



**HAL**  
open science

## Nouvelle approche par sous-domaines pour les problèmes de contact multiphysique

Abderrazak Ramadane, Mario Fafard, Daniel Marceau, Charles Melançon

► **To cite this version:**

Abderrazak Ramadane, Mario Fafard, Daniel Marceau, Charles Melançon. Nouvelle approche par sous-domaines pour les problèmes de contact multiphysique. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813018

**HAL Id: hal-01813018**

**<https://hal.science/hal-01813018v1>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Nouvelle approche par sous-domaines pour les problèmes de contact multiphysique

**Abderrazak Ramadane\*** — **Mario Fafard\*** — **Daniel Marceau\*\***  
**Charles Melançon\*\*\***

\* *Département de génie civil, Université Laval, Québec, Canada, G1K 7P4.*  
*aramadan@giref.ulaval.ca mfafard@gci.ulaval.ca*

\*\* *Département des sciences appliquées, Université du Québec à Chicoutimi,*  
*555 boulevard de l'université, Chicoutimi, Québec, Canada, G7H 2B1.*  
*dmarceau@uqac.ca*

\*\*\* *Pratt and Whitney Canada, 1000 Marie-Victorin, Longueuil, Québec, Canada,*  
*J4G 1A1.*  
*Charles.Melancon@pwc.ca*

---

*RÉSUMÉ. Cet article présente une méthodologie de résolution de problèmes avec contact, basée sur une approche maître-esclave, en exploitant la notion de sous-domaines naturelles où des lois de comportement particulières régissent les échanges aux interfaces. Cette approche permet de traiter chaque sous-domaine de façon indépendante avec une interaction aux niveaux des frontières maîtres. L'interaction entre les sous-domaines se limite aux zones de contact maître/maître ce qui permettrait une parallélisation des algorithmes proposés. Une étude numérique sur des domaines simples est présentée afin de mettre en évidence l'approche et la validité de celle-ci.*

*ABSTRACT. This article presents a resolution methodology of problems with contact, based on master/slave approach by exploiting the concept of natural subdomains where particular constitutive laws govern the exchanges at the interface. This approach allows to treat each subdomain independently of the others with only an interaction at the master borders. The interaction between subdomains is limited to the zones of contact master/master what would allow a parallelisation of the proposed algorithms. A numerical study on simple domain is presented in order to prove the validity of this approach.*

*MOTS-CLÉS : sous-domaine, contact, problèmes couplés, multiphysique.*

*KEYWORDS: subdomain, contact, coupling problems, multiphysic.*

---

## 1. Introduction

La résolution de problèmes industriels basée sur la méthode des éléments finis génère des problèmes de grandes tailles. Ceci est encore plus important dans un contexte de problèmes multiphysiques. Par exemple, l'analyse d'un moteur ou d'une partie d'un moteur d'avion fait appel à des analyses prenant en compte l'interaction fluide-structure avec échanges d'énergie [CHE 28]. Dans le cas de la simulation numérique des problèmes de contact thermo-électro-mécanique dans le cas de préchauffage d'une cuve d'électrolyse de type Hall-Héroult [DES 03], conduit à la résolution de problèmes non linéaires, fortement couplés de très grande taille. Le nombre de zones de contact, l'introduction de plusieurs inconnues liées aux différents champs physiques et la non-symétrie du problème nous ont poussés à chercher une approche générique de résolution par sous-domaines qui serait applicable à une résolution sur ordinateurs à mémoires distribuées (cluster).

Dans la plupart des publications [SER 03, MAN 93, BAR 01, XIN 98], les problèmes de contact sont traités d'une façon classique. Il est possible de définir d'une façon différente le lien entre les frontières en contact. La figure (2) illustre cette approche. L'objectif de cet article est de présenter une méthode de résolution basée sur des sous-domaines naturels qui interagissent entre eux via des frontières de contact. Chaque sous-domaine aura son ensemble maître/esclave et lors de l'assemblage des sous-domaines, seules les frontières maîtres interagiront ensemble. Ainsi, on peut circonscrire complètement les sous-domaines et les gérer de façon indépendante. La seule restriction est que les frontières maîtres aient la même densité de maillage. Nous nous sommes également fixés comme objectif de traiter des problèmes de contact avec des lois phénoménologiques [GOU 04]. Pour réduire le temps de calcul, nous proposons une amélioration de l'approche en se basant sur la notion de complément de Schur partiel.

A chaque itération globale, la résolution du système  $[K_T]\{\Delta U\} = \{R\}$ , où  $\{\Delta U\}$  est la correction au sens de Newton du champ inconnu noté  $U$ , se fait par sous-domaines. En reprenant le problème défini à la figure (1), il est facile de démontrer que le système linéaire correspondant s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii}^A & K_{ie}^A & 0 \\ K_{ei}^A & K_{ee}^A & K_{em}^A \\ 0 & K_{me}^A & K_{mm}^A \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} K_{ii}^B & K_{ie}^B & 0 \\ K_{ei}^B & K_{ee}^B & K_{em}^B \\ 0 & K_{me}^B & K_{mm}^B \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_i^A \\ \Delta U_e^A \\ \Delta U_m^A \\ \Delta U_i^B \\ \Delta U_e^B \\ \Delta U_m^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_i^A \\ R_e^A \\ R_m^A \\ R_i^B \\ R_e^B \\ R_m^B \end{pmatrix} \quad (1)$$

où l'indice  $i$  représente les noeuds internes du solide excluant les noeuds situés sur la frontière esclave, et les indices  $e$  et  $m$  spécifient les noeuds appartenant aux frontières esclave et maître. La matrice  $K^\alpha$  correspond au sous-domaine  $\Omega^\alpha$ ,  $\alpha = A$  ou  $\alpha = B$ , en omettant l'opérateur  $\Delta$ ,  $\{U^\alpha\}$  est le vecteur des degrés de liberté de tous les

éléments de  $\Omega^\alpha$ . On distingue les degrés de liberté des frontières maîtres  $\{U_m^\alpha\}$  et esclaves  $\{U_e^\alpha\}$  des autres degrés de liberté internes du solide  $\{U_i^\alpha\}$ .

Nous devons assurer la continuité aux interfaces maîtres, et satisfaire les conditions d'équilibre des interfaces maîtres ; nous aurons les égalités suivantes :

$$U_m^A - U_m^B = 0 \quad (2)$$

$$R_m^A + R_m^B = 0 \quad (3)$$

Avec la nouvelle approche et pour un contact thermique, les flux entrant et sortant

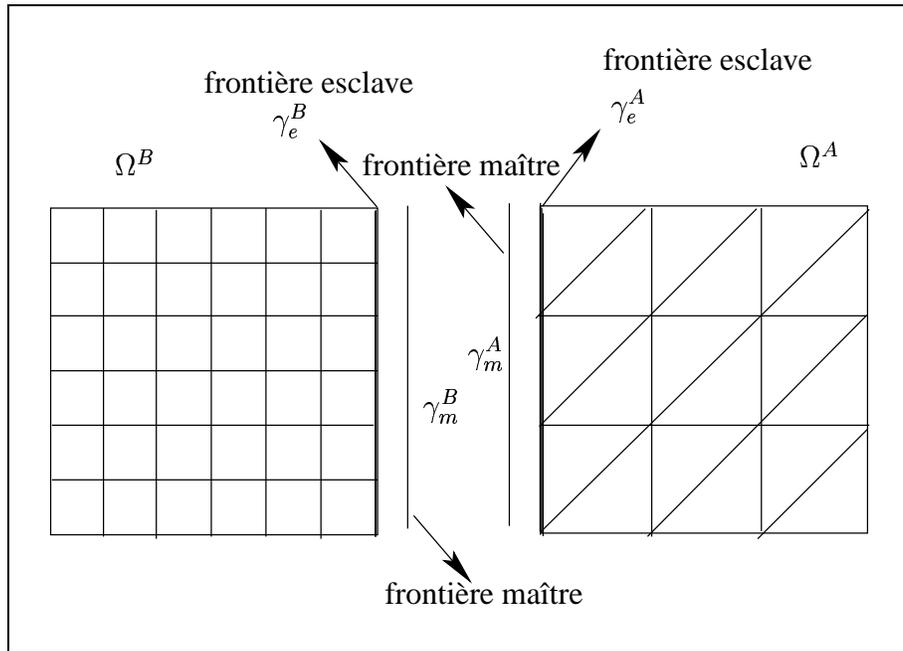


Figure 1: Nouvelle représentation des frontières de contact

entre les couples maître-esclave de chaque frontière s'écrivent :

$$q^A = \bar{h} (U_e^A - U_m^A) ; q^B = \bar{h} (U_e^B - U_m^B) \quad (4)$$

avec  $\bar{h} = 2h$  (voir [RAM 05]) où  $h$  est la conductance thermique de contact. Dans un contexte de résolution par sous-domaines, la relation (3) devra être satisfaite par une méthode itérative. Pour cette fin, nous faisons l'hypothèse que la résolution sur chaque sous-domaine a été effectuée en admettant une valeur de  $\{U_m^\alpha\}$  fixe, ce qui permet d'estimer le champ  $\{U_e^\alpha\}$  de la frontière esclave en résolvant le système (1)

pour chaque sous-domaine et d'obtenir une correction à la solution au champ  $\{U_m^\alpha\}$  par :

$$\{R_m\} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \{R_m^\alpha\}. \quad (5)$$

$$\{U_m^{\alpha,i}\} \equiv \{U_m^i\} = \{U_m^{i-1}\} + \{\Delta U_m^i\} \quad (6)$$

$$\{\Delta U_m^i\} = \beta \{\overline{\Delta U}_m^{A,i}\} + (1 - \beta) \{\overline{\Delta U}_m^{B,i}\} \quad (7)$$

$$\{\overline{\Delta U}_m^{\alpha,i}\} = -[K_C^\alpha]^{-1} \{R_m\}, \alpha = A, B. \quad (8)$$

où  $[K_C^\alpha]^{-1}$  est une matrice de correction à définir. L'idée derrière cette méthode est de trouver la correction du champ  $\{\overline{\Delta U}_m^{\alpha,i}\}$  de chaque frontière à partir du résidu commun  $\{R_m\}$  et d'appliquer la relation (2) au travers d'une loi de mélange définie par la relation (7).  $\beta$  est un paramètre compris entre 0 et 1. Pour des solides identiques, il prend la valeur  $\frac{1}{2}$  (pour plus de détails, voir ([RAM 05])).

En fonction de la valeur que peut prendre la conductance thermique  $h$ , il y'a deux façons d'estimer  $[K_C^\alpha]^{-1}$  :

**Méthode 1 :**  $[K_C^\alpha]^{-1} \equiv [K_{mm}^\alpha]^{-1} = \frac{1}{h} [M_{mm}^\alpha]^{-1}$ ,

$[M_{mm}^\alpha] = \int_\gamma \{N_\xi^\alpha\} < N_\xi^\alpha > d\gamma$ ,  $\{N_\xi^\alpha\}$  sont les fonctions d'interpolation de la frontière esclave du solide. Cette méthode est utilisée pour de faibles valeurs de  $h$ .

**Méthode 2 :** On approche  $[K_C^\alpha]$  par la matrice condensée de Schur  $[\bar{K}_{ee}^\alpha] : [K_C^\alpha] = [\bar{K}_{ee}^{S,\alpha}] = [K_{ee}^{S,\alpha}] - ([K_{ei}^{S,\alpha}] [K_{ii}^\alpha]^{-1} [K_{ie}^{S,\alpha}])$ . Cette méthode est conseillée pour des problèmes ayant des grandes valeurs de  $h$ .

## 2. Méthode 2 avec condensation partielle accélérée

Afin de contourner le coût de calcul élevé de la matrice condensée, nous l'avons approchée seulement avec la matrice condensée associée à  $n$  couches d'éléments voisins de contact (voir figure (2)), ce qui rend cette approche dépendante de la discrétisation choisie.

Afin de palier au taux de convergence faible lorsque l'on approche la matrice  $[K_C^\alpha]$  avec une condensation statique partielle et au coût de calcul élevé lorsqu'on utilise une condensation complète, on introduit un facteur  $X$  à optimiser afin de chercher la matrice condensée optimale  $[K_C^\alpha] \approx [\bar{K}_{ee}^{S,\alpha}]$  associée aux  $n$  couches choisies.

$$[\bar{K}_{ee}^{S,\alpha}(X)] = [K_{ee}^{S,\alpha}] - X \left( [K_{ei}^\alpha] [K_{ii}^\alpha]^{-1} [K_{ie}^\alpha] \right) \quad (9)$$

où  $i$  est le nombre de nœuds internes choisi pour la condensation partielle. Il est clair que quelle que soit la densité de maillage, si on inclut tous les nœuds du solide dans la condensation, alors la valeur optimale pour  $X$  sera 1.

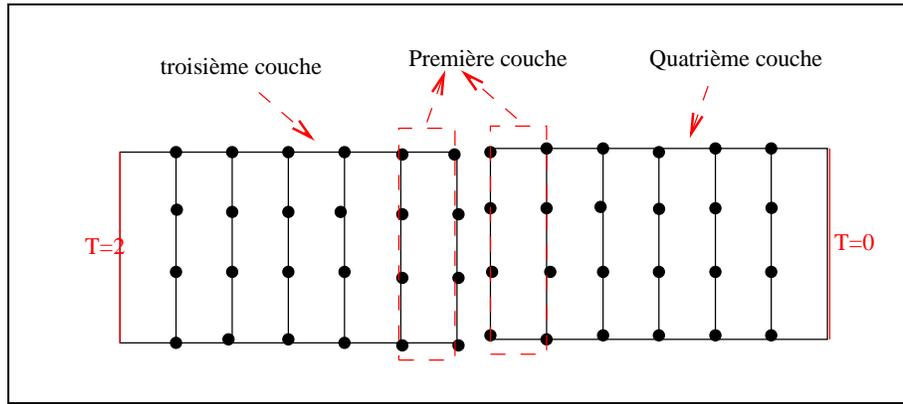


Figure 2: Deux plaques en contact thermique de longueur  $L$

Il y a donc deux paramètres importants qui gouvernent la valeur optimale de  $X$ , la taille de l'élément (ou la densité de maillage), notée  $h$  (à ne pas confondre avec la conductance thermique) et le nombre de couches  $n$  qui participent à la condensation.

Nb de couches par sous-domaine	Choix de $X$	Nb d'itérations	la variation du pas $h$
2	1	2	$h = H = 2^{-1}L$
4	1.5	2	$h = 2^{-1}H$
8	1.75	2	$h = 2^{-2}H$
16	1.875	2	$h = 2^{-3}H$

Tableau 1: **Méthode 2** avec condensation partielle accélérée avec une seule couche

Les résultats numériques montrent que, pour un maillage donné de pas  $h = H$ , le paramètre  $X(H)$  prend la valeur 1 quand il s'agit d'une condensation complète. Pour un maillage de pas  $h(n) = \frac{H}{2^n}$ ,  $X(h)$  s'obtient par la formule suivante :

$$X(h) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k N_i} \tag{10}$$

où  $N_i$  est le nombre de couches internes choisies pour la condensation partielle.

Le tableau (1) montre les résultats numériques liés à l'application des équations (5) à (8) avec la méthode 2 avec condensation partielle avec une seule couche, lors de son application à un problème de contact thermique (figure (2)) de conductance  $h$  assez élevée de l'ordre de  $10^6$ . Nous constatons qu'avec le paramètre optimal  $X$ , le nombre d'itérations est de 2 pour différents choix de maillages.

### 3. Conclusion

- Le calcul par sous-domaine nécessite des itérations mais fait intervenir à chaque itération des systèmes matriciels qui ne changent pas.
- Il est possible d'appliquer cette approche sans difficulté au cas du contact mécanique.
- Si les maillages sont de forme irrégulière, il devient difficile de prendre un certain nombre de couches pour la condensation partielle accélérée. On peut cependant prendre un certain nombre d'éléments compris dans un rayon  $R$  de la frontière utilisée comme base de condensation partielle. Le paramètre  $X$  devra à ce moment être estimé en fonction d'une relation plus simple mais en utilisant la même approche que dans cet article.
- La généralisation de cette approche pour le cas multiphysique non linéaire a été démontrée [RAM 05].

### 4. Bibliographie

- [BAR 01] BARBOTEU M., ALART P., VIDRASCU M., « A domain decomposition strategy for non classical frictional multi-contact problems. », *Comp. Meth. In Appl.Math. and Eng.*, n° 190, 2001, p. 4785-4803.
- [CHE 28] CHEMIN S., ERRERA M., FEYEL F., CHAINERAY G., LACHI M., « Couplage de codes de calcul scientifique : étude des interactions fluide/structure par l'intermédiaire d'un couplage thermique », *Colloque sur les régimes transitoires en convection (Modes de Transfert-Convection)*, Paris (France), 4 décembre 2003-26-28.
- [DES 03] DESILETS M., MARCEAU D., FAFARD M., « START-Cuve : Thermo-electro-mechanical transient simulation applied to electrical preheating of a Hall-Héroult cell. », *Light Metals 2003, proceeding of the 132<sup>nd</sup> TMS Annual Meeting*, San Diego, California, March 2-6, 2003, Ed by E. Crepeau, p. 53-68.
- [GOU 04] GOULET P., « Modélisation du comportement thermo-électro-mécanique des interfaces de contact d'une cuve de Hall-Héroult », Thèse de doctorat, département de génie chimique, Université Laval, 2004.
- [MAN 93] MANDEL M., « Balancing domain decomposition », *Communications in Appl. Num. Meth.*, vol. 9, 1993, p. 233-241.
- [RAM 05] RAMADANE A., « Nouvelle approche par sous-domaine pour les problèmes de contact multiphysique », Thèse de doctorat, département de génie civil, Université Laval, (en rédaction), 2005.
- [SER 03] SERIES L., FEYEL F., ROUX F., « Une méthode de décomposition de domaine à deux multiplicateurs de Lagrange », *Actes du sixième colloque national en calcul des structures, Tome III*, GIEN, 2003, p. 373-380.
- [XIN 98] XING H. L., FUJUMOTO T., MAKINOCHI A., « Static-explicit FE modeling of 3-D large deformation multibody contact problems on parallel computer », *Simulation of Materials Processing : theory Methods and Applications*, , 1998, p. 207-212.

## Annexe pour le service de fabrication

**Article pour les actes :**

**Auteurs :**

*Abderrazak Ramadane\** — *Mario Fafard\** — *Daniel Marceau\*\**  
*Charles Melançon\*\*\**

**Titre de l'article :**

*Nouvelle approche par sous-domaines pour les problèmes de contact  
multiphysique*

**Titre abrégé :**

*Nouvelle approche par sous-domaines*

**Traduction du titre :**

**Date de cette version :**

*8 février 2005*

**Coordonnées des auteurs :**

- téléphone : 01-418-683-07-19
- télécopie : 01-418-656-2928
- Email : aramadan@giref.ulaval.ca

**Logiciel utilisé pour la préparation de cet article :**

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, avec le fichier de style `article-hermes.cls`,  
version 1.10 du 2000/05/08.

**Formulaire de copyright :**

Joindre le formulaire de copyright signé, récupéré sur le web à l'adresse  
<http://www.hermes-science.com>