les effets dynamiques dus à la rotation. Nous présentons l'étude dynamique d'un arbre monté sur suspensions viscoélastiques. Nous proposons des solutions analytiques pour le mouvement forcé, le mouvement libre et l'instabilité. Cette étude fait apparaître un critère de stabilité qui met en évidence l'effet déstabilisant de l'amortissement tournant et le gain de stabilité donné par les supports viscoélastiques sous certaines conditions. Enfin,nous présentons une comparaison de deux fibres de carbone (haut module/ haute résistance) sur un exemple de transmission surcritique.

ABSTRACT. This work relates to the dynamic of supercritical composite drive shafts. These structures must be sizing to minimize the dynamic effects due to the rotation. We presented here a dynamic analysis of a drive shaft mounted on viscoelastics supports. We proposed analytical solutions for the mass unbalance motion, for the free motion and for the instability. This study shows an instability criterion that demonstrates the destabilizing effect of the internal (or rotational) damping and the positive effect of viscoelastic support under special conditions. Finally, we present a comparison of two carbon fibers (high modulus/high resistance) for a supercritical drive shaft example.

MOTS-CLÉS : arbre de transmission ; surcritique ; instabilité ; amortissement ; fibres de carbone.

KEYWORDS: drive shafts ; supercritical ; instability ; damping ; carbon fibers.

2 7^{ème} Colloque national en calcul des structures, 17-20 Mai 2005, Giens

1. Introduction

Ce travail traite du dimensionnement d'arbres de transmission surcritiques en matériau composite, c'est à dire des arbres dont la vitesse nominale est supérieure à la première fréquence propre. Les arbres de transmission surcritiques encore peu utilisés doivent être conçus de manière à transmettre le couple et à minimiser les effets dynamiques dus à la rotation. Nous présentons l'étude dynamique d'un tube monté sur paliers à supports viscoélastiques permettant d'introduire l'amortissement nécessaire au passage des modes. L'étude du mouvement transitoire fait apparaître un critère qui met en évidence l'effet déstabilisant de l'amortissement tournant. Le modèle est validé par des essais surcritiques. Enfin, sur un exemple, nous présentons une comparaison entre les fibres de carbone haut module et haute résistance pour une transmission surcritique.

2. Un modèle d'arbre continu sur supports viscoélastiques

2.1. Modèle et équations d'équilibre



Figure 1. Tube composite élastique sur des paliers à suspensions viscoélastiques.

Nous considérons un arbre élastique continu appuyé/appuyé (figure 1) et amortissant (amortissement interne visqueux noté c_i). Les éléments viscoélastiques, parfaitement symétriques, sont représentés par une rigidité k et un amortissement externe visqueux (noté c_e). Le module homogénéisé de l'arbre en flexion est noté Eet G en cisaillement. Une section d'arbre est définie par sa surface notée S et son moment d'inertie en flexion par rapport à <u>x</u> noté I. Les paliers sont supposés rigides et de masse m_p . L'effet gyroscopique des sections de l'arbre est pris en compte. Le défaut d'excentricité du tube est défini par la fonction ε de z. Le déplacement de corps rigide (axe non déformé du tube) est composé d'un déplacement et d'une rotation autour de C₁₀ (centre du tube non déformé) notés respectivement u_s et θ_s dans le plan complexe (<u>x</u>,<u>y</u>). Nous supposons que les éléments viscoélastiques restent dans le plan (O₀, <u>x</u>, <u>y</u>). Le déplacement des centres de section du tube C par rapport à l'axe non déformé est noté u_t dans le plan complexe (<u>x</u>,<u>y</u>). L'équation locale du mouvement de l'arbre sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli s'écrivent alors : Comportement vibratoire des arbres de transmission surcritiques 3

$$\ddot{u} - \frac{I}{S}\ddot{u}'' + i\Omega \frac{J}{S}\dot{u}'' + \frac{EI}{\rho S}u_t''' + \frac{c_i}{\rho S}(\dot{u}_t - i\Omega u_t) = \mathcal{E}(z)\Omega^2 e^{i\Omega t} \quad \forall z \in [0, t] \quad [1]$$

$$\ddot{u}_s + \frac{c_e}{m_p} \dot{u}_s + \frac{k}{m_p} u_s = -\frac{1}{2m_p} \int_0^l \rho S \left[\ddot{u} - \varepsilon \Omega^2 e^{i\Omega t} \right] dz \quad [2]$$

$$\ddot{\theta}_s + \frac{c_e}{m_p} \dot{\theta}_s + \frac{k}{m_p} \theta_s = -\frac{1}{m_p} \int_0^l \rho S \frac{l-2z}{l^2} \left[\ddot{u} - \varepsilon \Omega^2 e^{i\Omega t} \right] dz \quad [3]$$

avec: $f'=\partial f/\partial z$, $\dot{f}=\partial f/\partial t$, $u(z,t)=u_s(t)+\frac{l-2z}{2}\theta_s(t)+u_t(z,t)$, et dans le cas d'un tube de rayon extérieur R_e et de rayon intérieur $R_i I=\frac{\pi}{4}(R_e^4-R_i^4)$ et J=2I.

2.2. Mouvement transitoire

Le régime transitoire permet d'étudier l'effet du couplage arbre/supports sur les pulsations propres et l'instabilité du système à haute vitesse. Pour cette étude, nous prenons des solutions compatibles en déplacement pour tout n sous la forme

$$u(z,t) = \left[U_{sn} + \frac{1-2z}{2} \Theta_{sn} + U_{tn} \sin(\frac{\pi n}{l}z) \right] e^{i\lambda_n t} \quad [4]$$

Après calculs, le système [1]-[3] s'écrit sous la forme d'une équation caractéristique d'ordre 4 en λ_n . En écrivant les solutions sous une forme partie réelle (terme de pulsation propre) et partie imaginaire (terme d'amortissement). La résolution de l'équation caractéristique est simplifiée. Si nous écrivons la partie réelle de l'équation caractéristique au premier ordre en négligeant l'effet gyroscopique, nous trouvons les pulsations du système couplé

$$\omega_{nk} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\Psi_n}} \sqrt{\Omega_n^2 + \Pi_n \omega_{0n}^2 \pm \sqrt{\Omega_n^4 + 2(\Pi_n - 2\Psi_n)\Omega_n^2 \omega_{0n}^2 + \Pi_{nk}^2 \omega_{0n}^4}} \quad k \in \{1, ...4\} [5]$$

avec $\Omega_n^2 = \frac{EI}{\rho S} (\frac{\pi n}{l})^4, \ \omega_{0n}^2 = \frac{k}{m_p + \frac{m_a}{2(2+(-1)^n)}}, \ \Psi_n = \frac{4}{n^2 \pi^2} \frac{m_a}{(m_p + \frac{m_a}{2(2+(-1)^n)})}, \ \Pi_n = 1 + \frac{I}{S} (\frac{\pi n}{l})^2.$

La partie imaginaire de l'équation caractéristique au premier ordre, donne l'amortissement en fonction de Ω . Nous montrons alors que le système devient instable pour une vitesse de rotation supérieure à

$$\Omega_{\lim_{n \to \infty} nk} = \omega_{nk} \left(1 + \frac{A_{en}}{A_{in}} \frac{(\Pi_n + \Gamma_n)\omega_{nk}^2 - \Omega_n^2}{(1 + \frac{A_{en}}{A_n} \Gamma_n)\omega_{nk}^2 - \omega_{0n}^2} \right) \quad \forall n \text{ et } k \in \{3; 4\} [6]$$

avec
$$A_{in} = \frac{c_i}{\rho S} = 2\xi_i \Omega_n$$
, $A_{en} = \frac{c_e}{m_p + \frac{m_a}{2(2+(-1)^a)}} = 2\xi_e \omega_{0n}$, $\Gamma_n = \frac{J}{S} (\frac{\pi n}{l})^2$.

4 7^{ème} Colloque national en calcul des structures, 17-20 Mai 2005, Giens

Nous remarquons que l'amortissement externe a un effet stabilisant alors que l'amortissement interne a un effet déstabilisant. Un critère simplifié montrant cet effet est présenté dans (Tondl, 1965). D'autre part, nous traitons le comportement transitoire (amplitude au passage des modes) et l'instabilité par une méthode de Newmark sur les équations globales (calcul sur la base de l'approximation harmonique). Enfin, le mouvement stationnaire est traité dans (Montagnier *et al.*, 2005).

3. Essais transitoires et surcritiques

Le comportement stationnaire, transitoire et la stabilité sont étudiés expérimentalement sur une machine d'essai de tubes à haute vitesse de rotation sur supports viscoélastiques (figure 2 (a),(b)). Les mouvements du centre d'une section du tube sont mesurés par deux capteurs lasers sans contact (figure 2 (c)). Ces lasers peuvent se déplacer le long de l'axe du tube pendant la phase de fonctionnement du banc. Des essais sont réalisés sur un tube en aluminium de 1640mm de long, de 50mm de diamètre et de 2mm d'épaisseur (figure 2 (a)). La figure 3 montre une comparaison entre l'expérience et le calcul numérique pour le passage du premier mode du tube. Les figures représentent la position du centre du tube (z=820mm) à chaque instant dans le plan (x,y), cette position étant décrit temporellement selon le troisième axe de la figure. Le tube suit une loi linéaire de monté en régime durant 2.5s jusqu'à la fréquence de rotation de 50Hz suivie d'un palier durant 5.5s. Ces figures montrent une bonne corrélation : mouvement très stable avant le mode et fortement perturbé après le passage du mode. Toutefois l'expérience montre un comportement non symétrique qui n'est pas rendu par le modèle axisymétrique.



Figure 2. Banc d'essais (a), palier/élastomères (b) et capteurs lasers (c).

L'étude de l'instabilité est réalisée à partir de tubes en pvc. Ce matériau à l'avantage d'être peu rigide et amortissement ce qui va dans le sens de l'instabilité décrite par le critère [6]. Les premiers essais réalisés montre l'existence d'une zone de stabilité et corrèle les prévisions théoriques (figure 4) (Montagnier *et al.*, 2005). La figure 5 présente une instabilité visualisée expérimentalement.

Comportement vibratoire des arbres de transmission surcritiques 5



Figure 3. Passage du 1^{er} mode du tube : expérimental (a) et théorique (b).



Figure 4. *Zone d'instabilité et modes du système couplé en fonction de la longueur du tube (théorique et expérimental).*

4. Etude d'un exemple : comparaison des fibres haut module/ haute résistance

Nous nous intéressons au dimensionnement d'un arbre surcritique en matériau composite carbone/époxy. Ce dimensionnement concerne deux points : la résistance et la dynamique. En terme de résistance, si nous faisons l'abstraction du dimensionnement des extrémités de l'arbre, deux points doivent être traités : la résistance matériau et le flambage en torsion. La résistance du matériau composite en torsion est calculée par le critère classique de Tsai-Wu. Le calcul

7^{ème} Colloque national en calcul des structures, 17-20 Mai 2005, Giens 6



Figure 5. Instabilité à l'approche du premier mode du tube pvc de 1m à 29Hz.

du couple limite de A flambage en torsion est réalisé par la résolution des équations de Flügge (Flügge, 1973) associée à la théorie des stratifiés pour l'hypothèse des tubes infiniment longs. Pour la partie dynamique, nous nous intéressons au calcul des modes couplés, au calcul de la vitesse d'instabilité et pour une rampe en vitesse nous déterminons l'amplitude au passage du mode et l'amplitude nominale.

L'étude est réalisée en partant d'une longueur d'arbre, d'une épaisseur et d'un diamètre donnés (L=4m, e=2.5mm, D=60mm), d'un couple à transmettre de 1500N.m et d'une fréquence nominale de 70Hz (montée en vitesse de 0 à 70Hz en 10s). La masse du palier m_p est égale à 3kg, le défaut de concentricité ε égal à 0.1mm et l'amortissement des élastomères ξ_e égal à 3,5%. D'autre part, nous avons montré que le couplage dynamique était optimal si la fréquence propre des paliers était égale à la fréquence propre de l'arbre (Montagnier et al., 2005). Aussi nous choisissons la rigidité des paliers k de manière à vérifier cette propriété. Les deux matériaux carbone/époxy unidirectionnels comparés sont le T800/G947 (fibres à haute résistance) et le K63712/M10 (fibres à haut module) (tableau 1). Le calcul de l'amortissement interne des tubes composites est réalisé à partir l'approche en énergie de déformation de Ni et Adams (Ni et al., 1984). L'amortissement dans les directions longitudinale, transverse et en cisaillement est pris égal à 0,11%, 0,70% et 1,10%.

Matériau	d	E_t	E_l	G_{lt}	V_{lt}	X	X'	Y	Y'	S	h
		GPa	GPa	GPa		Mpa	MPa	MPa	MPa	MPa	mm
K63712	1.70	370	5.4	4.0	0.3	1500	470	35	200	75	0.25
T300	1.56	162	10	5	0.3	2940	1570	60	290	100	0.25
Tablean 1 Donnáes matériaux (Vf-06)											

au. 1. Données matériaux (Vf

Nous trouvons plusieurs solutions pour les deux matériaux (tableau 2). Toutes ces solutions sont surcritiques, et par conséquent, doivent passer le premier mode de l'arbre et les modes des supports. En général, le critère de Tsai-Wu a été

Comportement vibratoire des arbres de transmission surcritiques 7

dimensionnant devant le flambage. Cette caractéristique est due à l'épaisseur relativement importante du composite. Nous distinguons principalement deux types de stratifiés. Les stratifiés constitués de plis à ±15° (N°1 et 5) et les autres constitués de plis à 0°, $\pm 45^{\circ}$ et 90°. L'orientation à $\pm 15^{\circ}$ permet à la fois, la tenue en résistance et la rigidité nécessaire en dynamique et en flambage. Notons que ces solutions sont particulièrement amortissantes ce qui est négatif pour la stabilité. En effet, la flexion de ces tubes cisaille la résine qui on le sait est la principale source d'amortissement. Cet amortissement pourrait être bloqué par un pli à 90°. Pour le second type de stratifié, nous constatons plusieurs points importants. Le premier point concerne la résistance. La résistance en torsion est principalement régie par le ±45° (résultat classique). D'autre part, nous avons fait l'hypothèse que l'arbre travaillait essentiellement en torsion positive. Aussi, l'optimisation doit prendre en compte la différence entre la résistance en traction et en compression des fibres. Cela signifie que la solution doit être constituée de deux à trois fois plus de plis à -45° qu'à 45° (N°2, 3, 4). Le second point concerne la rigidité axiale. Cette rigidité est principalement donnée par les plis à 0°, il est donc nécessaire de maximiser ce nombre de plis pour le problème dynamique et pour minimiser l'amortissement. Le troisième point concerne la tenue au flambage. La résistance au flambage fait intervenir l'ensemble des plis et donc leur rigidité. Cependant, la comparaison des solutions 2 et 4 montre qu'un pli à 90° permet de doubler le couple limite de flambage. En effet, les déformations circonférentielles jouent un rôle primordial dans ce problème. La rigidité dans cette direction est donc essentielle.

		1	2	3	4	5	6
Matériau		k63712	k63712	k63712	k63712	T800	T800
Stratifié		[-15,15] _{5s}	$[0, 90, 45, -45, 0_3, -45_2, 45]_s$	$\begin{matrix} [0, 90, 45, \\ -45, 0_3, \\ -45_2, 30]_s \end{matrix}$	$[0_2, 45, -45, 0_3, -45_2, 45]_s$	[-15,15] _{5s}	[0, 90, 45, -45, 0 ₆] _s
E_{hom}	GPa	248	174	186	194	130	122
ξί	%	0,27	0,13	0,127	0,14	0,17	0,12
$C_{Tsai-Wu}$	N.m	1525	1558	1504	1617	2601	1653
C_{Flugge}	N.m	2879	10560	10588	6417	2974	5302
f_{13}	hz	19,5	16,4	16,9	17,3	14,8	14,4
f_{14}	hz	35,0	29,3	30,3	30,9	26,0	25,2
f_{23}	hz	26,2	22,0	22,7	23,2	19,7	19,0
f_{24}	hz	101,4	84,9	87,8	89,7	76,3	74,0
$f_{lim_{24}}$	hz	138,2	148,6	155,2	152,2	116,7	129,2
U_{max}	mm	1,26	1,13	1,15	1,17	1,05	1,03
U_{nom}	mm	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13

Tableau. 2. Comparaison des solutions.

Pour le problème dynamique, nous nous intéressons à l'amplitude de la première harmonique au passage du mode 14 et à la vitesse nominale, et à la stabilité. Les

solutions que nous avons sélectionné sont toutes parfaitement stables à la vitesse nominale ($f_{lim_{ij}} >>70$ Hz). Dans tous les cas, le fort couplage entre le mode support et la première harmonique du tube est bénéfique sur l'amplitude. Nous remarquons que les solutions en fibres haute résistance (N°5 et 6) ne sont pas assez rigides pour être suffisamment éloigné du mode 24.

Pour cet exemple de dimensionnement, nous concluons que les solutions haut module sont meilleures car elles réalisent une répartition favorable des fréquences propres. La solution 1 est particulièrement intéressante du point de vue de la fabrication car réalisable par enroulement filamentaire. Toutefois, si c'est possible, il est préférable d'utiliser des stratifiés avec des fibres dans toutes les directions. Aussi, malgré la faible résistance en compression des fibres haut module, la solution 2 semble être un bon compromis.

5. Conclusion

Ce travail présente une étude théorique et expérimentale de la dynamique des arbres de transmissions surcritiques. Cette étude présente un critère de stabilité montrant l'effet déstabilisant de l'amortissement tournant. Elle montre une bonne corrélation entre l'expérience et le modèle numérique. Enfin, ce travail met en évidence quelques points du dimensionnement des arbres surcritiques.

6. Bibliographie

Flügge W., Stresses in shells, 2nd edn, Springer-Verlag, New-York, 1973.

- Montagnier O., Hochard Ch., «Etude théorique et expérimentale de la dynamique des arbres de transmission surcritiques», *17^{ième} Congrès français de Mécanique*, Troyes, 2005.
- Ni R.G., Adams R.D., "A rational method for obtaining the dynamic mechanical properties of laminae for prediction of the damping of laminated plates and beams", *Composites*, vol. 15, p. 193-199, 1984.
- Tondl A., Some problems of rotor dynamics, Czechoslovak academy of sciences, Prague, 1965.