



**HAL**  
open science

## **Plasticité et homogénéisation de poutres hétérogènes périodiques: analyse limite et adaptation**

Hélène Magoaric, Stéphane Bourgeois

### ► **To cite this version:**

Hélène Magoaric, Stéphane Bourgeois. Plasticité et homogénéisation de poutres hétérogènes périodiques: analyse limite et adaptation. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. <hal-01813056>

**HAL Id: hal-01813056**

**<https://hal.science/hal-01813056v1>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 1.0 - Universal - International License

---

# Plasticité et homogénéisation de poutres hétérogènes périodiques : analyse limite et adaptation

Hélène Magoaric — Stéphane Bourgeois

*LMA - Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (CNRS - UPR 7051)*

*EGIM - Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille*

*Technopôle de Château-Gombert*

*38, rue Joliot Curie*

*F-13451 Marseille Cedex 20 - France*

*magoarie,bourgeoi@mn.esm2.imt-mrs.fr*

---

*RÉSUMÉ. Les théories de l'adaptation élastoplastique et de l'analyse limite sont appliquées aux poutres hétérogènes possédant une structure périodique suivant leur axe. Ceci conduit à résoudre des problèmes mécaniques tridimensionnels posés sur une cellule de base pour déterminer les domaines d'analyse limite et d'adaptation en termes de contraintes macroscopiques généralisées (tension, flexions et torsion). Utilisant une approche directe, basée sur les théorèmes statiques, la méthode couple un logiciel de calculs par éléments finis et un logiciel d'optimisation. On présente des résultats pour un tube circulaire à section constante et pour un tube à section variable.*

*ABSTRACT. Shakedown and limit analyses theories are applied to heterogeneous beams which exhibit a periodic microstructure in their axis direction. The objective is to obtain admissible strength domains in terms of macroscopic generalized stresses (tension force, bending and twisting moments). It leads to solve three-dimensional mechanical problems on a periodicity cell. Using a direct approach, based on static theorems, the proposed numerical method couples a finite element code and a nonlinear optimization software. Results are presented for a circular tube with constant section and for a tube with varying section.*

*MOTS-CLÉS : Adaptation élastoplastique, analyse limite, plasticité, homogénéisation, poutres périodiques*

*KEYWORDS: Elastic plastic shakedown, limit analysis, plasticity, homogenization, periodic beams*

---

## 1. Introduction

Les théories de l'analyse limite et de l'adaptation sont utilisées pour étudier la tenue mécanique des structures vis-à-vis de la ruine par dissipation plastique illimitée. Dans le cas de structures périodiques finement hétérogènes, les problèmes deviennent très coûteux à traiter numériquement et il convient d'utiliser des techniques d'homogénéisation [SUQ 83]. Ces techniques consistent à se ramener à un problème posé sur une cellule de base, considérée comme une microstructure soumise à des contraintes ou déformations moyennes ([MAI 00], [MAG 04]).

Dans ce travail, on s'intéresse au cas des poutres hétérogènes périodiques suivant leur axe, et plus précisément à la détermination des domaines d'analyse limite et d'adaptation en termes de contraintes macroscopiques généralisées (tension, flexions, torsion). En utilisant une approche directe statique, on aboutit à des problèmes d'optimisation, posés sur la cellule de base tridimensionnelle. Une formulation spécifique est ensuite introduite pour discrétiser ces problèmes par éléments finis et les résoudre à l'aide d'un logiciel d'optimisation.

## 2. Approche statique de l'adaptation

L'adaptation étant la généralisation de l'analyse limite au cas de trajets de chargements variables et bornés, non monotones proportionnels, on ne s'attache dans la suite qu'au problème d'adaptation, posé sur une structure  $V$ . On suppose que le chargement  $\mathcal{P}(t)$ , appliqué à cette structure, varie dans un polyèdre convexe  $\mathcal{C}$  dont les  $p$  sommets sont appelés cas de charge  $P_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ). Le théorème d'adaptation statique de Melan [MEL 36] peut alors se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes :

$$\alpha^{adap} = \max_{\alpha, \rho} \alpha \quad \text{t.q. :} \begin{cases} \mathcal{F}_y(\alpha \sigma^e(y, P_i) + \rho(y)) \leq 0 \quad \forall y \in V, \quad \forall i = 1, p \\ \rho \text{ auto-équilibré} \end{cases} \quad [1]$$

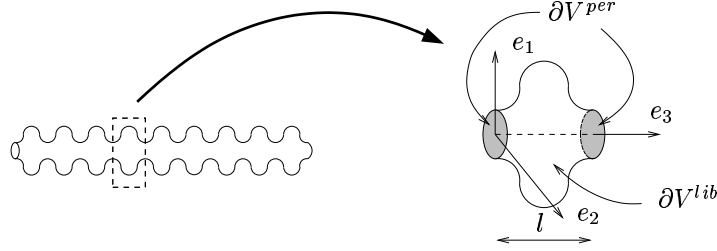
pour lequel les données sont :

- une fonction seuil  $\mathcal{F}_y$ , définissant le domaine de plasticité du matériau (considéré élastoplastique parfait) au point  $y$  de la structure  $V$ ,
- $\sigma^e(y, P_i)$ , la valeur en  $y$  du champ de contraintes qui apparaîtrait dans la structure si, soumise au cas de charge  $P_i$ , ses constituants étaient purement élastiques.

Le résultat  $\alpha^{adap}$  représente le coefficient d'amplification maximal que l'on peut appliquer à l'enveloppe convexe  $\mathcal{C}$  sous la condition d'adaptation de la cellule de base pour tout chargement inclus dans cette enveloppe.

### 3. Homogénéisation et problèmes cellulaires

Dans le cadre de l'homogénéisation de poutres périodiques, la structure  $V$  devient la cellule de base et le chargement  $P_i$  les contraintes ou les déformations macroscopiques généralisées. Le champ de contraintes  $\sigma^e(y, P_i)$  est donc solution du problème de localisation [2]. Ce dernier est établi à l'aide de la technique des développements asymptotiques, appliquée au cas des poutres périodiques [CAR 97].



**Figure 1.** Description de la cellule de base 3D

On appelle  $(y_1, y_2, y_3)$  les coordonnées d'un point de la cellule de base  $V$  dans le repère  $(O, e_1, e_2, e_3)$  tel que  $e_3$  soit colinéaire à l'axe de la poutre (figure 1). On désigne par  $\partial V^{lib}$  son contour, privé de la paire de surfaces  $\partial V^{per}$  qui se correspondent par périodicité. Le problème cellulaire consiste alors à trouver  $u^{per}$  périodique sur  $\partial V^{per}$  et  $\sigma$  tels que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } V \\ \sigma \cdot n & \text{anti-périodique sur } \partial V^{per} \\ \sigma \cdot n = 0 & \text{sur } \partial V^{lib} \\ \sigma = d : \varepsilon & \text{dans } V \\ \varepsilon = \varepsilon^{mac} + \operatorname{grad}_s(u^{per}) & \text{dans } V \end{cases} \quad [2]$$

où  $d$  est le tenseur d'élasticité et  $n$  la normale extérieure au contour. La déformation  $\varepsilon^{mac}$  correspond au champ de déformations tridimensionnel induit par des déformations macroscopiques généralisées d'extension  $E$ , de flexions  $K_1$  et  $K_2$  et de torsion  $E_T$  :  $\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{mac}, \varepsilon_{13}^{mac}, \varepsilon_{23}^{mac}, \varepsilon_{33}^{mac}\} = \{0, -\frac{1}{2} y_2 E_T, \frac{1}{2} y_1 E_T, E + y_2 K_1 - y_1 K_2\}$  (les indices grecs prenant les valeurs 1 et 2). Les contraintes macroscopiques associées sont définies par [3], où  $l$  est la longueur de la période :

$$\{N, M_1, M_2, M_T\} = \frac{1}{l} \int_V \{\sigma_{33}, y_2 \sigma_{33}, -y_1 \sigma_{33}, y_1 \sigma_{23} - y_2 \sigma_{13}\} dV \quad [3]$$

### 4. Discrétisation

Afin d'utiliser la méthode des éléments finis, on établit une formulation spécifique en introduisant dans le principe des puissances virtuelles une cinématique virtuelle

du même type que la cinématique réelle intervenant dans [2]. Les trois premières équations de [2] et les relations [3], rendant un champ de contraintes  $\sigma$  statiquement admissible, sont alors équivalentes à :

$$\begin{aligned} \forall \delta E, \delta K_1, \delta K_2, \delta E_T, \forall \delta u^{per} \text{ périodique sur } \partial V^{per}, \\ \frac{1}{l} \int_V \sigma : (\delta \varepsilon^{mac} + \text{grad}_s(\delta u^{per})) \, dV = \\ \delta E N + \delta K_1 M_1 + \delta K_2 M_2 + \delta E_T M_T \end{aligned} \quad [4]$$

L'implémentation de cette formulation dans le logiciel éléments finis SIC [AUN 90] permet de calculer les contraintes élastiques  $\sigma^e$  intervenant dans le problème d'optimisation [1]. Elle permet aussi de calculer le système d'équations linéaires traduisant les conditions «  $\rho$  auto-équilibré » de [1], c'est-à-dire  $\rho$  statiquement admissible à 0. Les conditions d'inégalités, exprimées en chaque point d'intégration  $X_p$  pour chaque cas de charge  $P_i$ , associées aux conditions d'égalités sur  $\rho$ , permettent de poser le problème d'optimisation discrétisé [5] :

$$\alpha^{adap} = \max_{\alpha, \{\rho\}} \alpha \quad \text{tel que :} \quad \begin{cases} \mathcal{F}_y(\alpha \sigma^e(X_p, P_i) + \rho(X_p)) \leq 0 & \forall X_p, \forall i \\ [C] \{\rho\} = \{0\} \end{cases} \quad [5]$$

Dans [5],  $\{\rho\}$  représente le vecteur concaténation des vecteurs contraintes résiduelles  $\rho(X_p)$  en chaque point d'intégration. On procède ensuite à l'optimisation avec LANCELOT [CON 92] afin de déterminer les domaines de chargements macroscopiques admissibles. Le cas de l'analyse limite (domaine de plasticité homogénéisé) se traite en n'introduisant qu'un seul point de charge dans le problème [5]. Dans les applications, on détermine aussi numériquement le domaine d'élasticité en posant  $\rho(X_p) = 0$  dans [5].

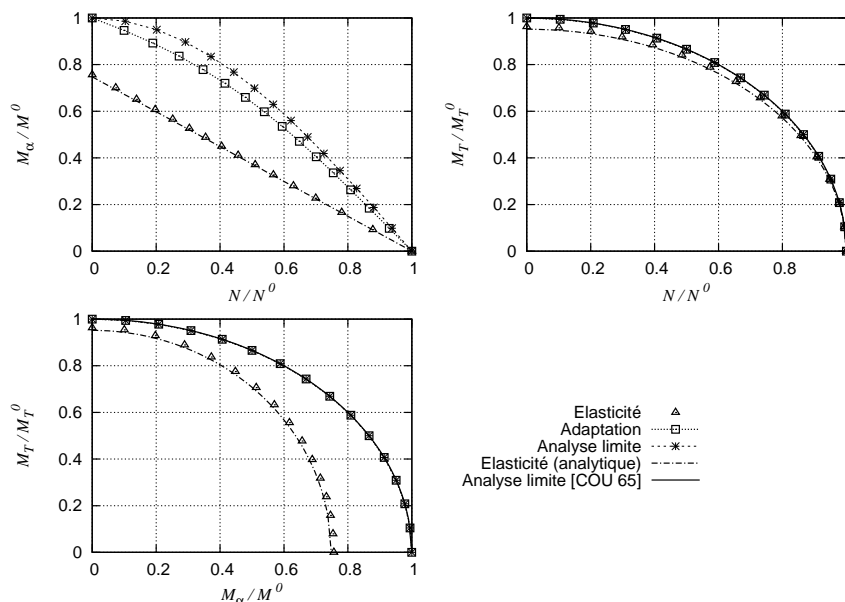
## 5. Applications

Sur les figures 2 et 3, on présente les domaines de résistance obtenus en termes de contraintes macroscopiques généralisées pour plusieurs types de poutres. Les domaines de variation des chargements (pour l'élasticité et l'adaptation) sont des rectangles dont les cotés sont parallèles aux axes et dont un des sommets est confondu avec l'origine. Les courbes représentent les enveloppes de ces rectangles admissibles (élasticité et adaptation) et le domaine de plasticité homogénéisé (analyse limite). Les matériaux constitutifs obéissent au critère de Von-Mises et ont les caractéristiques suivantes : Module d'Young  $Y = 100000$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$  et limite d'élasticité  $\sigma^0 = 200$  MPa.

### 5.1. Tube circulaire à section constante

La figure 2 présente les résultats obtenus pour un tube circulaire à section constante de rayons intérieur  $r_i$  et extérieur  $r_e$  tels que  $r_i = 0.9 r_e$  pour des sollicitations de

traction-flexion, traction-torsion et flexion-torsion. Les domaines sont adimensionnés par rapport aux contraintes d'écoulement  $N^0 = \pi (r_e^2 - r_i^2) \sigma^0$ ,  $M_\alpha^0 = \frac{4}{3} (r_e^3 - r_i^3) \sigma^0$  et  $M_T^0 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi (r_e^3 - r_i^3) \sigma^0$ .

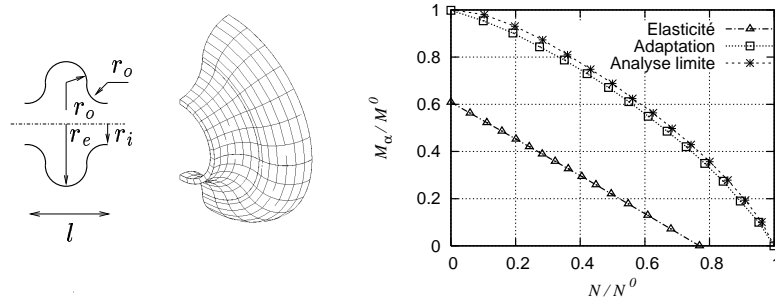


**Figure 2.** Résultats pour un tube circulaire à section constante

Les résultats obtenus sont en accord avec les formules analytiques données pour l'analyse limite par [COU 65] en traction-torsion et flexion-torsion pour un tube mince.

## 5.2. Tube circulaire à section variable

On s'intéresse à un tube circulaire à section variable comme décrit figure 1. La description géométrique est précisée figure 3 avec  $r_o = 0.3 r_e$ ,  $r_i = 0.4 r_e$  et  $l = 1.2 r_e$ , l'épaisseur  $e_p$  du tube vérifiant  $e_p = 0.05 r_e$ . Les résultats présentés figure 3 concernent des chargements en traction-flexion. Sous ces chargements, en considérant les symétries géométriques et matérielles, on peut ne travailler que sur un quart de la période, dont le maillage est donné figure 3. Les domaines sont adimensionnés par rapport aux contraintes d'écoulement  $N^0 = \mu_N^0 r_e^2 \sigma^0$  et  $M_\alpha^0 = \mu_{M_\alpha}^0 r_e^3 \sigma^0$ . Les coefficients adimensionnels  $\mu_N^0$  et  $\mu_{M_\alpha}^0$  sont déterminés numériquement :  $\mu_N^0 = 4.094 \cdot 10^{-2}$ ,  $\mu_{M_\alpha}^0 = 1.596 \cdot 10^{-2}$ .



**Figure 3.** Description géométrique, maillage et résultats pour le tube à section variable

## 6. Conclusion

La méthode proposée permet de déterminer, en terme de contraintes généralisées (tension, flexions et torsion), différents domaines de résistance d'une poutre périodique : domaine d'élasticité initial, d'adaptation et de plasticité homogénéisée. Ces domaines prennent en compte le comportement tridimensionnel de la cellule de base. Cet outil a pour objectif de faciliter le dimensionnement des structures à base de poutres à sections variables périodiques.

## 7. Bibliographie

- [AUN 90] AUNAY S., « Architecture de logiciel de modélisation et traitements distribués », Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1990.
- [CAR 97] CARTRAUD P., « Homogénéisation d'une poutre hétérogène selon son axe, de section et de période de dimensions comparables », *Actes du 3ème colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 20-23 mai 1997, Presses Académiques de l'Ouest, Nantes, p. 265-270.
- [CON 92] CONN A. R., GOULD N. I. M., TOINT P. L., *LANCELOT : A Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization*, vol. tome 2, Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [COU 65] COURBON J., *Résistance des matériaux*, Dunod, Paris, 1965.
- [MAG 04] MAGOARIEC H., BOURGEOIS S., DÉBORDES O., « Elastic plastic shakedown of 3D periodic heterogeneous media : a direct numerical approach », *Int. J. Plasticity*, vol. 20, 2004, p. 1655-1675.
- [MAI 00] MAIER G., CARVELLI V., COCCHETTI G., « On direct methods for shakedown and limit analysis », *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 19 (Special Issue), 2000, p. S79-S100.
- [MEL 36] MELAN E., « Theorie statisch unbestimmter systeme ais ideal-plastischem baustoff », *Sitber. Akad. Wiss, Abt. Ila*, vol. 145, 1936, p. 195-218.
- [SUQ 83] SUQUET P., « Analyse limite et homogénéisation », *C.R. Acad. Sci.*, vol. 296, 1983, p. 1355-1358.