



**HAL**  
open science

## Fissuration avec X-FEM et contact

Patrick Massin, Samuel Geniaut, Nicolas Moes

► **To cite this version:**

Patrick Massin, Samuel Geniaut, Nicolas Moes. Fissuration avec X-FEM et contact. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813042

**HAL Id: hal-01813042**

**<https://hal.science/hal-01813042>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Fissuration avec X-FEM et contact

**Patrick Massin\* – Samuel Geniaut\* – Nicolas Moës\*\***

*\*LaMSID, CNRS-EDF, UMR 2832*

*1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart*

*{patrick.massin, samuel.geniaut}@edf.fr*

*\*\*GeM, École Centrale de Nantes/Université de Nantes/UMR 6183*

*1, rue de la Noé, 44321 Nantes Cedex 3*

*nicolas.moes@ec-nantes.fr*

---

*RÉSUMÉ. Une nouvelle technique de prise en compte du contact frottant sur les lèvres des fissures est présentée. La méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method) permet d'introduire des fissures indépendamment du maillage considéré. Ce papier explique comment nous avons adapté une formulation continue proche du Lagrangien Augmenté pour le contact au cadre X-FEM. Des exemples numériques traités par le Code\_Aster viennent illustrer l'emploi de cette approche pour résoudre des problèmes tridimensionnels de contact avec frottement.*

*ABSTRACT. We present a new technique for modelling cracks with frictional contact on crack faces. The eXtended Finite Element Method (X-FEM) allows one to introduce cracks independently of the mesh. This paper shows how we have adapted a continuous formulation derived from the Augmented Lagrangian Method for contact problems to the X-FEM framework. Numerical examples performed by the Code\_Aster illustrate this approach for solving three-dimensional problems with frictional contact.*

*MOTS-CLÉS : X-FEM, contact frottant, fissure, 3D.*

*KEYWORDS: X-FEM, frictional contact, crack, 3D.*

---

## 1. Contexte

Les études de fissuration non-transverse des rotors des centrales nucléaires ont mis en évidence la nécessité de nouvelles méthodes numériques utilisant des maillages non perturbés géométriquement par la présence d'une fissure. La méthode X-FEM (Moës *et al.*, 1999) permet au maillage de ne pas se conformer à la géométrie des fissures, grâce à un enrichissement de l'approximation éléments finis. Nous avons adapté une méthode continue (Ben Dhia *et al.*, 2002) pour la prise en compte du contact sur les lèvres de la fissure en 3D dans le cadre X-FEM. Nous présentons des applications numériques 3D de fissures sous contact frottant avec le *Code\_Aster*, code éléments finis de mécanique générale développé par EDF.

## 2. Problème de contact frottant et formulation variationnelle mixte associée

Dans cette partie, on rappelle les équations du problème non-linéaire de contact frottant. On considère un domaine  $\Omega \subset \mathfrak{R}^3$  comportant une fissure  $\Gamma_C$ .  $\partial\Omega$  est la bordure de  $\Omega$  de normale extérieure  $\mathbf{n}_{ext}$ . Si la fissure traverse complètement le domaine, on parlera d'interface et on notera par les indices 1 et 2 les deux domaines ainsi délimités ( $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ). Les surfaces de contact sont notées  $\Gamma^1$  et  $\Gamma^2$  de normales extérieures  $\mathbf{n}^1$  et  $\mathbf{n}^2$  et on désignera par  $\mathbf{r}^1$  et  $\mathbf{r}^2$  les densités des efforts dues aux interactions de contact frottant éventuelles entre les deux surfaces. Les champs de contraintes et de déplacements sont respectivement notés  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{u}$ . Un chargement quasi-statique est imposé sur la structure par l'intermédiaire d'une densité de forces volumiques  $\mathbf{f}$  et d'une densité de forces surfaciques  $\mathbf{t}$  sur  $\Gamma_t$ . On prendra  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ . Le solide est encastré sur  $\Gamma_u$ .

Nous nous plaçons dans le cadre des petits déplacements, en considérant un matériau élastique linéaire. La loi de comportement du solide  $\Omega$  s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \text{ dans } \Omega$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur de Hooke et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  la partie symétrique du gradient de  $\mathbf{u}$ .

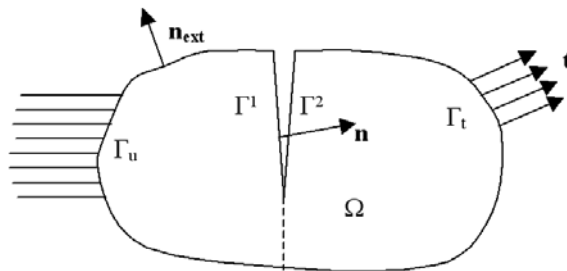


Figure 1. Notations du problème

### 2.1 Lois du contact frottant

Soit  $p$  un point de  $\Gamma_c$ . On note  $p^1$  et  $p^2$  la position des points initialement coïncidant sur  $\Gamma^1$  et  $\Gamma^2$  respectivement. La condition de non-interpénétration entre  $p^1$  et  $p^2$  est écrite dans la direction de la normale à  $\Gamma^1$   $\mathbf{n} = \mathbf{n}^1$

$$d_n = (\mathbf{x}(p^1) - \mathbf{x}(p^2)) \cdot \mathbf{n} \leq 0$$

On décompose la densité d'effort de contact  $\mathbf{r}$  en une partie normale  $\lambda$  qui désigne la pression normale de contact et une autre tangentielle  $\mathbf{r}_\tau$ . Avec ces notations, les lois de contact s'écrivent sous la forme suivante :

$$d_n \leq 0, \lambda \leq 0, \lambda d_n = 0$$

Pour les phénomènes de frottement, on utilise les lois de Coulomb suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_\tau\| &\leq \mu |\lambda| \\ \text{Si } \|\mathbf{r}_\tau\| < \mu |\lambda| &\quad \text{alors} \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{0} \\ \text{Si } \|\mathbf{r}_\tau\| = \mu |\lambda| &\quad \text{alors } \exists \alpha \geq 0 ; \quad \mathbf{v}_\tau = -\alpha \mathbf{r}_\tau \end{aligned}$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement de Coulomb et  $\mathbf{v}_\tau$  la vitesse relative tangente.

### 2.2 Formulation variationnelle mixte

Le champ  $\mathbf{u}$  doit appartenir à l'ensemble  $\mathbf{V}_0$  des champs suffisamment réguliers de déplacements cinématiquement admissibles. Désignons par  $\mathbf{H}$  l'espace des champs d'actions de contact. La formulation faible à trois champs (Zarroug, 2002) s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{\Lambda}) \in \mathbf{V}_0 \times H \times \mathbf{H}, \quad \forall (\mathbf{v}, \lambda^*, \mathbf{\Lambda}^*) \in \mathbf{V}_0 \times H \times \mathbf{H} \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Gamma_c} \chi(g_n) g_n \mathbf{n} \cdot [[\mathbf{v}]] d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c} \chi(g_n) \mu \lambda P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_\tau) \cdot [[\mathbf{v}]] d\Gamma_c = 0 \quad [1] \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-1}{\rho_n} \{ \lambda - \chi(g_n) g_n \} \lambda^* d\Gamma_c = 0$$

$$\int_{\Gamma_c} \frac{-\mu \chi(g_n) \lambda}{\rho_\tau} \{ \mathbf{\Lambda} - P_{B(0,1)}(\mathbf{g}_\tau) \} \mathbf{\Lambda}^* d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} (1 - \chi(g_n)) \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^* d\Gamma_c = 0$$

$$g_n = \lambda - \rho_n d_n \quad , \quad (\rho_n > 0)$$

$$\mathbf{g}_\tau = \mathbf{\Lambda} + \rho_\tau \mathbf{v}_\tau \quad , \quad (\rho_\tau > 0)$$

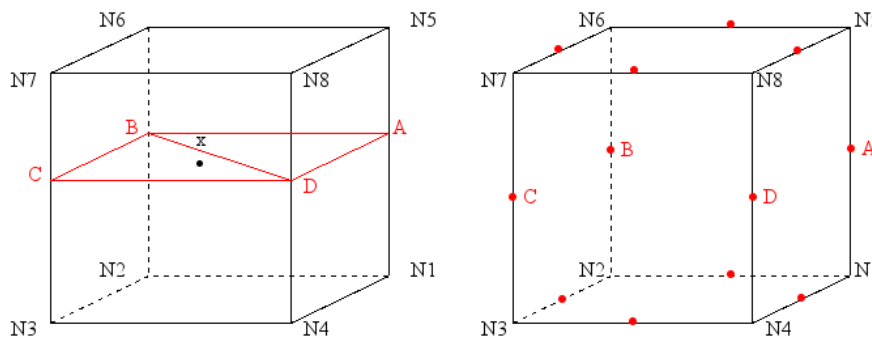
où le double crochet représente le saut, et la fonction  $\chi$  vaut 1 si  $x < 0$  et 0 sinon.

### 3. Originalité des discrétisations éléments finis

La méthode X-FEM est basée sur la partition de l'unité (Melenk *et al.*, 1996) et propose d'enrichir la base des fonctions de forme (Moës *et al.*, 1999) dans un voisinage de la fissure. Nous concentrerons notre attention sur les éléments finis entièrement coupés en deux par la fissure, enrichis par une fonction Heaviside. La particularité de cette méthode appliquée au contact est que le saut de déplacement dans l'équation [1] est directement relié à ces degrés de liberté enrichis.

Nous avons choisi comme inconnues pour la pression de contact  $\lambda$  et le semi-multiplicateur de frottement  $\Lambda$  les valeurs aux points d'intersection entre les arêtes des éléments et la surface de la fissure. Au sein d'un élément, ces points d'intersection définissent un polygone non nécessairement plan, qui n'est associé à aucun élément fini connu. La méthode retenue a été celle qui consiste à découper ce polygone en facettes triangulaire dont les sommets sont les points d'intersection (voir Figure 2a). L'approximation de la pression de contact fait intervenir les  $\psi_i$ , fonctions de forme du triangle à 3 nœuds et s'écrit :

$$\lambda^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \psi_i(\mathbf{x}) \quad [2]$$



**Figure 2a et 2b.** Exemple de découpage en facettes triangulaires sur un hexaèdre et nœuds milieux associés

Dans l'équation [2], on remarque que les  $\lambda_i$  sont associés à des points qui ne font pas partie du maillage. Pour retrouver un cadre éléments finis classique, nous avons décidé de les associer aux nœuds milieux des arêtes considérées (même si les points d'intersection ne sont pas exactement au milieu des arêtes). Cet artifice est seulement destiné à une implémentation simple dans un code éléments finis général, qui n'accepte que des inconnues nodales. Dans l'exemple de la Figure 2b, seuls les

nœuds milieux A, B, C, D portent des inconnues de contact, les autres nœuds milieux ne portent aucun degré de liberté et sont alors inactivés. Si la surface de contact coïncide avec une face d'un élément, alors les points de contact sont des nœuds du maillage et les degrés de liberté de contact sont alors portés par des nœuds sommet des éléments finis.

L'intégration numérique des termes élémentaires de contact se fait sur chaque facette avec un schéma à 12 points de Gauss pour intégrer des monômes de degré 6.

#### 4. Applications numériques

Cette partie a pour but de présenter deux exemples d'applications traitées avec le *Code\_Aster*. Nous soulignons que la méthode a été implémentée en 3D.

On considère un bloc rectangulaire avec une interface de normale  $\mathbf{n}$  (voir Figure 3a) chargé en compression par  $\sigma_{zz}$  sur les faces supérieures et inférieures. Il est discrétisé par un maillage régulier de  $20 \times 20 \times 10$  hexaèdres. Le matériau a un module d'Young  $E = 100$  MPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . On prend en compte plusieurs positions angulaires de l'interface :  $\theta = 0^\circ$  (l'interface suit les faces des éléments) et  $\theta = 22.5^\circ$  (l'interface coupe les éléments). Le papier sur le contact avec X-FEM (Dolbow *et al.*, 2001) traite le même problème en se limitant au 2D. Il utilise un schéma itératif visant à satisfaire successivement le comportement et la condition de contact, et étudie la convergence suivant un coefficient de raideur de rappel entre les lèvres. Le cas où  $\theta = 22.5^\circ$  est traité avec un coefficient de frottement de Coulomb  $\mu > \tan(\theta)$  de telle sorte qu'il y ait adhérence. Au final, on retrouve la valeur analytique de la pression de contact :

$$\lambda = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = n_z \sigma_{zz} n_z$$

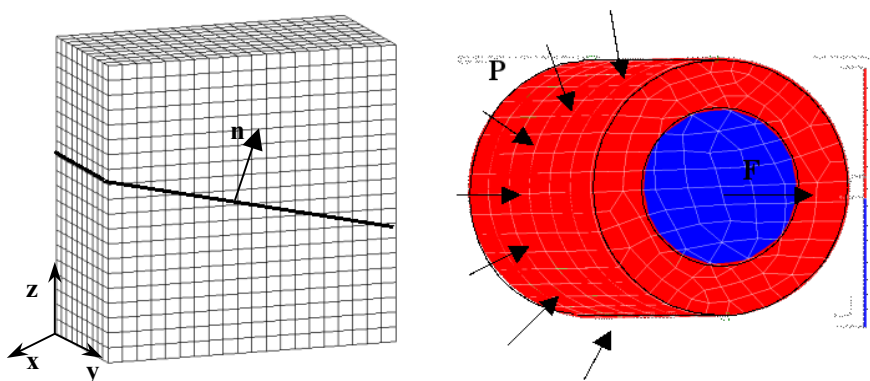


Figure 3a et 3b. Maillages du bloc 3D et du cylindre

Le deuxième exemple est un cylindre plein traversé par une interface circulaire le long de sa hauteur. On remarque que le maillage (Figure 3b) ne suit pas l'interface, représentée par la frontière entre les domaines rouge et bleu.

Grâce à X-FEM, le cylindre intérieur peut se désolidariser du cylindre extérieur, sous l'effet du chargement appliqué : pression  $P$  sur la pourtour du cylindre extérieur et traction  $F$  sur le nœud central de la face supérieure du cylindre intérieur.

## 5. Conclusion et perspectives

Une méthode originale de prise en compte du contact sur les lèvres de la fissure dans le cadre de X-FEM en 3D a été présentée. Celle-ci s'appuie sur une formulation variationnelle mixte du problème de contact frottant. Une attention particulière a été donnée à la mise en place dans un code éléments finis général.

À terme est visée la résolution de problèmes de propagation de fissures en grands déplacements dans des cadres variés comme la thermique ou la plasticité.

## 6. Bibliographie

- Ben Dhia H., Zarroug M., « Hybrid frictional contact particles-in elements », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 9, 2002, p. 417-430.
- Dolbow J., Moës N., Belytschko T., « An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, 2001, p. 6825-6846.
- Melenk J.M., Babuška I., « The partition of unity finite element method: Basic theory and applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering et Science*, vol. 139, 1999, p. 289-314.
- Moës N., Dolbow J., Belytschko T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering et Science*, vol. 46, 1999, p. 131-150.
- Zarroug M., Éléments mixtes de contact frottant en grandes transformations et applications, Thèse de doctorat, École Centrale de Paris, 2002.