



**HAL**  
open science

## Modèle numérique de propagation de fissures en fatigue de contact Application à la fatigue de roulement

Rachelle Ribeaucourt, Marie-christine Bäïetto-dubourg, Anthony Gravouil

### ► To cite this version:

Rachelle Ribeaucourt, Marie-christine Bäïetto-dubourg, Anthony Gravouil. Modèle numérique de propagation de fissures en fatigue de contact Application à la fatigue de roulement. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813020

**HAL Id: hal-01813020**

**<https://hal.science/hal-01813020v1>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Modèle numérique de propagation de fissures en fatigue de contact

## Application à la fatigue de roulement

**Rachelle Ribeaucourt, Marie-Christine Baietto-Dubourg, Anthony Gravouil**

Laboratoire LaMCoS (INSA-UMR 5514)

Bât Jean d'Alembert

18-00 rue des Sciences

69621 Villeurbanne Cedex

rachelle.ribeaucourt@insa-lyon.fr

---

*RÉSUMÉ. Cet article expose un nouveau modèle numérique pour l'analyse de fissures sous un chargement de fatigue de contact, variable au cours du temps. Ce modèle, basé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture, prend en compte le contact frottant le long des faces de la fissure. La discrétisation élément fini utilisée est la méthode X-FEM, et le processus itératif pour la détermination des conditions de contact est issu de la méthode LATIN. La loi de frottement interfaciale utilisée est une loi incrémentale de type Coulomb.*

*ABSTRACT. A new numerical model for analysis of cracks submitted to contact fatigue loading varying in time is presented. This model, based on linear elastic fracture mechanics, accounts for frictional contact along crack faces. The finite element discretisation used is the extended finite element method (X-FEM), and the iterative process for contact conditions determination is adapted from the iterative scheme employed by the large time increment method (LATIN method). The interfacial friction law used is an incremental Coulomb's law.*

*MOTS-CLÉS : X-FEM, LATIN, fissure, contact, frottement, chargement de contact, fatigue, propagation.*

*KEYWORDS: X-FEM, LATIN, crack, contact, friction, contact loading, fatigue, propagation.*

---

## 1. Introduction

Les interactions mécaniques entre les surfaces de deux solides en contact et en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre (glissement alternatif (fretting), glissement continu et/ou roulement) donnent naissance à des phénomènes physiques comme le frottement et l'usure. Le terme fatigue de contact désigne l'endommagement par fissuration qui se développe dans ces corps, s'amorçant en surface ou en sous-surface. Ce chargement induit un champ multiaxial, non proportionnel avec très forts gradients de contraintes. Les fissures situées dans la zone d'influence de ce chargement sont sollicitées en mode mixte, et subissent des cycles complexes de contact et de frottement le long de leur interface. Cet article expose une nouvelle démarche pour simuler le comportement d'une fissure subissant un chargement de fatigue de contact. La démarche utilise les concepts de la méthode X-FEM, de la méthode LATIN et de la mécanique du contact. L'application présentée ici concerne la fatigue de roulement.

## 2. Modèle numérique de fissures de fatigue

Le problème général considéré suppose un corps fissuré  $\Omega \in \mathcal{R}^2$  soumis à une force volumique  $f$ , à des forces extérieures  $F$  imposées sur  $\Gamma_F$  et à des déplacements imposés  $\bar{U}_d$  sur  $\Gamma_U$ . Soit  $u$  le champ vectoriel du déplacement dans le corps  $\Omega$ ,  $\sigma$  le tenseur des contraintes,  $\Gamma_C$  la surface de la fissure et  $\vec{n}$  la normale extérieure à  $\Omega$ . Les équations d'équilibre et les conditions aux limites du problème sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \sigma + f &= 0 \\
 \sigma &= K \epsilon \\
 \sigma \vec{n} &= F \quad \text{sur } \Gamma_F \\
 u &= \bar{U}_d \quad \text{sur } \Gamma_U
 \end{aligned} \tag{1}$$

Soient  $\Gamma_C^+$  et  $\Gamma_C^-$  les deux faces de la fissure,  $t^+$  et  $t^-$  les forces de contact appliquées sur chaque face,  $\omega^+$  et  $\omega^-$  les déplacements, et  $\vec{n}_C$  la normale extérieure à  $\Gamma_C^+$ . Les conditions de contact unilatéral le long des faces d'une fissure s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 (\omega^- - \omega^+) \cdot \vec{n}_C &\geq 0 \\
 t^+ \cdot \vec{n}_C &= -t^- \cdot \vec{n}_C \leq 0 \\
 P_T t^+ &= t^+ - (t^+ \cdot \vec{n}_C) \vec{n}_C = -P_T t^- \\
 [(\omega^- - \omega^+) \cdot \vec{n}_C][t^+ \cdot \vec{n}_C] &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

où  $P_T$  est l'opérateur de projection sur le plan tangent au vecteur  $\vec{n}_C$ . Les interactions tangentielles caractérisent le frottement sec le long des faces de la fissure. La loi de frottement utilisée est la loi de Coulomb, qui relie, par l'intermédiaire d'un coefficient de frottement  $\mu$  supposé constant, les composantes normales et tangentielles des

contraintes de contact. Pour un problème général en quasi-statique, la loi de Coulomb est exprimée en incréments de déplacements :

$$\begin{aligned} \| P_T t \| < \mu |t \vec{n}| &\Rightarrow P_T(\Delta\omega^- - \Delta\omega^+) = 0, \\ \| P_T t \| = \mu |t \vec{n}| &\Rightarrow \exists \lambda \geq 0, P_T(\Delta\omega^- - \Delta\omega^+) = \lambda P_T t^+. \end{aligned} \quad (3)$$

Pour un problème sans frottement, les composantes tangentielles,  $P_T t^+$  et  $P_T t^-$ , sont nulles. La formulation variationnelle du problème 1, 2 et 3 consiste à : trouver  $u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  tel que  $\forall v \in \mathcal{U}_0$ ,

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_F} F \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \sigma \vec{n}_C v d\Gamma$$

avec  $\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{v / v = \bar{U}_d \text{ sur } \Gamma_U\}$ , l'espace des déplacements cinématiquement admissibles, et  $\mathcal{U}_0 = \{v / v = 0 \text{ sur } \Gamma_U\}$ . Le travail des forces de contact, représenté par le terme  $\int_{\Gamma_C} \sigma \vec{n}_C v d\Gamma$ , est non différentiable dans le cas du contact avec frottement. Le problème variationnel à résoudre est non linéaire.

La discrétisation élément fini de cette équation utilise l'approximation du champ de déplacement de la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), introduite par [MOË 99] et utilisant la technique de partition de l'unité [MEL 96]. Elle permet un calcul du déplacement le long de la fissure sans maillage explicite de sa géométrie, mais aussi sans remaillage au cours du processus de propagation. L'approximation du champ de déplacement est enrichie à l'aide de fonctions additionnelles qui capturent les spécificités propres à l'existence d'une fissure : discontinuités des composantes normales et tangentielles du champ de déplacement à l'interface et comportement asymptotique en pointe de fissure. Cet enrichissement est le concept de base de la méthode X-FEM. L'approximation X-FEM du champ de déplacement est la suivante

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{i \in I} u_i \phi_i(x)}_1 + \underbrace{\sum_{j \in J} b_j \phi_j(x) H(x)}_2 + \underbrace{\sum_{k \in K} [\phi_k(x) (\sum_{l=1}^4 c_k^l F_l(r, \theta))]}_3 \quad (4)$$

Le terme 1 correspond à l'approximation élément fini standard avec  $I$  l'ensemble des noeuds du maillage,  $u_i$  et  $\phi_i$  respectivement les degrés de liberté et la fonction de forme associés au noeud  $i$ . Le terme 2 est un enrichissement lié à la discontinuité de la fissure, avec  $J$  un sous ensemble de noeuds de  $I$ ,  $b_j$  les degrés de liberté supplémentaires associés à l'utilisation de la fonction discontinue  $H(x)$ . Les noeuds de  $J$  sont tels que leur support intersecte la fissure mais sans contenir le front. Le terme 3 traduit la singularité des contraintes le long du front.  $K$  est le sous ensemble de noeuds de  $I$  dont le support contient ce front, et  $c_k^l$ ,  $l=1, \dots, 4$  les degrés de liberté correspondants. Les fonctions  $F_l(r, \theta)$ ,  $l=1..4$ , sont des fonctions de forme supplémentaires avec pour expression

$$\{F_l(r, \theta)\} \equiv \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (5)$$

où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires dans un repère local lié à la pointe de la fissure. Pour plus de détails se reporter à [DOL 00].

Dans le cadre de cette méthode, la fissure n'étant pas maillée explicitement, des éléments dits "éléments d'interface" sont introduits afin de gérer et de résoudre le contact le long des faces de la fissure. Pour tout élément fini coupé par la fissure, deux éléments d'interface en vis-à-vis  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  sont définis avec deux points de Gauss  $(G_i^+, G_i^-)_{i=1,2}$ . Les inconnues en ces points,  $\omega_i^+$  et  $t_i^+$  pour  $G_i^+$  ( $\omega_i^-$  et  $t_i^-$  respectivement pour  $G_i^-$ ), sont exprimées dans le repère local de l'élément d'interface  $\Gamma^+$  sous la forme :  $Z = (Z \cdot \vec{n}_C) \vec{n}_C + P_T Z$ , avec  $\vec{n}_C$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $\Gamma^+$ . Pour chaque couple de points de Gauss  $(G_i^+, G_i^-)$ ,  $i$  fixé, les conditions de contact (voir 2 et 3), sont exprimées selon une loi d'interface,  $\mathcal{G}$ . Des conditions aux limites supplémentaires assurant la continuité le long de la fissure sont introduites :

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot \vec{n}_C)|_{\Gamma_C^+} &= t^+, & (\sigma \cdot \vec{n}_C)|_{\Gamma_C^-} &= t^-, \\ u|_{\Gamma_C^+} &= \omega^+, & u|_{\Gamma_C^-} &= \omega^-. \end{aligned} \quad (6)$$

La formulation variationnelle devient : trouver  $(u, \omega) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  tel que  $\forall (v, \nu) \in \mathcal{U}_0$ ,

$$\int_{\Omega} \sigma \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_F} F \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_C} t \cdot \nu d\Gamma \quad (7)$$

avec  $\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{(v, \nu) / v = \bar{U} \text{ sur } \Gamma_U, v|_{\Gamma_C^+} = \nu^+ \text{ sur } \Gamma_C, v|_{\Gamma_C^-} = \nu^- \text{ sur } \Gamma_C\}$

et  $\mathcal{U}_0 = \{(v, \nu) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_U, v|_{\Gamma_C^+} = \nu^+ \text{ sur } \Gamma_C, v|_{\Gamma_C^-} = \nu^- \text{ sur } \Gamma_C\}$ .

La résolution du problème non linéaire est effectuée selon le schéma itératif employé dans la méthode LATIN (LArge Time INcrement) introduite par Ladèveze en 1985 [LAD 98], et adaptée au contact par Champaney [CHA 96]. Dans notre cas,  $\Gamma$  est l'ensemble constitué de la loi d'interface  $\mathcal{G}$  (lorsque le frottement est pris en compte), tandis que l'ensemble  $A$  se compose des équations de liaison et d'équilibre et de la relation de comportement linéaire. Pour plus de précisions sur le schéma itératif et l'indicateur de convergence se reporter aux articles [DOL 00] [RIB 04].

### 3. Algorithme de propagation

Le taux de restitution d'énergie  $G$ , et les facteurs d'intensité des contraintes (FIC)  $K_I$  et  $K_{II}$  sont évalués à chaque pas du cycle de fatigue.  $G$  est évalué selon la méthode du champ d'extension virtuelle [MOR 87] qui fournit une intégrale de domaine indépendante du contour, couplée aux travaux de Palmer et al. [PAL 73] sur le contact. Le découplage numérique des modes de rupture est réalisé en utilisant la méthode de l'intégrale d'interaction [GOS 98]. La direction de propagation de la fissure est déterminée à la fin du cycle. Rappelons que les chargements en mode mixte provoquent un phénomène de branchement (propagation tangente à une direction  $\theta_0$  différente de la direction initiale). Le critère d'Erdogan et Sih [ERD 63], très populaire mais formulé implicitement pour un chargement proportionnel, postule que la fissure va

croître dans la direction  $\theta_0$  pour laquelle la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale et la contrainte de cisaillement  $\sigma_{r\theta}$  nulle. A chaque pas de chargement on évalue  $\theta_0(t)$  vérifiant  $K_I \sin \theta_0(t) + K_{II}(3 \cos \theta_0(t) - 1) = 0$ .  $\theta_0(t)$  est indépendante du temps pour un chargement proportionnel. Pour des chargements non proportionnels (lorsque le rapport des contraintes principales varie au cours du cycle), l'application de ce type de critère n'est plus adaptée. Hourlier et al. [HOU 82] proposent des critères qui définissent un maximum sur l'espace et le temps :

- critère 1 :  $\theta_0$  est telle que  $k_1^*(\theta, t)$  atteint son maximum absolu (espace et temps).
- critère 2 :  $\theta_0$  est telle que  $\Delta k_1^*(\theta) = \max_t k_1^*(\theta, t) - \min_t k_1^*(\theta, t)$  est maximale sur l'espace.

avec  $k_1^*(\theta, t)$  FIC à la pointe d'une longueur infinitésimale d'extension de fissure obtenu à partir des FIC de la pointe de la fissure [AME 79], par :

$$\begin{aligned} k_1^*(\theta, t) &= K_{11}(\theta)K_I(t) + K_{12}(\theta)K_{II}(t) \\ k_2^*(\theta, t) &= K_{21}(\theta)K_I(t) + K_{22}(\theta)K_{II}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Les coefficients  $K_{ij}$  sont déterminés analytiquement.

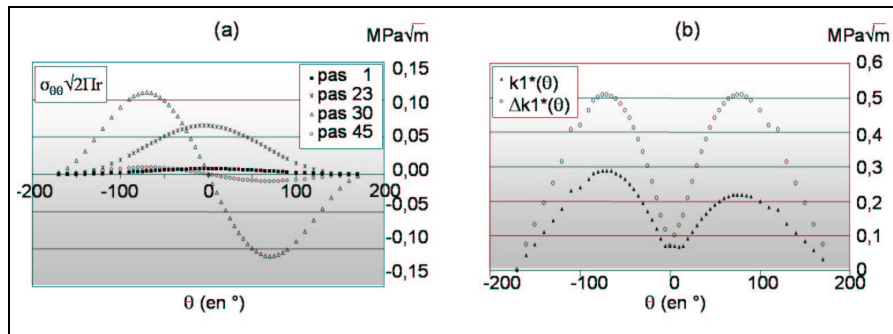


Figure 1. (a) Critère d'Erdogan et Sih pour différents pas, (b) Critères d'Hourlier.

#### 4. Fatigue de contact : détermination de l'angle de branchement

Nous considérons une fissure rectiligne, de longueur  $b = 0,1$  mm, perpendiculaire et débouchante à la surface de contact. Le coefficient de frottement interfacial est égal à 0,1. Le chargement est constitué par une distribution de pression ( $P_0 = 97$  N/mm) et tangentielle uniforme ( $\frac{Q_0}{P_0} = -0,15$ ), se déplaçant de gauche à droite (68 pas). Il s'agit de déterminer la direction de propagation de cette fissure sous ce chargement de fatigue de contact. Les résultats obtenus par simulation sont différents en fonction de l'utilisation de critères, adaptés à des chargements proportionnels ou non, privilégiant une propagation en mode I ou en mode mixte. Ainsi  $\theta_0 = -70^\circ$  est obtenu en appliquant les critères 1 et 2, et le critère d'Erdogan et Sih (cf figure 1) fournit une gamme

d'angles. L'implémentation de différents critères pour la détermination de l'angle de branchement est en cours. Le choix du critère est ensuite fonction de son adéquation avec des essais.

## 5. Bibliographie

- [AME 79] AMESTOY M., BUI H.-D., DANG-VAN K., « Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire », *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 289, n° B, 1979, p. 99-102.
- [CHA 96] CHAMPANEY L., *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Thèse de doctorat, 1996.
- [DOL 00] DOLBOW J., MOËS N., BELYTSCHKO T., « An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2000, p. 6825-6846.
- [ERD 63] ERDOGAN G., SIH G.-C., « On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear », *ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 85, 1963, p. 519-527.
- [GOS 98] GOSZ M., DOLBOW J., MORAN B., « Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, n° 15, 1998, p. 1763-1783.
- [HOU 82] HOURLIER F., D'HONDT H., TRUCHON M., PINEAU A., « Fatigue crack path behavior under polymodal fatigue », rapport de recherche n° RE 958, novembre 1982, IRSID.
- [LAD 98] LADEVÈZE P., *Nonlinear computational structural mechanics*, Springer, New York, 1998.
- [MEL 96] MELENK J., BABUSKA I., « The partition of unity finite element method : basic theory and applications », *Computers methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, 1996, p. 289-314.
- [MOË 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.
- [MOR 87] MORAN B., SHIH C., « Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 27, n° 6, 1987, p. 615-642.
- [PAL 73] PALMER, RICE, « The growth of slip surfaces in the progressive failure of over consolidated clay », *Proceedings of the Royal Society of London. Series A Mathem*, vol. 332, 1973, p. 527-548.
- [RIB 04] RIBEAUCOURT R., BAÏETTO-DUBOURG M.-C., GRAVOUIL A., « Mise en oeuvre d'un modèle numérique de fissures en mode mixte sous sollicitations tribologiques à partir de la méthode X-FEM », actes, mai 2004, JFT.