



HAL
open science

Décollement par fatigue d'un film mince en flexion: une approche variationnelle

André Jaubert, Jean-Jacques Marigo

► **To cite this version:**

André Jaubert, Jean-Jacques Marigo. Décollement par fatigue d'un film mince en flexion: une approche variationnelle. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813057

HAL Id: hal-01813057

<https://hal.science/hal-01813057>

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Décollement par fatigue d'un film mince en flexion : une approche variationnelle

André Jaubert* — Jean-Jacques Marigo**

**Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux
Université Paris-Nord
99, avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse (France)
jaubert@lpmtm.univ-paris13.fr*

***Laboratoire de Modélisation en Mécanique
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75252 Paris cedex 05 (France)
marigo@lmm.jussieu.fr*

RÉSUMÉ. Nous étudions le décollement d'un film initialement collé sur un socle rigide et soumis à une déflexion cyclique. En adoptant un principe de moindre énergie, une énergie de surface de Dugdale et une condition d'irréversibilité, nous construisons un modèle de propagation du décollement dans le but de modéliser le phénomène de fatigue. En particulier, le nombre de cycles jusqu'à décollement total dépend du rapport ϵ entre la longueur interne apparaissant dans l'énergie de Dugdale et la longueur du film. Lorsque ϵ tend vers 0, nous montrons que la loi de fatigue limite est une loi de Paris ; le taux de propagation du décollement est une fonction du taux de restitution de l'énergie potentielle : $\dot{\ell} = f(G)$.

ABSTRACT. We study the debonding of a thin film initially bonded at a rigid support and submitted to a cyclic deflexion. By using a principle of least energy, a Dugdale surface energy and an irreversible condition, we build a debonding growth model under cyclic loading in order to model the phenomenon of fatigue. In particular the number of cycles until the total debonding depends on the ratio ϵ between the internal length introduced in the Dugdale energy and the length of the film. When ϵ tends to 0, we show that the limit fatigue law is like a Paris law; the debonding growth rate is a function of the potential energy release rate: $\dot{\ell} = f(G)$.

MOTS-CLÉS : approche énergétique ; chargement cyclique ; lois de fatigue ; méthode variationnelle.

KEYWORDS: energetic approach ; cyclic loading ; fatigue laws ; variational method.



Figure 1. *Géométrie.*

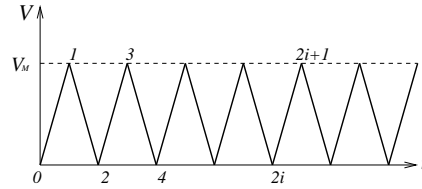


Figure 2. *Chargement cyclique.*

1. Introduction

Francfort et Marigo [FRA 98] proposent une approche variationnelle de la rupture fragile dans laquelle les fissures apparaissent et se propagent dans un corps élastique fragile de telle façon que l'énergie totale de la structure soit minimale à chaque pas de l'histoire du chargement. Dans leur papier les auteurs conservent l'hypothèse de Griffith en supposant que l'énergie de surface est proportionnelle à l'aire de la surface de fissure indépendamment de la valeur de la discontinuité du saut de déplacement. Mais, avec ce choix, il est impossible de rendre compte du phénomène de fatigue. Nous proposons ici d'étendre cette approche dans le but de modéliser la propagation de fissures dans les corps soumis à des sollicitations cycliques. L'idée est de conserver le principe de moindre énergie, mais de remplacer l'énergie de surface de Griffith par une énergie dépendant du saut de déplacement à travers la fissure et d'introduire une condition d'irréversibilité. Les ingrédients et la méthode sont développés dans le cas du décollement d'un film mince.

2. Présentation du problème

2.1. Les ingrédients

Nous considérons le problème plan constitué d'un film mince de longueur L parfaitement collé sur un socle rigide à l'instant initial. Une extrémité du film est soumise à une déflexion cyclique $V(t)\mathbf{e}_2$ alors que l'autre est fixée (Figure 1). On note $v(s)\mathbf{e}_2$ la déflexion d'un point du film d'abscisse curviligne s à l'instant t et vérifiant les conditions cinématiques $v(0) = 0$ et $v(L) = V(t)$. La déflexion imposée $V(t)$ est périodique en temps variant de 0 à sa valeur maximale V_M (Figure 2) et engendre une flexion du film. En posant E et I respectivement le module d'Young et le moment d'inertie du film, l'énergie élastique s'écrit classiquement

$$P(v) = \frac{EI}{2} \int_0^L v''(s)^2 ds \quad (1)$$

Pour tenir compte de l'irréversibilité du décollement, nous introduisons une variable de mémoire δ , appelée "ouverture cumulée", qui rend compte de l'accumulation

avec le temps de l'ouverture entre le film et le socle. Ainsi, au temps t et au point s , $\delta(s, t)$ s'écrit

$$\delta(s, t) = \int_0^t \langle \dot{v}(s, \tau) \rangle d\tau \quad \text{avec } \langle f \rangle = \max\{0, f\} \text{ et } \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (2)$$

Une fois le chemin de chargement discrétisé, l'indice i fait référence au pas de temps, et la relation (2) devient

$$\delta_i(s) = \delta_{i-1}(s) + \langle v_i(s) - v_{i-1}(s) \rangle. \quad (3)$$

La densité d'énergie de surface ϕ est une fonction de δ (énergie de surface de Dugdale) et est donnée par

$$\phi(\delta) = \begin{cases} G_c \frac{\delta}{\delta_c} & \text{si } 0 \leq \delta \leq \delta_c \\ G_c & \text{si } \delta \geq \delta_c \end{cases} \quad (4)$$

Dans la relation (4), δ_c représente une longueur interne caractéristique et G_c la ténacité de l'interface. L'énergie de surface à l'interface s'écrit alors

$$S(\delta) = \int_0^L \phi(\delta(s)) ds \quad (5)$$

2.2. Le problème incrémental

En suivant l'idée introduite par Francfort et Marigo [FRA 98] dans le contexte de la théorie de Griffith, puis développée par Del Piero [DEL 99], Charlotte et al [CHA 00], Truskinovski et Marigo [MAR 04] pour une énergie de surface de Barenblatt, l'évolution du décollement sera obtenue en minimisant l'énergie totale de la structure, somme de son énergie élastique (1) et de son énergie de surface (5). Cependant, du fait du caractère irréversible du problème, nous devons tout d'abord discrétiser le chemin de chargement afin d'accomplir la minimisation à chaque pas discret du chargement. Ainsi, en notant \mathcal{V}_i l'ensemble des déflexions admissibles au pas i ,

$$\mathcal{V}_i = \{v \in H^2(0, L) : v(0) = v'(0) = 0, v \geq 0, v(L) = V(t_i)\}, \quad (6)$$

et $\mathcal{E}_i(v)$ l'énergie totale du film à ce pas pour une déflexion v ,

$$\mathcal{E}_i(v) = P(v) + S(\delta_{i-1} + \langle v - v_{i-1} \rangle), \quad (7)$$

le problème incrémental s'écrit

Pour $i \in \mathbb{N}$ et $v_0 = \delta_0 = 0$, Trouver v_{i+1} et δ_{i+1} tels que

$$\mathcal{E}_{i+1}(v_{i+1}) = \min_{v \in \mathcal{V}_{i+1}} \mathcal{E}_{i+1}(v)$$

Remarque 1 : Le décollement ne peut pas évoluer durant les phases de décharge. De ce fait, le film retourne à sa configuration de déplacement initiale à la fin de chaque décharge : $v_{2i} = 0$ et $\delta_{2i} = \delta_{2i-1}$.

3. Évolution du décollement

3.1. Évolution des têtes de fissure

Comme on utilise une énergie de surface de type Barenblatt, une zone d'élaboration apparaît devant la fissure. Dans cette zone, le film n'est pas complètement décollé mais soumis à des forces cohésives données par la dérivée de l'énergie de surface par rapport à l'ouverture cumulée, constantes et égales à G_c/δ_c dans le cas d'une énergie de surface de Dugdale. En adimensionnalisant le problème, on montre que le processus de décollement ne dépend que des deux paramètres suivants

$$\bar{V}_M = \sqrt{\frac{EI}{2G_c} \frac{V_M}{L^2}} \quad \epsilon = \sqrt{\frac{EI}{2G_c} \frac{\delta_c}{L^2}} \quad (8)$$

Pour des valeurs assez faibles de \bar{V}_M , aucun décollement ne se produit au cours des N_a premiers cycles ($N_a = i$ si $\bar{V}_M < \epsilon/i$). Par contre une zone d'élaboration, ou zone d'amorçage du décollement, de longueur constante égale à $1 - \sqrt{48\epsilon\bar{V}_M}$ apparaît dès la mise en charge et l'ouverture cumulée dans cette zone est une fonction croissante du nombre de cycles. Ainsi le décollement surviendra irrémédiablement dès que δ aura atteint sa valeur critique (voir (4)).

À la fin du $(N_a + i)$ ^{ème} cycle, la zone d'élaboration est localisée dans l'intervalle (ℓ_i, ℓ_i^c) alors que la partie du film $(0, \ell_i)$ est encore parfaitement collée et que l'extrémité du film $(\ell_i^c, 1)$ est entièrement décollée. Les positions de la tête de zone d'élaboration ℓ_i et de la tête de zone décollée ℓ_i^c (Figure 3) sont données par le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{(\ell_i^c - \ell_i)^2}{(1 - \ell_i)} \left[4(1 - \ell_i^c)^3 + 2(\ell_i^c - \ell_i)(1 - \ell_i^c)[3(1 - \ell_i^c) + (1 - \ell_i)] + \right. \\ \quad \left. (\ell_i^c - \ell_i)^2 [2(1 - \ell_i^c) + (1 - \ell_i)] \right] = 48\epsilon\bar{V}_M \\ \bullet \sum_{j=1}^{i+N_a} \left[-(\ell_i^c - \ell_j)^4 + \right. \\ \quad \left. 2(\ell_j^c - \ell_j) \frac{[(1 - \ell_j^c) + (1 - \ell_j)]}{1 - \ell_j} (\ell_i^c - \ell_j)^3 \right] = 48\epsilon^2 \end{array} \right. \quad (9)$$

Le système (9) est résolu numériquement par induction. La Figure 4 représente ainsi l'évolution de la tête de zone décollée au cours des cycles pour différentes valeurs du paramètre \bar{V}_M .

Remarque 2 : Il est prouvé que, pour des valeurs fixées de ϵ et \bar{V}_M , $\ell_i^c \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow \infty$.

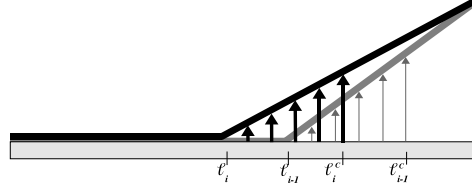


Figure 3. Positions de la tête de zone décollée et de la tête de zone d'élaboration à la fin des phases de charge des cycles $i - 1$ et i .

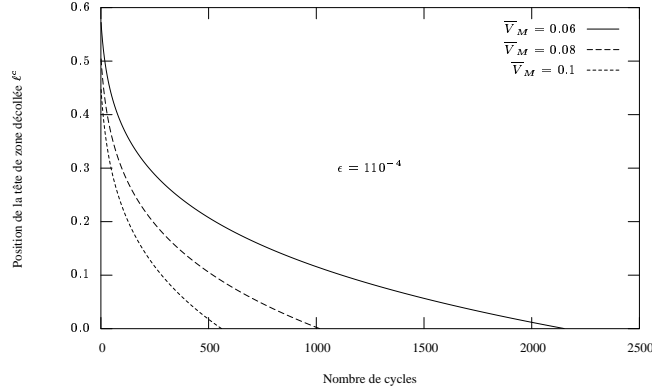


Figure 4. Influence du paramètre \bar{V}_M sur l'évolution du décollement.

3.2. La Loi Limite de Fatigue lorsque $\epsilon \rightarrow 0$

La résolution du système (9) demande un temps de calcul considérable si on considère de faibles valeurs de ϵ ou de \bar{V}_M . En particulier, l'incrément de propagation de la zone d'élaboration par cycle, $\ell_i^c - \ell_{i-1}^c$, est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$. Pour une longueur de film L grande par rapport à la longueur caractéristique de l'énergie de surface δ_c , i.e. lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, le nombre de cycles jusqu'à décollement complet du film tend vers l'infini comme $1/\sqrt{\epsilon}$. Ainsi, si nous réalisons un changement d'échelle du nombre de cycles en introduisant la variable de "temps" continue T

$$i = i_\epsilon(T) = \frac{T}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (10)$$

alors nous pouvons voir sur la Figure 5 que la courbe $\ell_{i_\epsilon(T)}^c$ représentant l'évolution de la tête de zone décollée converge vers une courbe, appelée $\ell(T)$, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. En fait, on constate numériquement que le rapport $(\ell_{i_\epsilon(T)-1}^c - \ell_{i_\epsilon(T)}^c)/\sqrt{\epsilon}$ tend vers une limite $\dot{\ell}(T)$ solution de l'équation suivante obtenue à partir de (9)

$$\sum_{j=1}^{+\infty} [< 2G(T)^{1/4} - j\dot{\ell}(T) >]^4 = 16(1 - G(T)) \quad \text{avec } G(T) = \frac{9\bar{V}_M^2}{(1 - \ell(T))^4} \quad (11)$$

Dans l'équation (11), $G(T)$ représente le taux de restitution de l'énergie potentielle adimensionné associé à un décollement de Griffith jusqu'à $\ell(T)$ alors que $\dot{\ell}(T) = -d\ell/dT$ représente son taux de propagation par rapport à la variable T . Nous obtenons ainsi que la loi de fatigue limite est une loi de Paris (généralisée) $\dot{\ell} = f(G)$. De plus, pour les faibles valeurs de G , cette loi de fatigue est similaire à la loi usuelle de Paris avec l'exposant $5/4$

$$\dot{\ell} = \frac{2}{5}G^{5/4} \quad (12)$$

alors que, pour des valeurs de G proches de la ténacité (i.e. proche de 1 pour les quantités sans dimension), nous obtenons

$$\dot{\ell} = 2G^{1/4} - 2(1 - G)^{1/4} \quad (13)$$

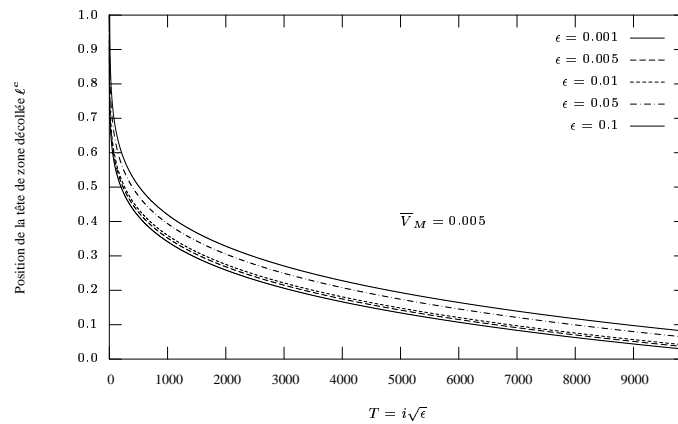


Figure 5. Convergence vers une loi de fatigue limite.

4. Bibliographie

- [CHA 00] CHARLOTTE M., FRANCFORT G., MARIGO J., TRUSKINOVSKY L., « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem : comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models », dans : A.B. Cachan (Eds.), *Proceedings of the Symposium on "Continuous Damage and Fracture"*, 2000, dans : *The Data Science Library, Elsevier, Paris*, 2000, p. 7-12.
- [DEL 99] DEL PIERO G., « One-Dimensional ductile-brittle transition, yielding and structured deformations », dans : Argoul P., Frémond M. (Eds.), *Proceedings of IUTAM Symposium "Variations de domaines et frontières libres en mécanique"*, Paris, 1997, Kluwer Academic, 1999.
- [FRA 98] FRANCFORT G., MARIGO J., « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, n° 8, 1998, p. 1319-1342.
- [MAR 04] MARIGO J., TRUSKINOVSKY L., « Initiation and propagation of fracture in the models of Griffith and Barenblatt », *Continuum Mech. Thermodyn.*, vol. 16, n° 4, 2004, p. 391-409.