



**HAL**  
open science

## Modèles réduits de structures minces en vibrations non-linéaires

Olivier Thomas, Cyril Touzé, Éric Luminais

► **To cite this version:**

Olivier Thomas, Cyril Touzé, Éric Luminais. Modèles réduits de structures minces en vibrations non-linéaires. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813035

**HAL Id: hal-01813035**

**<https://hal.science/hal-01813035>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Modèles réduits de structures minces en vibrations non-linéaires

Olivier Thomas\* — Cyril Touzé\*\* — Éric Luminais

\* *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés,  
CNAM, 2 rue Conté 75003 Paris  
olivier.thomas@cnam.fr*

\*\* *Unité de Mécanique,  
ENSTA, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex  
Cyril.Touze@ensta.fr*

---

*RÉSUMÉ. Lorsque des structures sont sujettes à des vibrations de grande amplitude, des phénomènes non-linéaires sont observés. Notamment, des couplages entre modes propres sont courants, si bien que des transferts d'énergie apparaissent, vers des bandes de fréquences non contenues dans l'excitation et vers des zones de la structure non sollicitées a priori. Cet article montre, à partir de deux exemples de vibration non-linéaire d'une calotte sphérique, l'utilisation de modes non-linéaires pour construire des modèles réduits de vibration. Le premier exemple permet de prédire le caractère raidissant ou assouplissant des modes de la coque. Le second exemple est celui d'une combinaison de résonance 1 :1 :2, entre un mode axisymétrique et deux modes asymétriques compagnons. Des transferts d'énergie sont mis en évidence et la qualité du modèle évaluée par comparaison avec des résultats expérimentaux.*

*ABSTRACT. This article is devoted to geometrically non-linear vibrations of thin structures. In those cases, energy transfers from one frequency band to another and from one part of the structure to another are usually observed. Two example of non-linear vibration of a shallow spherical shell have been selected to show the use of non-linear modes to built efficient reduced order models. In the first example, the trend of non-linearity (hardening/softening behaviour) for each mode of the shell is predicted as a function of its geometry. In the second example, a specific mode coupling due to a 1:1:2 internal resonance between two companion modes and an axisymmetric mode is studied. The solution of the model is compared to experimental results.*

*MOTS-CLÉS : Coque sphériques, non-linéarités géométriques, résonances internes, vibrations non-linéaires, modes non-linéaires*

*KEYWORDS: shallow spherical shells, geometrical non-linearities, internal resonances, non-linear vibrations, non-linear modes*

---

## 1. Introduction

Lorsque les structures sont sujettes à des grands déplacements créés par des sollicitations de niveaux élevés, des phénomènes typiquement non-linéaires apparaissent. En particulier, des phénomènes de couplage entre modes sont courants, de telle sorte qu'une excitation dans une bande de fréquence donnée peut conduire à de fortes oscillations à des fréquences différentes [NAY 00]. Les techniques linéaires classiquement utilisées sont insuffisantes, et l'intégration directe des équations non-linéaires trop coûteuse en temps de calcul. Cet article montre comment des modèles à nombre réduit de degrés de libertés utilisant des modes non-linéaires (MNL) permet d'une part de comprendre les phénomènes non-linéaires mis en jeu et d'autre part de simuler et prédire l'évolution vibratoire du système. On verra aussi qu'une caractéristique importante des MNL est que la prévision de la taille du modèle réduit *non-linéaire* ne dépend que des éventuels relations de résonances entre les fréquences propres de la structure, une caractéristique issue d'une analyse *linéaire*. On s'intéresse à des vibrations de calottes sphériques faiblement courbées, dont la simplicité (en particulier, la géométrie est définie par un seul rayon de courbure) offre l'avantage qu'il est possible de mener très loin les calculs formels.

Deux cas de vibrations non-linéaires sont traités ici. En premier lieu, on utilise un modèle réduit fondé sur un seul mode non-linéaire pour prédire le comportement raidissant ou assouplissant des modes de la coque. Lorsque l'amplitude des oscillations de la structure devient de l'ordre de grandeur de l'épaisseur, on observe que les fréquences des oscillations libres, pour chacun des modes de la structure, deviennent dépendante de l'amplitude. Selon le mode considéré et selon la géométrie de la structure (son rayon de courbure), la fréquence augmente ou diminue en fonction de l'amplitude et le mode considéré est dit raidissant ou assouplissant<sup>1</sup>. En second lieu, on s'intéresse à une résonance interne sous-harmonique, où un mode axisymétrique (mode 3, de fréquence  $\omega_3$ ) et deux modes asymétrique compagnons (mode 1 et 2, de fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) ont leur fréquences propres telles que  $\omega_1 \simeq \omega_2$  et  $\omega_3 \simeq 2\omega_2$ . Lorsqu'on force la structure par un effort sinusoïdal de fréquence proche de  $\omega_3$ , on observe un transfert d'énergie vers les modes 1 et 2, qui se trouvent excités par couplage non-linéaire à des amplitudes voisines de celle du mode 3. Le modèle à 3 degrés de liberté (ddl.) ainsi obtenu ainsi qu'une validation expérimentale sont présentés ici.

## 2. Modèle théorique général et modèle réduit

On rappelle ici les principales étapes de calcul présentées dans [THO 05]. On considère une coque sphérique, d'épaisseur  $h$ , de rayon de courbure  $R$ , de diamètre extérieur  $2a$ , constitué d'un matériau linéaire élastique homogène et isotrope de module d'Young  $E$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et de masse volumique  $\rho$ . Moyennant des hypothèses associées aux modèles de structures minces faiblement courbées, les vibrations de la coque sont régies par les équations suivantes :

---

1. *hardening* et *softening* dans la littérature anglo-saxonne

$$D\Delta\Delta w + \frac{1}{R}\Delta F + \rho h\ddot{w} = L(w, F) - c\dot{w} + p, \quad \Delta\Delta F - \frac{Eh}{R}\Delta w = -\frac{Eh}{2}L(w, w), \quad (1)$$

où  $w$  est le déplacement transverse et  $F$  une fonction d'Airy représentant les efforts de membrane. De plus,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  est la rigidité de flexion,  $c$  le coefficient d'amortissement,  $p$  représente une force normale surfacique d'excitation,  $\ddot{w}$  la dérivée seconde de  $w$  par rapport au temps,  $\Delta$  le laplacien et  $L$  un opérateur quadratique bilinéaire représentant le couplage non-linéaires géométrique entre le déplacement transverse et les efforts de membrane.

On cherche une solution aux équations (1) sous la forme :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \Phi_p(r, \theta) q_p(t). \quad (2)$$

où les  $\{\Phi_p\}_{p=1\dots+\infty}$  sont les déformées modales de la coque (ce sont les solutions spatiales du problème linéaires associée à (1), calculés analytiquement pour des conditions aux limites libres dans [THO 05]). Après quelques calculs, on montre que les fonctions temporelles  $\{q_s\}_{s=1\dots+\infty}$  sont solutions de :

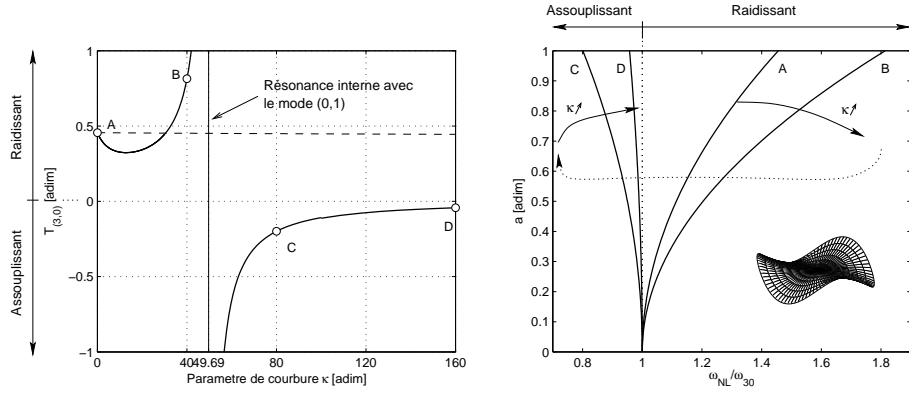
$$\begin{aligned} \ddot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) = \varepsilon_q \left[ - \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \beta_{pq}^s q_p(t) q_q(t) - 2\mu_s \dot{q}_s(t) + \tilde{Q}_s(t) \right] \\ - \varepsilon_c \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{+\infty} \Gamma_{pqr}^s q_p(t) q_q(t) q_r(t), \end{aligned} \quad (3)$$

où  $\omega_s$  est la pulsation propre du  $s^e$  mode,  $\mu_s$  est un coefficient d'amortissement dont la valeur peut être ajustée en fonction du mode considéré,  $\beta_{pq}^s$  et  $\Gamma_{pqr}^s$  sont des coefficients calculés à partir des déformées modales,  $\tilde{Q}_s(t)$  est une fonction d'excitation modale et  $\varepsilon_q$  et  $\varepsilon_c$  sont deux paramètres dépendant de la géométrie.

Le problème continu initial décrit par les équations (1) a été remplacé par le système (3), constitué d'oscillateurs couplés par des termes non-linéaires. Différentes méthodes de résolution peuvent être utilisées (méthodes de perturbations, intégration numérique...); elles supposent toutes d'avoir préalablement tronqué le système (3). Cette opération doit être effectuée avec soin car une troncature trop sévère peut mener à des résultats erronés, notamment sur le caractère raidissant ou assouplissant des modes [NAY 92, AMA 99, TOU 04a]. La théorie des MNL et celle des formes normales permet de définir un cadre théorique rigoureux à partir duquel la troncature est effectuée sans erreurs [TOU 04a, TOU 04b]. Cela conduit à utiliser un changement de variable non-linéaire pour remplacer le système dynamique (3) par un système analogue, beaucoup plus léger à résoudre, car tous les termes non-résonnants ont été éliminés et qu'il est constitué d'un nombre  $n$  "petit" d'oscillateurs.  $n$  est le nombre de modes excités, soit directement par un forçage résonnant (les  $\{\tilde{Q}_s\}$ ), soit indirectement par couplage

non-linéaire via une résonance interne<sup>2</sup>. Après résolution, il suffit de faire un changement de variable inverse pour obtenir la réponse réelle du système. Ceci est illustré au paragraphe suivant.

### 3. Oscillations libres : comportement modal raidissant ou assouplissant



**Figure 1.** Comportement raidissant et assouplissant du mode  $(3,0)$  de la coque. À gauche, évolution du paramètre  $T_{(3,0)}$  en fonction de  $\kappa = a^4/R^2h^2$ ; à droite, 4 évolutions de  $\omega_{NL}/\omega_{30}$  en fonction de l'amplitude des oscillations, pour les 4 valeurs de  $\kappa$  (A, B, C et D) représentées à gauche par des 'o'.

On se place dans le cas d'oscillations libres non amorties ( $\tilde{Q}_s(t) \equiv 0$  et  $\mu_s \equiv 0$ ). Les MNL sont introduits par le changement de variable suivant :

$$q_p(t) = r_p(t) + \mathcal{P}^{(3)}[r_i(t), \dot{r}_i(t)], \quad \dot{q}_p(t) = \dot{r}_p(t) + \mathcal{Q}^{(3)}[r_i(t), \dot{r}_i(t)]. \quad (4)$$

où  $\mathcal{P}^{(3)}$  et  $\mathcal{Q}^{(3)}$  sont des polynômes de degré 3, calculés de façon formelle dans [TOU 04a] en fonction des  $\beta_{pq}^s$  et  $\Gamma_{pqr}^s$ . On obtient alors un nouveau système où chaque oscillateur est *invariant*, ce qui signifie que si de l'énergie est envoyée sur le  $p^e$  oscillateur uniquement (par exemple avec des conditions initiales non-nulles), aucune énergie n'est transmise vers les autres oscillateurs. C'est ce cas qui nous intéresse ici. Le problème s'écrit alors au moyen d'un seul oscillateur ( $n = 1$ ) :

$$\forall i \neq p \quad r_i(t) \equiv \dot{r}_i(t) \equiv 0 \quad (5)$$

$$\ddot{r}_p(t) + \omega_p^2 r_p(t) = -(\varepsilon_q^2 A_{ppp}^p + \varepsilon_c \Gamma_{ppp}^p) r_p^3(t) - \varepsilon_q^2 B_{ppp}^p r_p(t) \dot{r}_p^2(t), \quad (6)$$

2. Les termes non-linéaires résonnants du  $s^e$  mode (dans le  $s^e$  oscillateur de (3)) sont ceux qui produisent une excitation dont le support fréquentiel est proche de  $\omega_s$  (on parle d'excitation résonante). Cela arrive lorsque des relations de résonances internes entre les pulsations propres de la structure existent, définies par les relations algébriques suivantes :  $\omega_p \simeq \omega_q$  ou  $\omega_p \simeq 2\omega_q$  ou  $\omega_p \simeq \omega_q \pm \omega_k$  ou  $\omega_p \simeq 3\omega_q$  ou  $\omega_p \simeq 2\omega_q \pm \omega_k$  ou  $\omega_p \simeq \omega_q \pm \omega_k \pm \omega_m$ .

où les  $A_{ppp}^p$  et  $B_{ppp}^p$  sont issus de  $\mathcal{P}^{(3)}$  et  $\mathcal{Q}^{(3)}$  [TOU 04a]. Par une méthode de perturbation tronquée au premier ordre, on obtient :

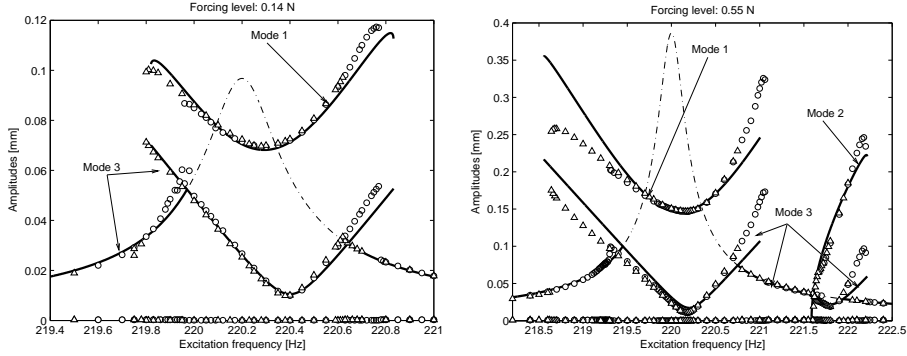
$$w(r, \theta, t) = \Phi_p(r, \theta)q_p(t) + \sum_{i \neq p} \Phi_i(r, \theta)q_i(t) = \Phi_p(r, \theta)r_p(t) + O(\varepsilon_c), \quad (7)$$

$$r_p(t) = a \cos(\omega_{NL}t + \varphi), \quad \omega_{NL} = \omega_p(1 + T_p a^2), \quad (8)$$

$$T_p = \frac{1}{8\omega_p^2} [3(\varepsilon_q^2 A_{ppp}^p + \varepsilon_c \Gamma_{ppp}^p) + \omega_p^2 \varepsilon_q^2 B_{ppp}^p]. \quad (9)$$

On constate alors que la fréquence  $\omega_{NL}$  des oscillations dépend de l'amplitude  $a$  de celles-ci et que le signe de  $T_p$  permet d'évaluer le caractère raidissant ou assouplissant du  $p^e$  mode considéré. La figure 1, obtenue à partir du calcul des  $\beta_{pq}^s$  et  $\Gamma_{pqr}^s$  de [THO 05], illustre cela. Une alternative classique mais erronée aurait été de tronquer directement le système initial (3) en imposant  $\forall s \neq p \quad q_s(t) \equiv \dot{q}_s(t) \equiv 0$ , sans utiliser le changement de variable lié aux modes non-linéaires [TOU 04a].

#### 4. Oscillations forcées : combinaison de résonance 1 : 1 : 2



**Figure 2.** Comparaison modèle ('-') / expérience ('o', '\Delta')

On se place maintenant dans le cas où la structure est excitée par un effort sinusoïdal au centre, avec une fréquence  $\Omega$  proche de  $\omega_3$ , la fréquence propre du mode (0, 1) de la coque (mode à 1 cercle nodal seulement). Les deux modes compagnons (6, 0) (modes à 6 diamètres nodaux) ont leurs fréquences propre telles que  $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq \omega_3/2$ . Les trois modes étant de ce fait en résonance interne, le modèle se réduit à 3 ddl. ( $n = 3$ ) et le système (3) devient [THO 05] :

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon_q [\alpha_1 q_1 q_3 - 2\mu_1 \dot{q}_1], \quad \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon_q [\alpha_2 q_2 q_3 - 2\mu_2 \dot{q}_2], \quad (10)$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = \varepsilon_q [\alpha_3 q_1^2 + \alpha_4 q_2^2 - 2\mu_3 \dot{q}_3 + Q \cos \Omega t]. \quad (11)$$

Par une résolution perturbative, on obtient au premier ordre en régime permanent :

$$w(r, \theta, t) = \Phi_1(r, \theta)q_1(t) + \Phi_2(r, \theta)q_2(t) + \Phi_3(r)q_3(t), \quad (12)$$

$$q_1(t) = a_1 \cos(\Omega/2t - \varphi_1), \quad q_2(t) = a_2 \cos(\Omega/2t - \varphi_2), \quad (13)$$

$$q_3(t) = a_3 \cos(\Omega t - \gamma_3). \quad (14)$$

La figure 2 montre l'évolution des amplitudes  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  des 3 modes en fonction de la fréquence d'excitation  $\Omega$ , pour deux amplitudes  $Q$  d'excitation distinctes. Une très bonne correspondance qualitative entre la théorie et l'expérience est observée. Les non-linéarités produisent un transfert d'énergie à la fois fréquentiel (de  $\Omega$  vers  $\Omega/2$ ) et spatial (du centre de la coque, le mode (0, 1), vers les bords, les modes (6, 0)).

## 5. Conclusion

Cet article a permis de présenter la méthode de résolution avec modèle réduit sur deux exemples. Le premier a montré l'efficacité des modes non-linéaires pour obtenir le caractère raidissant ou assouplissant des modes de la coque. Dans le deuxième exemple, les échanges d'énergie entre les 3 modes ont été mis en évidence.

La présente méthode offre les avantages suivants : (i) une réduction substantielle de la taille du problème à résoudre, sans pour autant perdre en exactitude et en finesse de la modélisation ; (ii) une introduction aisée de l'amortissement, de façon heuristique, par ajout d'un terme visqueux dans chaque équation modale ; (iii) une symbiose modèle/expérience facilitée par le fort contenu physique des modes propres. L'étape suivante consistera à étendre cette méthode à des structures de géométrie plus complexe, en utilisant la méthode des éléments finis pour le calcul des coefficients de (3).

## 6. Bibliographie

- [AMA 99] AMABILI M., PELLICANO F., PAÏDOUSSIS M. P., « Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid, part II : large-amplitude vibrations without flow », *J. Sound Vib.*, vol. 228, n° 5, 1999, p. 1103-1124.
- [NAY 92] NAYFEH A. H., NAYFEH J. F., MOOK D. T., « On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities », *Nonlinear Dynamics*, vol. 3, 1992, p. 145-162.
- [NAY 00] NAYFEH A. H., *Nonlinear interactions*, J. Wiley & sons, 2000.
- [THO 05] THOMAS O., TOUZÉ C., CHAIGNE A., « Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 :1 :2 internal resonance », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, n° 11-12, 2005, p. 3339-3373.
- [TOU 04a] TOUZÉ C., THOMAS O., CHAIGNE A., « Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes », *J. Sound. Vib.*, vol. 273, n° 1-2, 2004, p. 77-101.
- [TOU 04b] TOUZÉ C., THOMAS O., HUBERDEAU A., « Asymptotic non-linear normal modes for large amplitude vibrations of continuous structures », *Computers and Structures*, vol. 82, n° 31-32, 2004, p. 2671-2682.