



**HAL**  
open science

# Continuation d'orbites périodiques Application aux modes non linéaires de structures élastiques

Rémi Arquier, Bruno Cochelin

► **To cite this version:**

Rémi Arquier, Bruno Cochelin. Continuation d'orbites périodiques Application aux modes non linéaires de structures élastiques. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813054

**HAL Id: hal-01813054**

**<https://hal.science/hal-01813054>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Continuation d'orbites périodiques

## Application aux modes non linéaires de structures élastiques

**R. Arquier — B. Cochelin**

*Laboratoire de mécanique et d'acoustique (UPR CNRS 7051)  
Ecole généraliste d'ingénieurs de Marseille (EGIM)  
Technopôle de Château-Gombert  
13383 MARSEILLE Cedex 13*

---

*RÉSUMÉ. Cet article décrit une méthode de calcul de modes non linéaires basée sur le principe de continuation de solutions périodiques de l'équation du mouvement. Les solutions périodiques sont discrétisées en temps à l'aide d'un schéma conservatif, puis résolues de manière globale. La formulation du système d'équations de ces orbites ainsi que sa résolution par une méthode asymptotique numérique permettent la détermination des modes non linéaires bien au delà des premières bifurcations. La méthode est applicable pour des structures mécaniques à non linéarités géométriques discrétisées par éléments-finis.*

*ABSTRACT. This article describes a numerical method for the computation of non linear modes of elastic structures. It is based on continuation of periodic solutions of the motion equation. The periodic solutions are time-discretised with a conservative scheme then solved globally. The orbits formulation and the solving with asymptotical numerical method allow fundamental and bifurcated branches computation. The method is suited for mechanical structures with geometrical non linearities discretised with finite elements.*

*MOTS-CLÉS : Modes non linéaires, Invariants de l'espace des phase, Éléments finis, Orbites périodiques, Schémas conservatifs, Continuation, MAN*

*KEYWORDS: Non linear normal modes, Invariant manifold, Finite elements, periodic orbit, energy conserving scheme, continuation, ANM*

---

## 1. Introduction

Au voisinage des positions d'équilibre stables, les systèmes mécaniques non linéaires admettent en général des familles de mouvements oscillants particuliers, périodiques et synchrones. Ces "modes non linéaires" ont été introduits par Lyapunov (1907) puis développée et entendus par, entre autres, Rosenberg (1962), Nayfeh (1973), Shaw et Pierre (1992), Vakakis (1996). Ils sont des extensions directes des fameux "mode normaux linéaires", mais avec une différence très marquée : la fréquence et la déformée modale évoluent continuellement avec l'amplitude des oscillations. En non linéaire, les résonances principales ont lieu au voisinage de ces modes non linéaires ce qui est une motivation forte pour les calculer. De même, ces modes présentent des bifurcations qui permettent d'expliquer certains changements de régimes et les transferts d'énergie dans les systèmes non linéaires. En revanche, contrairement aux modes linéaires, ils ne peuvent être utilisés simplement dans une approche modale par superposition. Aujourd'hui, la définition, le calcul, et l'exploitation de ces modes non linéaires est un domaine de recherche encore largement ouvert.

Dans ce papier, nous proposons une méthode de calcul de ces modes non linéaires basée sur le principe de continuation de solutions périodiques de l'équation du mouvement. Ces solutions périodiques, dénommées aussi "orbites"[SEY 94], sont discrétisées en temps à l'aide d'un schéma conservatif, puis résolues de manière globale comme dans une méthode de collocation. Nous utilisons enfin une méthode de continuation MAN [COC 94] , pour générer le mode tout en "traquant" les bifurcations. Les avantages et inconvénients de cette méthode par rapport aux autres méthodes de la littérature (sous espace invariant, perturbation, équilibrage harmonique) seront dégagés.

## 2. Domaine d'application

Nous nous plaçons dans le domaine des structures élastiques à non linéarité de type géométrique. Nos structures continues sont discrétisées spatialement par la méthode classique d'éléments finis. Enfin, nous recherchons des mouvements non amortis de l'équation du mouvement conservative suivante

$$M\ddot{u} + F_{int}(u) = 0 \quad \text{avec} \quad F_{int}(u) = \frac{\partial E_p}{\partial u} \quad (1)$$

où  $u$  le vecteur déplacement aux noeuds,  $M$  est la matrice de masse,  $F_{int}$  le vecteur des forces intérieures, et  $E_p$  l'énergie potentielle.

### 3. Description de la méthode

#### 3.1. Discrétisation

L'équation (1) est discrétisée en temps à l'aide d'un schéma à conservation de l'énergie mécanique totale [SIM 92]. Contrairement aux schémas implicites classiquement utilisés en mécanique non linéaire (Newmark, HHT), ce schéma est inconditionnellement stable dans le cas des systèmes conservatifs non linéaires [CRI 97], [SIM 92].

#### 3.2. Système global non linéaire définissant une orbite

Classiquement, les orbites périodiques sont calculées à l'aide de méthodes tirs [SEY 94]. Cependant, nos expériences numériques nous ont poussé à utiliser une "méthode globale" qui s'avère être plus robuste et mieux adaptée à notre méthode de continuation. Cette méthode globale consiste à réunir dans un seul vecteur  $Z_{op}$  l'ensemble des états du systèmes  $Z_k, k=0\dots m$  pour chaque pas de temps  $t_k, k=0\dots m$ , et à résoudre simultanément les équations associées à chacun de ces pas de temps. Le système global peut s'écrire ainsi

$$S(Z_{op}, T, \beta, E_0) = \begin{cases} R_d(Z_0, Z_1, T) + \beta D_d(Z_0, Z_1, T) & = & 0 \\ R_d(Z_1, Z_2, T) + \beta D_d(Z_1, Z_2, T) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_d(Z_{m-1}, Z_m, T) + \beta D_d(Z_{m-1}, Z_m, T) & = & 0 \\ Z_0 - Z_m & = & 0 \\ \{Z_0\}_i & = & 0 \\ E_d(Z_0, Z_1) & = & E_0 \end{cases} \quad (2)$$

avec  $Z_k = [U, V]^T$  le vecteur d'état au pas de temps  $k$ ,  $U$  le déplacement aux noeuds,  $V$  le vecteur vitesse des noeuds,  $T$  la période de l'oscillation,  $E_0$  l'énergie totale du système.

Les  $m$  premières équations sont les équations d'équilibre discrétisées écrites pour chacun des pas de temps. Les termes  $R_d(Z_k, Z_{k+1}, T)$  correspondent à l'équation (1) discrétisée en temps. Les termes  $\beta D_d(Z_k, Z_{k+1}, T)$  sont des termes dissipatifs artificiels ajoutés uniquement pour rendre le système linéaire tangent non singulier [MUN 03].

L'équation  $Z_0 - Z_m = 0$  est l'équation de périodicité qui impose l'égalité entre l'état final et l'état initial.

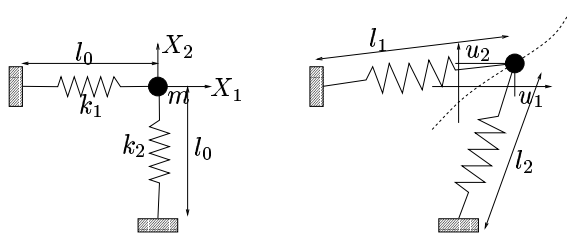
L'équation  $\{Z_0\}_i = 0$  est l'équation de phase, ajoutée afin d'obtenir l'unicité. En effet, le système étant autonome et conservatif (il n'y a pas de terme de forçage), il est nécessaire de fixer un des degrés de liberté ( $i$ ) du vecteur d'état initial  $Z_0$  à zéro, sans quoi les solutions seraient définies à la phase près (si  $Z(t)$  solution alors  $Z(t + \tau)$  serait aussi solution), voir [SEY 94].

L'équation  $E_d(Z_0, Z_1) = E_0$  fixe le niveau de l'énergie mécanique totale de l'oscillation. De ce fait, la valeur de  $E_0$  sélectionne une orbite parmi celles qui définissent le mode non linéaire.  $E_0$  est utilisé comme paramètre de continuation.

Le système (2) ainsi écrit, définit une orbite unique pour une valeur de  $E_0$  donnée. Ce système non linéaire peut être directement résolu par une méthode classique de type Newton-Raphson. Pour obtenir efficacement le mode non linéaire et ses bifurcations, nous utilisons la méthode de continuation MAN dont on trouvera une bibliographie étendue dans [POT 04].

#### 4. Exemples

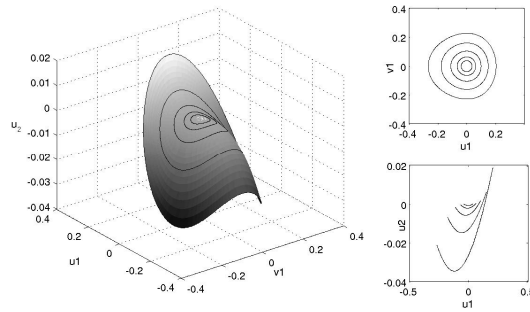
Un premier exemple présenté est une masse mobile reliée à deux ressorts de "Green-Lagrange" (voir fig 1). Les équations du mouvement de ce système sont similaires à celles des structures minces.



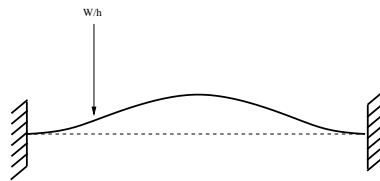
**Figure 1.** Système non linéaire à deux degrés de liberté. Pour la suite  $l_0 = 1$ .

La figure 2 montre l'invariant à deux dimensions (le mode non linéaire) obtenus par la méthode des orbites périodiques.

Le deuxième exemple présenté est une poutre encastrée-encastrée en non linéaire géométrique, voir figure 3. La figure 4,(a) montre une oscillation de la poutre pour une valeur de l'énergie  $E_0$  donnée. La figure 4,(b) montre une projection de l'invariant du mode non linéaire avec quelques branches bifurquées.



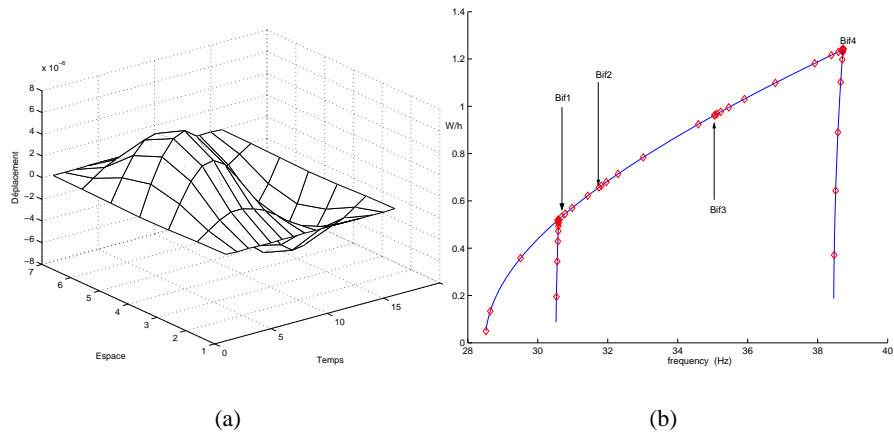
**Figure 2.** Double ressorts. A gauche : Une partie de l'invariant de l'espace des phases, calculé par la méthode des orbites périodiques. A droite : projections de quelques orbites pour quelques valeurs de l'énergie totale  $E_0$ .



**Figure 3.** Poutre encastrée-encastrée.

## 5. Conclusion

Dans ce papier nous avons décrit une méthode permettant la détermination de modes non linéaires de structures élastiques possédant des géométries arbitraires, discrétisées par éléments finis. Cette méthode exhibe de larges systèmes algébriques quadratiques qui sont résolus par la MAN. La comparaison de résultats de continuations avec deux autres méthodes de calcul de modes non linéaires telle que l'Équilibrage Harmonique [PER 04] et la méthode amplitude-phase [BOU 05] ont permis de valider l'approche. Nous poursuivons maintenant sur des structures plus complexes constituées de poutres, de plaques, et de coques.



**Figure 4.** poutre encastree-encastree. (a) Mouvement sur le mode non lineaire pour une valeur d'energie d'oscillation donnee. (b) Continuation du mode. En abscisse, la frequence d'oscillation  $1/T$  et en ordonnee, le deplacement maximal normalise au milieu de la poutre. Les bifurcations du mode sont detectees et les branches bifurquees peuvent etre calculees.

## 6. Bibliographie

- [BOU 05] BOUC R., BELLIZZI S., « A new formulation for the existence and calculation of non linear normal modes », à paraître, *Journal of sound and vibrations*, , 2005.
- [COC 94] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M., « Asymptotic numerical methods and Pade approximants for non-linear elastic structures », *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 37, 1994, p. 1187-1213.
- [CRI 97] CRISFIELD M., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, vol. 1, John Wiley and Sons, 1997.
- [MUN 03] MUNOZ-ALMARAZ F., FREIRE E., GALAN J., DOEDEL E., VANDERBAUWHEDÉ A., « Continuation of periodic orbits in conservative and Hamiltonian systems », *Physica D*, vol. 181, 2003, p. 1-38.
- [PER 04] PERIGNON F., « Reponse forcee de structure minces en non lineaire geometrique », PhD thesis, Universite de la mediterranee . Marseille, 2004.
- [POT 04] POTIER-FERRY P., CADON J. M., « Basic ANM Algorithms for path solving problems », *Revue Europeenne des Elements Finis*, vol. 13, 2004, p. 9-32.
- [SEY 94] SEYDEL R., *Practical Bifurcation and Stability Analysis, from equilibrium to chaos*, Springer-Verlag, second edition, 1994.
- [SIM 92] SIMO J. C., TARNOW N., « The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics », *Z angew Math Phys*, vol. 43, 1992, p. 757-792.