



**HAL**  
open science

## **Analyse dynamique d'une poutre linéaire avec une interface non linéaire**

Tien Minh Nguyen, Pierre Argoul, Guy Bonnet, Silvano Erlicher

### ► **To cite this version:**

Tien Minh Nguyen, Pierre Argoul, Guy Bonnet, Silvano Erlicher. Analyse dynamique d'une poutre linéaire avec une interface non linéaire. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. <hal-01813068>

**HAL Id: hal-01813068**

**<https://hal.science/hal-01813068v1>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 1.0 - Universal - International License

---

# Analyse dynamique d'une poutre linéaire avec une interface non linéaire

**T.-M. Nguyen\*** — **P. Argoul\*** — **G. Bonnet\*\*** — **S. Erlicher\***

*\* Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification - Institut Navier  
Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne  
77455 Marne-La-Vallée Cedex 2  
nguyent@lami.enpc.fr & argoul@lami.enpc.fr*

*\*\* Laboratoire de Mécanique  
Université de Marne-La-Vallée  
5 boulevard Descartes  
77454 Marne-La-Vallée Cedex 2  
bonnet@univ-mlv.fr*

---

*RÉSUMÉ. On cherche à modéliser et à analyser le comportement dynamique d'un système formé par une poutre couplée à une lame mince. La poutre a un comportement supposé linéaire et on représente celui de la lame par une matrice de rigidité non-linéaire. Les équations de la dynamique sont alors obtenues à l'aide d'une méthode de sous-structuration dynamique. Pour une excitation harmonique, on utilise la méthode d'équilibrage harmonique pour transformer les équations différentielles en équations algébriques dépendant de la fréquence d'excitation qui sont résolues à l'aide d'une méthode de continuation. Cette procédure est appliquée au cas d'un système poutre+lame réel. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par analyse ondelettes des signaux expérimentaux et permettent une validation de la procédure proposée.*

*ABSTRACT. The dynamical study of a beam coupled with a thin beam is performed. Assuming that the beam's behaviour is linear and that the thin beam can be replaced by nonlinear springs located at the interface beam/thin beam, a dynamic substructuring method allows to model the whole structure. With harmonic excitations, the harmonic balance method is used to change the differential equations into non linear algebraic ones in the frequency domain that are then solved by using a continuation method. This procedure is then applied to a real benchmark and the comparison with experimental results allows to check the efficiency of the method.*

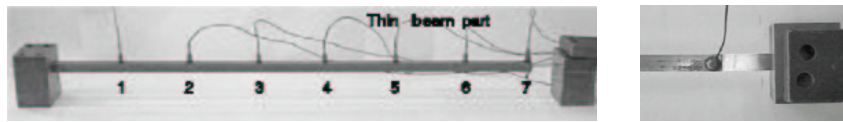
*MOTS-CLÉS : poutres minces, dynamique non linéaire, sous-structuration dynamique, méthode d'équilibrage harmonique, méthode de continuation*

*KEYWORDS: thin structures, non linear dynamics, dynamics substructuring, harmonic balance method, continuation method*

---

## 1. Introduction

Ce travail s'inscrit dans une recherche sur l'élaboration et l'analyse de modèles dynamiques "simplifiés" pour des assemblages complexes de sous-structures linéaires reliées entre elles par des liaisons non linéaires. Les sous-structures ayant un comportement linéaire, on peut utiliser des techniques de sous-structuration en dynamique linéaire développées par Craig et Bampton [CRA 68] et ainsi réduire la taille du problème en choisissant une base tronquée de modes propres de la sous-structure linéaire. Les équations différentielles non linéaires ainsi obtenues sont alors résolues dans le domaine fréquentiel par la combinaison de la méthode de l'équilibrage harmonique et d'une méthode de continuation. On étudie ici l'assemblage d'une poutre avec une

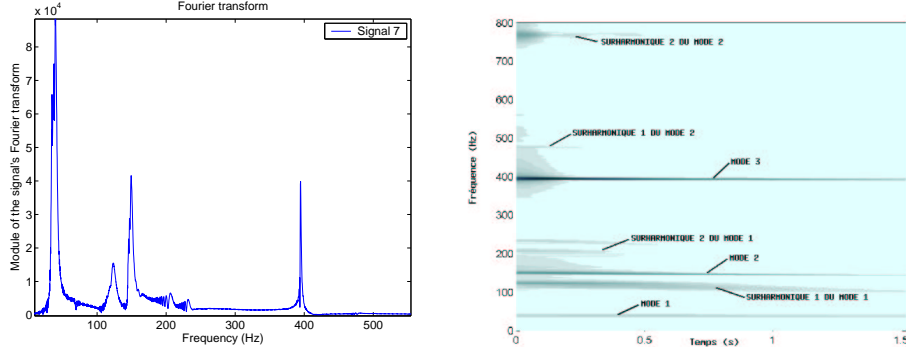


**Figure 1.** (a)- Poutre avec les sept capteurs numérotés de 1 à 7 (b)-Lame

lame mince instrumenté en vibrations au laboratoire LTAS de l'Université de Liège (ULg). Les résultats numériques sont comparés à ceux obtenus à partir des essais.

## 2. Présentation du benchmark de l'ULg

Le système d'essai illustré en Fig.1, est constitué par une poutre en acier (à gauche) encastree à une extrémité, couplée avec une lame mince en acier (à droite) encastree à l'autre extrémité; il a été élaboré et instrumenté au Laboratoire LTAS. Le système d'acquisition des mesures consiste en sept accéléromètres régulièrement disposés sur la poutre. L'excitateur se trouve près de l'encastrement. Pour réduire l'influence des forces de pesanteur, la lame mince est montée verticalement et les forces appliquées excite le système dans un plan horizontal. Dans la suite, les variables et les données de la poutre ou de la lame sont référencées par (p) ou par (l) respectivement. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont :  $E_p = E_l = 2,1 \cdot 10^{11} Pa$ ,  $\rho_p = \rho_l = 7800 kg/m^3$ ,  $L_p = 59,3 cm$ ,  $L_l = 4 cm$ ,  $h_p = h_l = 14 cm$ ,  $b_p = 14 cm$ ,  $b_l = 0,5 cm$  (cf. [THO 03]). Dans [ARG 03], les auteurs proposent quatre indicateurs instantanés fondés sur le calcul de la transformée en ondelettes continue des réponses libres de la structure pour détecter et quantifier les éventuelles non-linéarités dans le comportement de la structure. Les accélérations mesurées aux sept capteurs sont analysées à l'aide de l'analyse en ondelettes de Cauchy. L'étude des fréquences instantanées obtenues par ces indicateurs montrent leur importante variation temporelle et que pour les deux premières fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , il existent des surharmoniques d'ordre 3 et 5 comme le montre la figure 2(b) où sont indiquées les deux premières fréquences et les sur-harmoniques correspondants.



**Figure 2.** Pour le capteur n°7 (a)- Transformée de Fourier (b)-Module de la TO .

### 3. Principe de la modélisation proposée pour le système poutre+lame mince

On suppose que la poutre et de la lame peuvent être modélisées par une poutre d'Euler-Bernoulli. Les composantes du vecteur déplacement sont alors approchées par :  $\mathbf{d}(t, x, y) = (u(t, x) - y v(t, x), v(t, x), 0)^T$  pour un point  $M(x, y, z)$  de la poutre de Bernoulli à l'instant  $t$ . Le comportement de la poutre est supposé linéaire. Pour la lame, on fait l'hypothèse de petites déformations et de grands déplacements ( $u, x = o(\epsilon)$ ,  $y v, xx = o(\epsilon)$  et  $\theta = v, x = o(\epsilon^r)$  où  $\epsilon$  est une petit paramètre et  $r > 0.5$ ), en négligeant de plus, la contribution de la contrainte normale transverse.

Le comportement de la poutre étant linéaire, on propose alors d'utiliser une méthode de sous-structuration dynamique de type Craig-Bampton qui dit que le champ de déplacement admissible pour la poutre avec interface de couplage  $\Sigma$  libre s'exprime comme la somme d'un champ de déplacement admissible  $\mathbf{d}_{relstat}(t, x)$  obtenu par un relèvement statique du déplacement admissible  $\mathbf{d}_\Sigma(t, x)$  imposé sur l'interface et d'un champ de déplacement admissible  $\mathbf{d}_{elas}(t, x)$  solution d'un problème dynamique de poutre avec interface fixe.  $\mathbf{d}_{elas}(t, x)$  peut être décomposé à l'aide des modes normaux longitudinaux  $\psi_i(x)$  pour  $i > 0$  et transversaux  $\phi_j(x)$  pour  $j > 0$  de la poutre bi-encastrée qui sont rappelés en annexe I. L'opérateur de relèvement statique est construit en résolvant le problème de la poutre linéaire soumise à des déplacements imposés  $\mathbf{d}_\Sigma$  à la frontière. En imposant à l'interface un allongement  $u_\Sigma$ , un déplacement transverse  $v_\Sigma$  et une rotation  $\theta_\Sigma$ , on obtient :

$$\mathbf{d}_{relstat} = \begin{pmatrix} S_u(x)u_\Sigma \\ S_v(x)v_\Sigma + S_\theta(x)\theta_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{L} u_\Sigma \\ \left( \frac{3Lx^2 - 2x^3}{L^3} \right) v_\Sigma + \left( \frac{x^3 - x^2L}{L^2} \right) \theta_\Sigma \end{pmatrix} \quad [1]$$

En utilisant l'approche de sous-structuration dynamique et en considérant  $n_l$  modes  $\psi_i(x)$  et  $n_t$  modes  $\phi_j(x)$ , les champs réduits de déplacement longitudinal  $u(x, t)$  et transverse  $v(x, t)$  s'écrivent :

$$u(x, t) \simeq \sum_{i=1}^{n_l} \psi_i(x)p_i(t) + S_u(x)u_\Sigma(t) = [{}^t\Psi(x), S_u(x)] \begin{bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ u_\Sigma(t) \end{bmatrix} \quad [2]$$

$$v(x, t) \simeq \sum_{j=1}^{n_t} \phi_j(x) q_j(t) + S_v(x) v_\Sigma(t) + S_\theta(x) \theta_\Sigma(t) = [{}^t\Phi(x), S_v(x), S_\theta(x)]^t \begin{bmatrix} q(t) \\ v_\Sigma(t) \\ \theta_\Sigma(t) \end{bmatrix} \quad [3]$$

où :  $p_i(t)$ ,  $q_j(t)$ ,  $v_\Sigma(t)$ ,  $\theta_\Sigma(t)$ ,  $u_\Sigma(t)$ , sont les coordonnées généralisées.

La poutre est ensuite soumise à une force harmonique  $F(t)$  en  $x = x_0$  inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe de la poutre. La formulation variationnelle associée au problème précédent permet d'obtenir le système d'équations différentielles suivant :

$$\mathbf{M}^{(u)} \begin{bmatrix} \ddot{p}(t) \\ \ddot{u}_\Sigma^{(p)}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_0^{(u)} \begin{bmatrix} p(t) \\ u_\Sigma^{(p)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\Psi(x_0)F(t) \cos \alpha \\ N_\Sigma^{(p)} + S_u(x_0)F(t) \cos \alpha \end{bmatrix} \quad [4]$$

$$\mathbf{M}^{(v)} \begin{bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \ddot{v}_\Sigma^{(p)}(t) \\ \ddot{\theta}_\Sigma^{(p)}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_0^{(v)} \begin{bmatrix} q(t) \\ v_\Sigma^{(p)}(t) \\ \theta_\Sigma^{(p)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\Phi(x_0)F(t) \sin \alpha \\ T_\Sigma^{(p)} + S_v(x_0)F(t) \sin \alpha \\ M_\Sigma^{(p)} + S_\theta(x_0)F(t) \sin \alpha \end{bmatrix} \quad [5]$$

où :  $N_\Sigma$ ,  $T_\Sigma$ ,  $M_\Sigma$  sont l'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant, respectivement, au niveau de l'interface  $\Sigma$  et  $\mathbf{M}^{(u)}$ ,  $\mathbf{M}^{(v)}$ ,  $\mathbf{K}_0^{(u)}$ ,  $\mathbf{K}_0^{(v)}$  sont les matrices de masse et de rigidité linéaire, symétriques, définies positives, définies par :

$$\mathbf{M}^{(u)} = \rho_p S_p \begin{bmatrix} \langle \Psi, {}^t\Psi \rangle & \langle \Psi, S_u \rangle \\ sym. & \langle S_u, S_u \rangle \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{M}^{(v)} = \rho_p S_p \begin{bmatrix} \langle \Phi, {}^t\Phi \rangle & \langle \Phi, S_v \rangle & \langle \Phi, S_\theta \rangle \\ & \langle S_v, S_v \rangle & \langle S_v, S_\theta \rangle \\ sym. & & \langle S_\theta, S_\theta \rangle \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_0^{(u)} = E_p S_p \begin{bmatrix} \langle \Psi', {}^t\Psi' \rangle & \langle \Psi', S'_u \rangle \\ sym. & \langle S'_u, S'_u \rangle \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{K}_0^{(v)} = E_p I_p \begin{bmatrix} \langle \Phi'', {}^t\Phi'' \rangle & \langle \Phi'', S''_v \rangle & \langle \Phi'', S''_\theta \rangle \\ & \langle S''_v, S''_v \rangle & \langle S''_v, S''_\theta \rangle \\ sym. & & \langle S''_\theta, S''_\theta \rangle \end{bmatrix}$$

où :  $\langle f, g \rangle = \int_0^{L_p} f(x)g(x)dx$  est le produit scalaire de deux fonctions  $f$  et  $g$ . Due à l'orthogonalité des modes normaux :  $\langle \phi_i, \phi_k \rangle = \langle \phi'_i, \phi'_k \rangle = \langle \psi_i, \psi_k \rangle = 0$ , ( $i \neq k$ ). En intégrant par parties et utilisant les conditions aux limites, on obtient :  $\langle \Phi'', S''_v \rangle = \langle \Phi'', S''_\theta \rangle = 0$ . Pour effectuer l'assemblage de la poutre et de la lame, les conditions de couplage des deux sous-structures sur l'interface  $\Sigma$  s'écrivent : (1)– Continuité des déplacements sur  $\Sigma$  :  $v_\Sigma^{(l)} = v_\Sigma^{(p)}$ ,  $u_\Sigma^{(l)} = u_\Sigma^{(p)}$  et  $\theta_\Sigma^{(l)} = \theta_\Sigma^{(p)}$ ; (2)– équilibre des efforts sur  $\Sigma$  :  $M_\Sigma^{(l)} + M_\Sigma^{(p)} = 0$ ,  $T_\Sigma^{(l)} + T_\Sigma^{(p)} = 0$  et  $N_\Sigma^{(l)} + N_\Sigma^{(p)} = 0$ . Pour exprimer les efforts internes dans la lame au niveau de  $\Sigma$ , on part des équations de la statique pour une poutre d'Euler-Bernoulli en petites déformations et grands déplacements :

$$u^{(l)''}(x) + v^{(l)'} v^{(l)''}(x) = 0 \quad [6]$$

$$I_l v^{(l)''''}(x) - S_l \left[ u^{(l)'}(x) + \frac{1}{2} \left( v^{(l)'}(x) \right)^2 \right] v^{(l)''}(x) = 0 \quad [7]$$

avec les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L_l$  :  $u^{(l)}(0) = 0$ ,  $u^{(l)}(L_l) = v_\Sigma^{(l)}$  et  $v^{(l)}(0) = v^{(l)'}(0) = 0$ ;  $v^{(l)}(L_l) = v_\Sigma^{(l)}$ ,  $v^{(l)'}(L_l) = \theta_\Sigma^{(l)}$ . On note que :  $N_\Sigma^{(l)} = E_l S_l \left( u^{(l)'}(L_l) + \frac{1}{2} \left( \theta_\Sigma^{(l)} \right)^2 \right)$ ,  $M_\Sigma^{(l)} = E_l I_l v^{(l)''}(L_l)$  et  $T_\Sigma^{(l)} = -E_l I_l v^{(l)''''}(L_l)$ . On résoud d'abord le problème linéaire associé :  $u^{(l)''}(x) = 0$  et  $E_l I_l v^{(l)''''}(x) = 0$  avec

les conditions aux limites précédentes. La solution s'écrit :  $u_{(in)}^{(l)}(x) = \frac{x}{L_l} u_{\Sigma}^{(l)}$  et  $v_{(in)}^{(l)}(x) = \frac{3L_l x^2 - 2x^3}{L_l^3} v_{\Sigma}^{(l)} + \frac{x^3 - x^2 L_l}{L_l^2} \theta_{\Sigma}^{(l)}$ . On fait ensuite l'approximation suivante :  $u^{(l)}(x) \approx u_{(in)}^{(l)}(x) + u_{(1)}^{(l)}(x)$  et  $v^{(l)}(x) \approx v_{(in)}^{(l)}(x) + v_{(1)}^{(l)}(x)$  avec  $u_{(in)}^{(l)'}(x) + u_{(1)}^{(l)'}(x) = o(\epsilon)$ ,  $v_{(1)}^{(l)''} = o(\epsilon)$  et  $v_{(in)}^{(l)'} = o(\epsilon^r)$  où  $\epsilon$  est un petit paramètre et  $r > 0.5$  qui en reportant dans (6) et (7) entraîne :

$$u_{(1)}^{(l)''}(x) + v_{(in)}^{(l)'} v_{(in)}^{(l)''}(x) = 0 \quad [8]$$

$$I_l v_{(1)}^{(l)''''}(x) - S_l \left( u_{(in)}^{(l)'}(x) + u_{(1)}^{(l)'}(x) + \frac{1}{2} \left( v_{(in)}^{(l)'}(x) \right)^2 \right) v_{(in)}^{(l)''}(x) = 0 \quad [9]$$

avec des conditions aux limites homogènes.

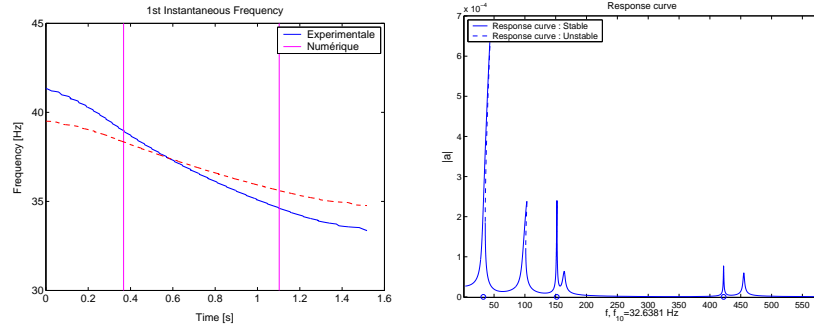
La résolution des équations 8 et 9 conduit à l'expression de  $N_{\Sigma}^{(l)}$ ,  $T_{\Sigma}^{(l)}$  et  $M_{\Sigma}^{(l)}$  :

$$\begin{aligned} N_{\Sigma}^{(l)} &= \frac{E_l S_l}{L_l} u_{\Sigma}^{(l)} + \frac{3E_l S_l}{5L_l^2} v_{\Sigma}^{(l)2} - \frac{E_l S_l}{10L_l} v_{\Sigma}^{(l)} \theta_{\Sigma}^{(l)} + \frac{E_l S_l}{15} \theta_{\Sigma}^{(l)2} \\ T_{\Sigma}^{(l)} &= \frac{12E_l I_l}{L_l^3} v_{\Sigma}^{(l)} - \frac{6E_l I_l}{L_l^2} \theta_{\Sigma}^{(l)} + \frac{6E_l S_l}{5L_l^2} v_{\Sigma}^{(l)} u_{\Sigma}^{(l)} - \frac{11E_l S_l}{10L_l} \theta_{\Sigma}^{(l)} u_{\Sigma}^{(l)} + \\ &\quad + \frac{18E_l S_l}{25L_l^3} v_{\Sigma}^{(l)3} - \frac{39E_l S_l}{50L_l^2} v_{\Sigma}^{(l)2} \theta_{\Sigma}^{(l)} + \frac{19E_l S_l}{100L_l} v_{\Sigma}^{(l)} \theta_{\Sigma}^{(l)2} - \frac{11E_l S_l}{150} \theta_{\Sigma}^{(l)3} \\ M_{\Sigma}^{(l)} &= -\frac{6E_l I_l}{L_l^2} v_{\Sigma}^{(l)} + \frac{4E_l I_l}{L_l} \theta_{\Sigma}^{(l)} - \frac{E_l S_l}{10L_l} v_{\Sigma}^{(l)} u_{\Sigma}^{(l)} + \frac{2E_l S_l}{15} \theta_{\Sigma}^{(l)} u_{\Sigma}^{(l)} + \\ &\quad - \frac{3E_l S_l}{50L_l^2} v_{\Sigma}^{(l)3} + \frac{9E_l S_l}{100L_l} v_{\Sigma}^{(l)2} \theta_{\Sigma}^{(l)} - \frac{E_l S_l}{50} v_{\Sigma}^{(l)} \theta_{\Sigma}^{(l)2} + \frac{2E_l S_l L_l}{225} \theta_{\Sigma}^{(l)3} \end{aligned}$$

Les équations pour la dynamique du système global sont finalement obtenues à partir des deux relations (4) et (5) en remplaçant dans le second membre des deux égalités, l'indice ( $p$ ) par ( $l$ ) et en utilisant les expressions précédentes de  $N_{\Sigma}^{(l)}$ ,  $T_{\Sigma}^{(l)}$  et  $M_{\Sigma}^{(l)}$ .

#### 4. Premiers résultats numériques et comparaisons avec les essais

Le système des équations différentielles non linéaires précédemment obtenu est ensuite transformé sous forme algébrique par la méthode d'équilibrage harmonique et résolu par la méthode de continuation qui permet d'analyser la stabilité des réponses périodiques de la structure soumise à une excitation harmonique. Ces deux méthodes ne sont pas présentées ici mais bien développées dans [PERIG 04]. Les réponses libres sont obtenues soit en faisant tendre l'amplitude de la force d'excitation vers zéro dans la méthode de continuation, soit en résolvant les équations par une méthode de Runge-Kutta. Une comparaison des fréquences obtenues à partir des méthodes numériques avec tirées des essais est présentée dans le tableau 1. Des erreurs inférieures à 9% des résultats restent acceptables. D'autres simulations et perfectionnements sont à l'étude comme l'introduction d'effets dissipatifs dans les équations de la dynamique ou comme la possibilité d'étendre la méthode de sous-structuration au cas de sous-structures non linéaires à l'aide de la notion des modes normaux "non linéaires".



**Figure 3.** (a) 1<sup>ère</sup> fréquence instantanée  $f_1$ - (b) FRF analytique du point situé à l'interface de couplage

**Tableau 1.** Comparaison des résultats numériques avec ceux tirés de l'essai

Fréquence (Hz)	Numérique	Expérimentale	Erreur relative (%)
$f_1$	$35.5 \div 38.5$	$35 \div 38$	$1.3 \div 1.5$
$f_{1s} \simeq 3f_1$	$106.5 \div 115.5$	$105 \div 114$	$1.3 \div 1.4$
$f_2$	$148.6 \div 149.8$	$146 \div 148$	$1.2 \div 1.8$
$f_3$	$410.7 \div 411$	$394.5 \div 395$	$4 \div 4.1$
$f_{2s}$	$482 \div 485.5$	$440 \div 450$	$9.4 \div 7.9$

## 5. Bibliographie

- [CRA 68] CRAIG R.R., BAMPTON M.C.C., « Coupling of Substructures for Dynamic Analysis », *AIAA Journal*, vol. 6, n° 8, 1968, p. 1313-1319.
- [THO 03] THOUVEREZ F., « Presentation of the ECL benchmark », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 17, n° 1, 2003, p. 195-202.
- [ARG 03] ARGOUL P., LE T.P., « Instantaneous indicators of structural behaviour based on continuous Cauchy wavelet transform », *Mechanical Systems and Signal Processing Journal*, vol. 17, 2003, p. 243-250.
- [PERIG 04] PÉRIGNON F., « Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires », *Thèse de doctorat Université d'Aix-Marseille II*, 2004, 179 pages.

*Annexe I* Pour une poutre bi-encastée, les expressions du  $i$ -ème mode propre  $\psi_i(x)$  longitudinal et du  $j$ -ème mode propre  $\phi_j(x)$  de vibration transverse sont données par :

$$\psi_i(x) = B_i \sin\left(i \frac{\pi x}{L}\right) \quad [10]$$

$$\phi_i(x) = A_i \left[ \sin(a_i x) - sh(a_i x) + \frac{\sin(a_i L) - sh(a_i L)}{\cos(a_i L) - ch(a_i L)} \left( ch(a_i x) - \cos(a_i x) \right) \right] \quad [11]$$

où :  $a_i$  est  $i$ -ème solution de l'équation transcendantale :  $1 - \cos(a_i L)ch(a_i L) = 0$  et  $A_i$  et  $B_i$  sont des constantes. Les modes  $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, +\infty}$  et les modes  $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, +\infty}$  forment une base orthogonale respectivement.