

Homogénéisation de fonctionnelles non convexes Application numérique

Philippe Aubert, Stéphane Pagano, Christian Licht

▶ **To cite this version:**

Philippe Aubert, Stéphane Pagano, Christian Licht. Homogénéisation de fonctionnelles non convexes Application numérique. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813067

HAL Id: hal-01813067
https://hal.science/hal-01813067

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Homogénéisation de fonctionnelles non convexes

Application numérique

Aubert Philippe, Pagano Stéphane, Licht Christian

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC)
Université Montpellier II
CC 048 Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5
aubert@lmgc.univ-montp2.fr

RÉSUMÉ. *Le sujet principal de cet article est une approche numérique de la théorie de l'homogénéisation en mécanique non-linéaire. Une étude théorique menée par Stefan Müller précise que pour une densité d'énergie non-convexe, la densité d'énergie homogénéisée W^{hom} est donnée par une famille de problèmes de minimisation sur tous les multiples de la cellule de base du milieu considéré. Cette étude est tout d'abord réalisée sur un matériau modèle : un composite périodiquement stratifié conformément à l'étude menée par celui-ci. Les premiers résultats numériques sont intéressants et sont similaires à ceux obtenus par cette théorie. En effet, les solutions diffèrent en fonction du nombre de cellules de bases pris en compte pour une étude d'homogénéisation.*

ABSTRACT. *The main subject of this study is a numerial approach of the non-linear homogenization theory. A theoric study carried out by Stefan Müller precise that for a non-convex energie density, the homogenized energy density W^{hom} is given by a family of homogenization problems carried out on the multiple of the basic cell of the considered media. This study is first realised on a model material : a periodic laminated composite. The numerical are similar to those obtained by the theory. Indeed, the homgenized energie density is different in function of the basic cells number taken into account in the homogenization study.*

MOTS-CLÉS : *homogénéisation, densité d'énergie, non-convexité, cellule de base, algorithme*

KEYWORDS: *homogenization, energie density, non-convexity, basic cell, algorithm*

L'objet – 8/2002. LMO'2002, pages 45 à 57

1. Introduction

Certaines applications telles que la densification massique ou superficielle, la mise en forme de pièces de bois ou celle de produits dérivés, mettent en jeu la compression transversale aux fibres. Les niveaux de déformations atteints sont spectaculaires du fait des micro-flambements autorisés par la structure cellulaire du matériau. L'analyse des essais étant complexe, une approche numérique des grandes déformations permet de rendre compte de l'effondrement d'une structure de type cellulaire. On propose, ici, une approche par homogénéisation *non linéaire* que l'on testera dans un premier temps sur un matériau modèle : un composite périodiquement stratifié.



Figure 1. *exemple d'un composite composé de 4 fibres (acier dur, acier mou)*

2. Homogénéisation périodique

Cette théorie permet de déterminer une densité d'énergie dite "homogénéisée" décrivant le comportement macroscopique de la structure. Pour une densité d'énergie convexe, il est classique d'écrire la densité d'énergie homogénéisée W^{hom} comme résultat d'un problème de minimisation sur la cellule de base Y décrivant la périodicité du milieu [P.M 78] ou [P.S 82] :

$$W^{hom}(F) = min\{\frac{1}{Y}\int_Y W(x, F + \bigtriangledown\psi)dy, \quad \psi\, Y - p\acute{e}riodique\} \qquad [1]$$

Par contre, dans le cas *non convexe*, la densité d'énergie homogénéisée W^{hom} est donnée par une famille de problèmes de minimisation sur tous les multiples de la cellule de base [S.M 87] :

$$\begin{cases} W_k(F) = min\{\frac{1}{kY}\int_{kY} W(x, F + \bigtriangledown\psi)dy, \quad \psi\, kY - p\acute{e}riodique\} \\ W^{hom}(F) = inf\{W_k(F); k = 1, 2, 3, ...\} \end{cases} \qquad [2]$$

On remarque une grande différence entre la formule utilisée pour W convexe (1) et celle donnée par Müller dans le cas non convexe (2). En effet, pour W convexe, il faut considérer les champs Y-périodiques, alors que pour W non convexe, il faut

considérer des champs périodiques sur tous les multiples kY de la cellule de base Y. Ceci montre l'importance du choix du volume élémentaire représentatif (VER). Afin de rendre compte de grandes déformations, on va considérer une densité d'énergie microscopique non convexe.

3. Approche numérique

La densité que nous avons décidé d'étudier est une loi d' Ogden, dite de Ciarlet-Geymonat, donnée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} W(x,F) = \quad & C_1(x)(I_1-2) + C_2(x)(J^2+I_1-3) \\ & +a(x)(J^2-1) - 2[C_1(x)+2C_2(x)+a(x)]\log J \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{array}{cc} I_1 = trac(F^TF) & C_1 = 0.5 * \alpha(x) \\ J = det(F) & C_2 = 0.005 * \alpha(x) \\ F = I + \bigtriangledown u & a(x) = 0.35 * \alpha(x) \end{array}$$

où α est un paramètre représentatif de la rigidité du matériau.
Pour résoudre numériquement ce problème, on utilise l'algorithme de Newton dont une itération s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{c} trouver \quad \psi^{n+1}\ kY - périodique \\ \int_{kY} \frac{\partial^2 W(F+\bigtriangledown\psi^n)}{\partial^2 F}(\bigtriangledown\psi^{n+1} - \bigtriangledown\psi^n) \bigtriangledown h\, dy = -\int_{kY} \frac{\partial W(F+\bigtriangledown\psi^n)}{\partial F} \bigtriangledown h\, dy \\ \forall h \quad kY - périodique \end{array} \right. \qquad [3]$$

Après avoir réalisé le changement de variable suivant : $\varphi^n = F.x + \psi^n$,
l'algorithme de Newton peut se mettre sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{c} trouver \quad \varphi^{n+1} \\ \int_{kY} \frac{\partial^2 W(\bigtriangledown\varphi^n)}{\partial^2 F}(\bigtriangledown\varphi^{n+1} - \bigtriangledown\varphi^n) \bigtriangledown h\, dy = -\int_{kY} \frac{\partial W(\bigtriangledown\varphi^n)}{\partial F} \bigtriangledown h\, dy \\ \forall h \quad kY - périodique \end{array} \right. \qquad [4]$$

La résolution du problème se fait donc sur la variable φ. La densité d'énergie étudiée étant non-convexe, la convergence de l'algorithme n'est pas assurée. Malgré cela, on pourra, dans les différents résultats présentés, remarquer le bon comportement de l'algorithme. Moyennant une initialisation judicieuse de celui-ci, on a pu mettre en evidence différentes solutions au problème [4]. Un choix possible d'itéré initial pourra être :
$\bigtriangledown\varphi^0 = I + E + \bigtriangledown\psi^0$ où E est la déformation macroscopique imposée ($E = \bigtriangledown u$) et ψ la perturbation. Cette initialisation permet de converger vers différentes solutions.
Les tests effectués montrent une forte dépendance vis à vis du paramètre ψ. Beaucoup d'études ont étés menées pour connaître l'influence de ce paramètre au niveau de la

compression de plaques composites (voir [DRA 01]) mais le sujet principal de cette étude étant le choix du VER, ce point, tout de même important, ne sera pas développé par la suite.

Rq : Les conditions périodiques ont étés prises en compte par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (voir [DEB 86] ou [DHA 84]).

4. Résultats

Les résultats obtenus, présentés ci dessous, montrent effectivement une forte dépendance par rapport au nombre de cellules de bases. En effet, l'augmentation de Y génère l'apparition de plusieurs modes de flambements.

4.1. *Sur une cellule de base*

Lorsque le domaine d'étude est limité à une seule cellule de base (1Y), l'algorithme converge vers une seule et unique solution qui est la solution élastique, c'est à dire la compression (voir figure 3).

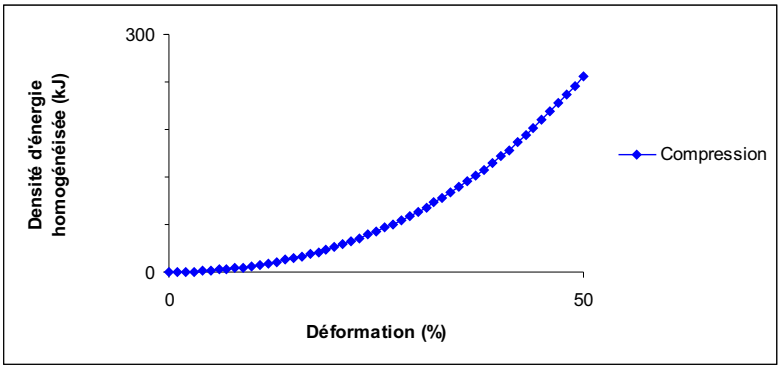


Figure 2. *Densité d'énergie homogénéisée en fonction de la déformation macroscopique pour une cellule de base (1Y)*

4.2. *Sur dix cellules de base*

Par contre, lorsque le domaine d'étude est constitué de plusieurs cellules de bases (10Y), l'algorithme converge vers différentes solutions notamment des solutions flambées.

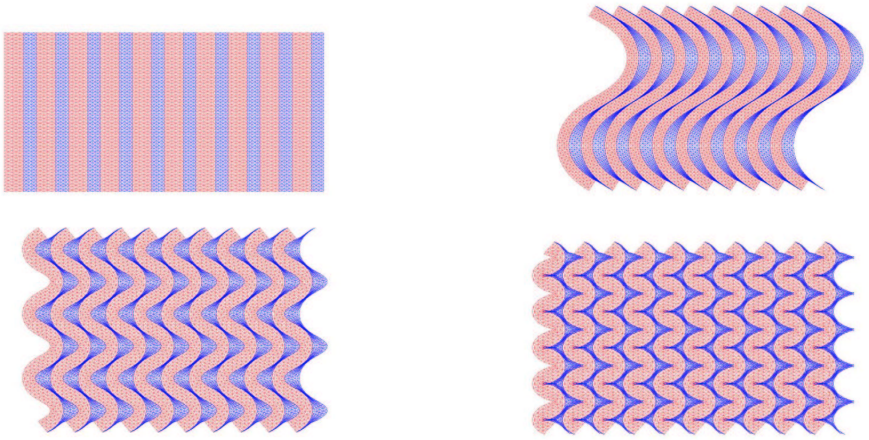


Figure 3. *Différentes solutions (compression,2ème, 6ème et 10ème modes de flambements)*

De plus, les densités d'énergies homogénéisées obtenues donnent des résultats différents en fonction du mode de flambement (Figure 4), conformément aux résultats de Müller (2).

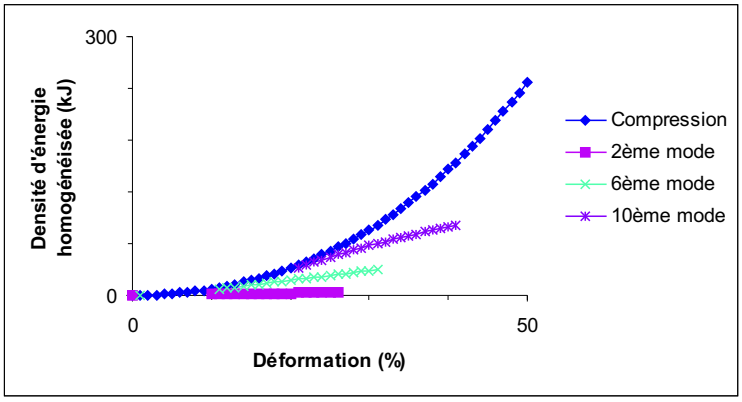


Figure 4. *Densité d'énergie homogénéisée en fonction de la déformation macroscopique pour dix cellules de base (10Y)*

Les premiers résultats permettent de dire qu'à partir d'une certaine déformation macroscopique, il sera difficile d'obtenir tous les modes de flambements. En effet,

au niveau du deuxième mode de flambement, les aciers durs sont pratiquement en "contact" à partir d'une déformation macroscopique de 27% (voir figure 5). Par contre, le dixième mode de flambement permet d'atteindre des déformations macroscopiques beaucoup plus importantes, la déformation macroscopique est de 40% sur la figure 5.



Figure 5. *Zoom sur les zones proches du contact (à droite : 2ème mode de flambement à 27% de déformation macroscopique. à gauche :10ème mode de flambement à 40% de déformation macroscopique)*

5. Conclusion

Les résultats obtenus permettent de dire que la densité d'énergie homogénéisée dépend, effectivement, du nombre de cellules de base pris en compte pour réaliser une étude d'homogénéisation. De plus, on a constaté que certains modes de flambements ne permettent pas une déformation trop élevée contrairement à d'autres modes.

6. Bibliographie

[DEB 86] DEBORDES O., « Homogénization computations in the elastic or plastic or plastic collapse range.Applications to unidirectionnal composites and perforated sheets. », *Inn :4th.Int.Symp.Inn.Meth.in Eng. Springer-Verlag,Atlanta*, , 1986, p. 453-458.

[DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A., Paris, 2 édition, 1984.

[DRA 01] DRAPIER S. ; GRANDIDIER J.-C.-F. M., « A structural approach of plastic microbuckling in long fibre composites : comparison with theoretical and experimental results », *Pergamon*, vol. International Journal of solids ans Structures, n° 38, 2001, p. 3877-3904.

[P.M 78] P.MARCELLINI, « Periodic solution and homogeneization of non linear variationnal problem », *Math.Mod.Num.Anal*, vol. 28(1978), 1978, p. 139-152.

[P.S 82] P.SUQUET, « Plasticité et homogénéisation », Th. doct., Université Pierre et Marie Curie, 1982.

[S.M 87] S.MÜLLER, « Homogeneization of non convexe integral functionnals and cellular elastic materials », *Arch. Rationnal Mech.Anal*, vol. 99(1987), 1987, p. 198-212.