Résolution des problèmes de plasticité par la méthode asymptotique numérique

Hamid Zahrouni, Bouazza Braikat, Noureddine Damil, Michel Potier-Ferry

▶ **To cite this version:**

Hamid Zahrouni, Bouazza Braikat, Noureddine Damil, Michel Potier-Ferry. Résolution des problèmes de plasticité par la méthode asymptotique numérique. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813031

HAL Id: hal-01813031
https://hal.science/hal-01813031

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Résolution des problèmes de plasticité par la méthode asymptotique numérique

H. Zahrouni* — B. Braikat — N. Damil** — M. Potier-Ferry***

** L.P.M.M., UMR CNRS 7554, I.S.G.M.P., Université de Metz,Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01, France. {zahrouni,potier-ferry}@lpmm.univ-metz.fr*

*** Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II-Mohammedia, B.P. 7955, Sidi Othman, Casablanca, Maroc {B. Braikat, N. Damil}@univh2m.ac.ma*

RÉSUMÉ. *On se propose dans ce travail de présenter une nouvelle technique de régularisation des lois de comportement élasto-plastique dans le cadre de la méthode asymptotique numerique.*

ABSTRACT. *The present work deals with a new technique to regularize the elastoplastic constitutive laws in the framework of the asymptotic numerical method.*

MOTS-CLÉS : *Méthode asymptotique numérique, plasticité, régularisation, technique de perturbation.*

KEYWORDS: *Asymptotic numerical method, plasticity, regularization, perturbation technique.*

1. Introduction

Dans ce travail, on présente une nouvelle technique de régularisation pour les problèmes de plasticité. Ce qui nous permettra d'appliquer la méthode asymptotique numérique (MAN) à ce type de problèmes. L'idée est de remplacer un problème non régulier par un autre problème régulier que l'on peut résoudre à l'aide d'une MAN classique. Ceci a déjà fait l'objet de plusieurs travaux sur la MAN. Une bibliographie importante peut être consultée dans les références [3] [4].
Le comportement plastique a la particularité de coupler deux relations unilaterales : définition du domaine élastique et le passage de la plasticité au comportement élastique (décharge élastique). Ces conditions font intervenir la fonction de charge f, sa dérivée $\dot{f}$ et le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \leq 0 \\ si\ f < 0 \quad alors \quad \dot{\lambda} = 0 \\ si\ f = 0 \quad alors \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{f} \leq 0, \quad \dot{\lambda}\dot{f} = \end{array} \right. \qquad [1]$$

La MAN a déjà été appliquée aux problèmes de plasticité dans le cadre de la théorie de déformation [2] [5] mais jamais avec la prise en compte de la décharge élastique. C'est l'objectif principal du présent travail.

2. Régularisation des relations de comportement élasto-plastique

Dans ce travail, on se limite à l'étude d'une loi de comportement élasto-plastique unidimensionnel. Lorsque le comportement est élastique et parfaitement plastique, les relations de comportement peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \\ \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}\ sign(\sigma), \qquad \dot{\lambda} \geq \\ f(\sigma) = (\frac{\sigma}{\sigma_y})^2 - 1 \end{array} \right. \qquad [2]$$

Où σ, ϵ et ϵ^p représentent respectivement la contrainte, la déformation totale et la déformation plastique. E est le module de Young et σ_y définit la contrainte limite d'élasticité. Pour simplifier la discussion, nous considérons uniquement le cas de la traction pour des contraintes ($\sigma > -\sigma_y$).
Lorsqu'on est sur la surface de charge ($f = 0$), les relations de comportement (1 - 2) conduisent à la condition de consistance suivante :

$$\dot{\lambda} = \langle \dot{\epsilon} \rangle \qquad [3]$$

où $\langle x \rangle$ donne la partie positive de la variable x. On peut maintenant étendre cette condition au cas où $f = 0$ ou $f < 0$ en introduisant une nouvelle fonction discontinue $\mathfrak{g}(.)$ définie sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}(f) = 0 \quad si \quad f < 0 \\ \mathfrak{g}\ 0) = 1 \end{array} \right. \qquad [4]$$

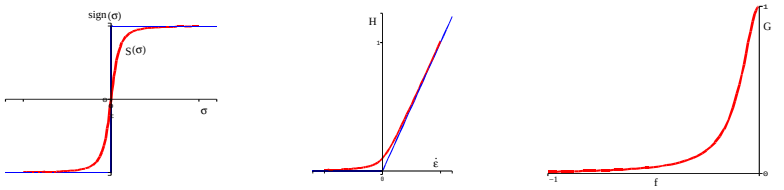
On peut reformuler maintenant l'équation (3) :

$$\dot{\lambda} = \langle \dot{\epsilon} \rangle \ \mathfrak{g} \quad) \qquad [5]$$

Trois fonctions non régulières apparaîssent dans les équations (2) et (5) : la fonction signe $sign(.)$, la partie positive $\langle . \rangle$ et la fonction $\mathfrak{g}$. Une technique de perturbation ne peut être appliquée directement à ces fonctions. C'est pourquoi on se propose de les remplacer par des fonctions régulières notées $S(.)$, $H(.)$ et $G(.)$. Ces fonctions sont choisies comme suit :

$$\begin{cases} S(\sigma) = \sigma / \sqrt{\sigma^2 + \eta_1^2 \ \sigma_y^2} \\ H(\dot{\epsilon}) = (\dot{\epsilon} + \sqrt{\dot{\epsilon}^2 + 4 \ \eta_2^2 \ \dot{\epsilon}_c^2} \ )/2 \\ G(f) = \eta_3 / (f^2 + \eta_3) \end{cases} \qquad [6]$$

Chacune de ces fonctions définies dans (6) utilise un paramètre de régularisation



(a) (b) (c)

Figure 1. *Représentation des trois fonctions régulières (a) $S \ \sigma$), (b) $H(\dot{\epsilon})$ et (c) $G \quad)$*

η_1, η_2 ou η_3. Ces paramètres doivent être pris suffisamment petits pour représenter au mieux les fonctions non régulières d'origine et obtenir par conséquent une bonne approche du model de comportement de départ. Nous rappelons que le choix de ces fonctions n'est pas unique. Pour maîtriser les régularisations de ces fonctions, nous avons défini des paramètres de régularisation adimensionnels. Ainsi, une vitesse de déformation typique $\dot{\epsilon}_c$ a été introduite dans le nouveau model de comportement. (2b) et (5) sont donc reformulées sous la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \ S(\sigma), \quad \dot{\lambda} = H(\dot{\epsilon}) \ G \quad) \qquad [7]$$

En combinant (2a) et (7), la loi modifiée s'écrit ainsi :

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} = \dot{\epsilon} - S(\sigma) \ G(f) \ H(\dot{\epsilon}) \qquad [8]$$

3. Technique de résolution

Dans cette présentation, on se limite à la résolution de l'équation différentielle (8) par la méthode de perturbation. On impose une vitesse de déformation suffisamment

régulière $\dot{\epsilon}(t)$ en fonction du temps et on cherche la solution $\sigma(t)$. Pour simplifier la discussion, on ne considère que la traction et on prend donc $S(\sigma) = 1$.
Nous allons décrire maintenant l'algorithme MAN qui permet d'obtenir la solution $\sigma(t)$ pas à pas. Chaque pas étant déterminé par la technique de perturbation :

$$\sigma - \sigma_0 = \sum_{n=1}^{N} (t - t_0)^n \sigma_n, \qquad t_0 \leq t \leq t_{max} \qquad [9]$$

Où σ_0 et t_0 représentent le point de départ du pas asymptotique et N l'ordre de troncature de la série. Les coefficients σ_n apparaissant dans (9) sont obtenus en fonction des coefficients donnés ϵ_k de la série de $\epsilon(t)$, $(1 \leq k \leq n)$.

Une fois ces coefficients calculés, un point important est la détermination de la longueur du pas asymptotique ($t_{max} - t_0$). Cette longueur est définie a posteriori, c'est une caractéristique importante de la MAN qui nous permet d'obtenir des pas adaptatifs en fonction de la non linéarité locale rencontrée. Cette longueur est calculée en exigeant que le dernier terme de la serie est suffisamment petit devant le terme à l'ordre un. Pour les problèmes de plasticité, toutes la variables ne varient pas de la même façon qu'on soit dans la zone élastique ou dans la zone plastique. C'est pourquoi on se propose de définir la longueur du pas pour chaque variable du problème et de prendre le minimum :

$$\begin{cases} t_\sigma = (\delta \frac{\sigma_1}{\sigma_N})^{\frac{1}{N-1}} \qquad t_\epsilon = (\delta \frac{\epsilon_1}{\epsilon_N})^{\frac{1}{N-1}} \qquad t_H = (\delta \frac{H_1}{H_N})^{\frac{1}{N-1}} \qquad t_G = (\delta \frac{G_1}{G_N})^{\frac{1}{N-1}} \\ t_{max} - t_0 = min(t_\sigma, t_\epsilon, t_H, t_G) \end{cases} \qquad [10]$$

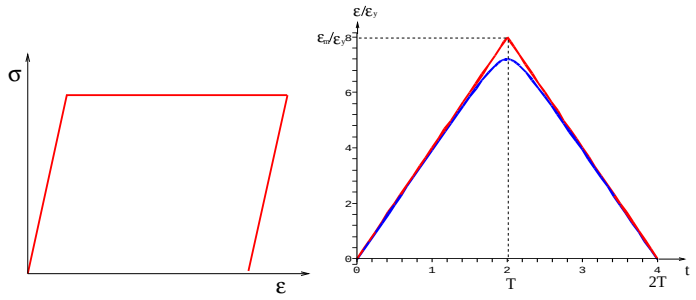
Dans (10), le paramètre δ est assez petit et permet de contrôler la précision de la solution et la longueur du pas. $\sigma_i, \epsilon_i, H_i, G_i$ sont respectivement les coefficients des séries de σ, ϵ, H et G développées sur le model de l'équation (9). Généralement, dans le cadre de la MAN, la longueur du pas est calculée à partir d'une seule variable comme le déplacement ou la vitesse [4]. Dans le présent travail, cette nouvelle mesure de la longueur du pas (10) permet d'avoir plus de précision sur toutes les équations (2, 6 et 7) le long des pas.

4. Tests numériques

Nous procédons maintenant à quelques tests numériques pour évaluer la capacité de notre algorithme à représenter un comportement typique en plasticité décrit par une phase élastique, une phase plastique puis une décharge élastique comme le montre la figure (2a). Nous avons choisi une forme bilinéaire entre t et $\epsilon(t)$ régularisée sous la forme suivante afin de la développer sous forme de série (figure 2b) :

$$\epsilon - \epsilon_m \; t/T)(\epsilon - \epsilon_m(2 - t/T)) = \eta_4 \; \epsilon_m^2 \qquad [11]$$

Le temps T correspond à la déformation maximale ϵ_m imposée. Les données du problème traité dans ce travail sont : $E = 2.10^5 \; MPa$, $\sigma_y = 240 \; MPa$, $\epsilon_y = \sigma_y / E$,



(a) (b)

Figure 2. *(a) La courbe (σ, ϵ) typique, (b) La forme régularisée du chargement, $\eta_4 =$. 1*

$T = 2\ s$, $\epsilon_m = 8\ \epsilon_y$, $\dot{\epsilon}_c = \epsilon_y/T$, $\eta_4 = 0.01$. En ce qui concerne la régularisation de la loi de comportement, deux cas sont considérés : un cas avec une régularisation faible ($\eta_2 = \eta_3 = 0.1$) et un deuxième cas avec une régularisation forte ($\eta_2 = 1$, $\eta_3 = 0.3$). Le calcul est effectué jusqu'à obtenir une contrainte nulle après décharge élastique.

Plusieurs calculs sont effectués pour différentes valeurs du paramètre de précision δ plus petites que 10^{-2}, pour différents ordres de troncature ainsi que pour différentes valeurs des paramètres de régularisation η_2, η_3 et η_4. Quelques résultats sont reportés sur les figures (3a) et (3b) ainsi que sur les tableaux (1a) et (1b).

Les courbes de réponse sont obtenues de façon automatique et la loi régularisée donne des résultats assez proches de ceux de la loi de départ. Le paramètre η_3 régularise la passage de l'élasticité vers le plateau de la contrainte limite de plasticité et le paramètre η_2, quant à lui, régularise le passage de la plasticité vers l'élasticité (retour élastique). Une étude de convergence a été menée, elle montre les mêmes tendances que celles déjà obtenues dans les travaux antérieurs [1] [4]. Le nombre de pas diminue si l'ordre de troncature ou le paramètre de précision δ ou les paramètres de régularisation augmentent (voir tableaux 1a et 1b). Avec $N = 15$, la courbe de réponse peut être obtenue avec seulement 14 pas. Les figures (3a) et (3b) montrent que les pas les plus courts sont localisés aux deux coins de la courbe de réponse.

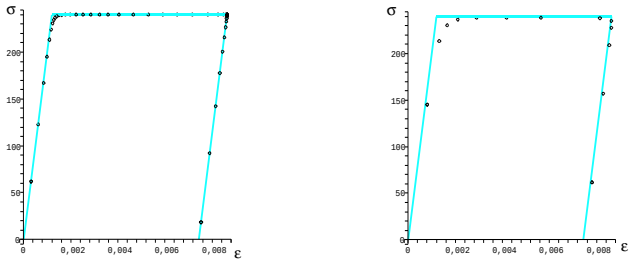
δ	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}
N=7	193	90	42
N=15	50	35	25
N=30	29	24	21

(a)

δ	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}
N=7	103	48	22
N=15	28	20	14
N=30	17	14	12

(b)

Tableau 1. *Nombre de pas en fonction de N et δ pour (a) $\eta_2 = \eta_3 = 0.1$ et (b) $\eta_2 = 1.$, $\eta_3 =$ .3*



(a) (b)

Figure 3. *Courbe (σ, ϵ) pour (a) $N = 15$, $\delta = 10^{-6}$, $\eta_2 = \eta_3 = 0.1$ (50 pas) et (b) $N = 15$, $\delta = 10^{-2}$, $\eta_2 = 1.$, $\eta_3 = 0.3$ (14 pas). Les points indiquent les fins de pas et la ligne continue indique la solution analytique.*

5. Conclusion

Nous avons présenté, dans le cadre de la MAN, une nouvelle technique pour décrire un comportement élasto-plastique avec la prise en compte de la décharge élastique. Cette méthode peut être facilement appliquée aux éléments finis et permettre d'obtenir un algorithme efficace pour les problèmes d'instabilité en plasticité. Une nouvelle stratégie de calcul des longueurs de pas a été proposée. Elle se base sur toutes les équations du problème et retient le minimum des rayons de validité de leurs séries.
Nous avons appliqué notre méthode à la plasticité parfaite mais elle est tout à fait applicable aux matériaux écrouissables en redéfinissant les fonctions f et G.

6. Bibliographie

[1] Aggoune W., Zahrouni H., Potier-Ferry M. High order prediction-correction algorithms for unilateral contact problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 168, 2004, p. 1–9.

[2] Braikat B., Damil N., Potier-Ferry M. Méthode asymptotique numérique pour la plasticité. Revue Européenne des Eléments Finis, vol. 6, 1997, p. 337–357.

[3] Potier-Ferry M., Damil N., Braikat B., Descamps J., Cadou J.M.,Cao H.L.,Elhage Hussein A., Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. C. R. Acad. Sci. Paris, t.324, Série II b, 171–177, 1997.

[4] Revue Européenne des Eléments Finis, *Méthodes asymptotiques numériques (Numéro spécial sous la direction de M. Potier-Ferry)*. Hermes, vol. 13, No 1-2, 2004.

[5] Zahrouni H., Potier-Ferry M., Elasmar H., Damil N. Asymptotic numerical method for nonlinear constitutive laws. Revue Européenne des Eléments Finis, vol. 7, No 7, 1998, p. 841–869.