



**HAL**  
open science

# Hyperréduction a priori en dynamique non-linéaire à large bande

David Ryckelynck

► **To cite this version:**

David Ryckelynck. Hyperréduction a priori en dynamique non-linéaire à large bande. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813013

**HAL Id: hal-01813013**

**<https://hal.science/hal-01813013>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Hyperréduction a priori en dynamique non-linéaire à large bande

**D. Ryckelynck**

*Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés  
UMR CNRS-ENSAM-ESEM  
151, boulevard de l'Hopital  
75 013 Paris*

---

*RÉSUMÉ. Nous proposons une méthode de réduction de modèles pour les problèmes non-linéaires dépendant du temps. On peut qualifier cette méthode de version incrémentale et a priori du développement de Karhunen-Loève avec une définition implicite, par le biais d'équations de mouvement, de l'état à décomposer. Cette méthode de réduction est appelée méthode APHR (A Priori Hyper-Reduction method). C'est une méthode d'adaptation du modèle de taille réduite de façon à maîtriser les résidus des équations de mouvement au cours de la résolution simplifiée du problème non-linéaire. Le nombre de fonctions de forme du modèle de taille réduite est représentatif du nombre d'événements indépendants (décorrélés) contenus dans l'évolution de l'état du système. Nous proposons d'étudier le cas d'évolutions très riches en événements correspondant à un problème de dynamique transitoire où le système est constitué de deux solides en contact avec frottement.*

*ABSTRACT. The reduction method we propose avoids preliminary computations of shape functions. It is an a priori approach based on the analysis of some state evolutions, such that all the state evolutions needed to perform the model reduction are described by an approximate Reduced Order Model (ROM). The ROM and the state evolution are simultaneously improved by the method, thanks to an adaptive strategy. The adaptive procedure includes extensions of the subspace spanned by the shape functions of the ROM and selections of the most relevant shape functions in order to represent the state evolution. The Hyper-Reduction is achieved by selecting a part of the integration points of the finite element model to forecast the evolution of the reduced state variables. Hence both the number of degrees of freedom and the number of integration points are reduced. To perform the adaptive procedure, different computational strategies can be developed. In this paper, we propose an incremental algorithm involving adaptive periods. During these adaptive periods the incremental computation is restarted until a quality criteria is satisfied.*

*MOTS-CLÉS : réduction de modèles, POD , sous-espace de Krylov, strategie d'apprentissage, hyperréduction*

*KEYWORDS: model reduction, POD , Krylov subspace, learning strategy, hyperreduction*

---

## 1. Introduction

L'étude de la stabilité des processus d'usinage est une question abondamment traitée dans la littérature scientifique. L'une des approches possibles passe par l'intégration des équations de la dynamique associées à des modèles mécaniques non-linéaires simplifiés. Or si les modèles sont trop simples il devient nécessaire d'identifier les paramètres mécaniques de ceux-ci afin de reproduire des phénomènes observés. Pour avoir une démarche prédictive il est préférable de déduire le modèle simplifié d'un modèle de référence comportant une description fine des transformations possibles. Ceci est possible grâce aux méthodes de réduction de modèles. Du fait de la non-linéarité du système mécanique, il n'est pas trivial de construire un modèle de taille réduite défini pour l'ensemble de l'évolution de l'état du système. Une façon a posteriori d'obtenir de tels modèles est d'utiliser la POD (décomposition orthogonale aux valeurs propres) appelée aussi développement de Karhunen-Loève.

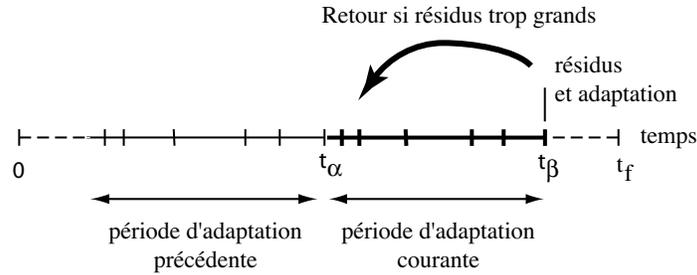
Au LMSP nous avons développé une méthode de réduction a priori de modèles de thermo-mécanique non-linéaire, afin de simplifier la simulation des procédés de fabrication. Cette méthode de réduction est appelée méthode APHR (A Priori Hyper-Reduction method) [1]. C'est une méthode d'adaptation du modèle de taille réduite de façon à maîtriser les résidus des équations de mouvement au cours de la résolution simplifiée du problème non-linéaire. Le modèle de taille réduite est construit pour décrire l'ensemble de la transformation étudiée, sur toute sa durée. Cette méthode est qualifiée d'a priori car aucun calcul préliminaire n'est nécessaire pour commencer la résolution simplifiée.

La méthode APHR permet d'extraire, à l'aide de développements de Karhunen-Loève, un nombre optimal de fonctions de forme. Le nombre de fonctions de forme est représentatif du nombre d'évènements indépendants (décorrélés) contenu dans l'évolution de l'état du système. Or ce nombre d'évènements ne peut être supérieur au nombre de pas de temps utilisés pour décrire l'évolution des variables d'état. Cette propriété est satisfaisante lorsque l'évolution de l'état du système est peu complexe et ne requière pas beaucoup de pas de temps (moins de 100 par exemple). Par exemple, on peut réduire un modèle éléments finis de 18000 degrés de liberté à un modèle simplifié ayant environ 25 variables d'état [1]. Or pour la dynamique large bande, il est nécessaire d'exploiter beaucoup de pas de temps pour décrire les phénomènes à petit temps caractéristique ainsi que les phénomènes à grand temps caractéristique. Nous proposons ici d'étudier le cas d'évolutions très riches en événements correspondant à un problème de dynamique transitoire où le système est constitué de deux solides en contact avec frottement.

## 2. La méthode APHR

L'adaptation du modèle de taille réduite est réalisée par une expansion du sous-espace engendré par les fonctions de forme de celui-ci ainsi qu'une sélection de combinaisons de fonctions de forme pour ne représenter que les événements les plus si-

gnificatifs contenus dans l'évolution de l'état du système étudié. Différentes stratégies de résolution peuvent être mises en œuvre. Une première version de cette méthode de réduction a été développée dans le cadre de la méthode LATIN [2] dont le principe de représentation des fonctions du temps et de l'espace [3] peut être considéré comme un principe de réduction de modèles [4]. Mais une formulation non-incrémentale des équations du problème n'est pas nécessaire à la construction d'un modèle défini sur l'intervalle de temps recouvrant toute la transformation étudiée. Nous avons donc développé une deuxième version de la méthode APHR en exploitant une résolution incrémentale des problèmes d'évolution. L'avantage de cette approche est de pouvoir trouver directement dans la littérature scientifique les opérateurs tangents nécessaires au traitement des équations non-linéaires.



**Figure 1.** *Stratégie d'adaptation du modèle de taille réduite*

L'intervalle de temps est découpé en période d'adaptation (figure 1). La période d'adaptation courante est comprise entre les instants  $t_\alpha$  et  $t_\beta$ . Après la résolution du problème non-linéaire en base réduite sur la période d'adaptation nous évaluons les résidus des équations de mouvement. Si la norme des résidus est suffisamment faible le calcul incrémental en base réduite se poursuit sur la période d'adaptation suivante, sinon le modèle de taille réduite est adapté avant de reprendre le calcul sur la même période d'adaptation. L'adaptation est composée d'une extension du sous-espace engendré par les fonctions de forme et éventuellement d'une sélection des fonctions de forme les plus significatives. L'extension est obtenue à l'aide d'un sous-espace de Krylov construit avec les résidus des conditions d'équilibre et une matrice tangente fournie par le modèle éléments finis en  $t_\beta$ . La sélection a lieu si le nombre de fonctions de forme rajoutées depuis la dernière sélection dépasse un certain seuil. Cette sélection est obtenue par un développement de Karhunen-Loève [5, 6] des variables d'état  $a_k^{(n)}$  définies par le modèle de taille réduite. L'indice  $(n)$  correspond à la version des fonctions de forme. Cette décomposition est effectuée en deux étapes :

– étape préliminaire : les vecteurs de base  $(\underline{V}_p)_{p=1\dots r}$  sont définis par la condition de stationnarité de  $\lambda(\underline{V})$  tel que :

$$\lambda(\underline{V}) = \frac{\int_0^{t_\beta} (\underline{a}^{(n)}(t)^T \underline{V})^2 dt}{\underline{V}^T \underline{V}} \quad [1]$$

$$d\lambda(\underline{V}_p) = 0 \quad \lambda(\underline{V}_p) \neq 0 \quad \underline{V}_p^T \underline{V}_p = g_p \quad [2]$$

– étape de projection : les nouvelles variables d'état réduites  $(a_p^{(n+1/2)}(t))_{p=1\dots r}$  sont déduites en minimisant  $\eta(\underline{a}^{(n+1/2)})$  tel que :

$$\eta(\underline{a}^{(n+1/2)}) = \int_0^{t_\beta} \|\underline{a}^{(n)}(t) - \sum_{p=1}^{p=r} \underline{V}_p(M) a_p^{(n+1/2)}(t)\|^2 dt \quad [3]$$

Trouver la base des vecteurs  $\underline{V}_p$  conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres de petite dimension. En général on choisit  $g_p = 1$ , mais pour la méthode APHR notre choix est différent (voir ci-dessous). La valeur propre  $\lambda(\underline{V}_p)$  caractérise l'importance du vecteur  $\underline{V}_p$  dans la décomposition de  $\underline{a}^{(n)}$  sur l'intervalle  $[0, t_\beta]$ . Seule la partie significative de cette décomposition est conservée en choisissant une matrice de passage  $\underline{V}^{(n+1)}$  contenant uniquement les vecteurs propres  $\underline{V}_p$  vérifiant le critère suivant :  $\lambda(\underline{V}_p) > 1.e^{-8} \max_{p=1\dots r} (\lambda(\underline{V}_p))$ . Le résultat de la procédure d'adaptation est une nouvelle version de la matrice de réduction de base (pour le passage de la base éléments finis à la base réduite)  $\underline{A}^{(n+1)}$  telle que :  $\underline{A}^{(n+1)} = [\underline{A}^{(n)} \underline{V}, \underline{B}^{(n+1)}]$  où la matrice  $\underline{B}^{(n+1)}$  contient les vecteurs de l'extension du modèle de taille réduite. Les coefficients  $g_p$  et la norme des colonnes de  $\underline{B}^{(n+1)}$  sont choisis pour avoir :  $\underline{A}_k^{(n+1)T} \underline{A}_k^{(n+1)} = 1$ .

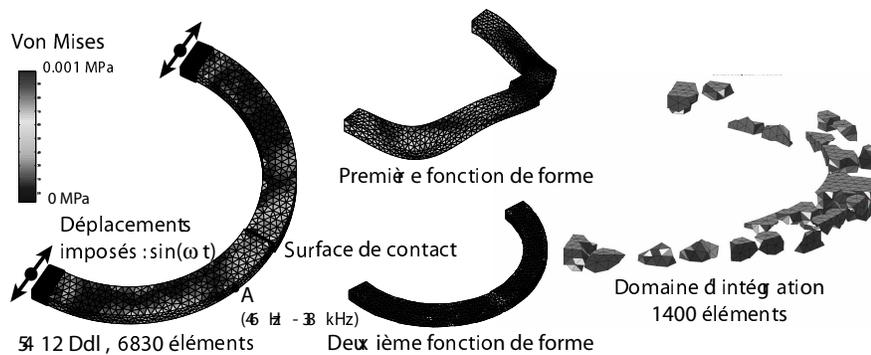
L'hyperréduction est obtenue en réduisant le nombre de points d'intégration pour déterminer l'évolution des variables d'état réduites  $\underline{a}^{(n+1)}$  pour  $t > t_\alpha$  à l'aide d'une formulation du type Petrov-Galerkin (pour  $t \leq t_\alpha$  on conserve la valeur  $\underline{a}^{(n+1/2)}$ ). Pour cela nous ne considérons que les conditions d'équilibre "internes" d'un domaine d'intégration restreint [1]. Ces conditions d'équilibre "internes" sont les conditions issues de la méthode des éléments finis sans considérer celles associées aux noeuds connectés à d'autres éléments que ceux contenus dans le domaine d'intégration. Ceci revient à annuler les fonctions test sur tout le domaine sauf à l'intérieur du domaine d'intégration et sur le bord du domaine d'intégration qui correspond au bord du système. De plus, pour obtenir autant d'équations que d'inconnues, nous ne considérons que des fonctions test sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions de forme du modèle de taille réduite.

C'est certainement dans le cadre de la dynamique linéaire qu'il y a eu le plus de développements concernant les méthodes de réduction de modèles. Comme la méthode snapshot POD [8], la méthode APHR ne nécessite pas d'étape de linéarisation des équations, peu compatible avec la construction d'une base définie sur tout l'intervalle de temps, comme c'est le cas des méthodes de condensation ou des méthodes de superposition modales [7].

L'état d'un système, dans le cadre de la dynamique des structures est représenté à l'aide d'un champ de déplacement et d'un champ de vitesse pour lesquels on exploite les mêmes fonctions de forme. Pour appliquer la méthode APHR à ce cas, il suffit de modifier la définition de ce qui est significatif dans une évolution de l'état en modifiant la définition de la fonctionnelle  $\lambda(\underline{V})$ . Un état significatif peut prendre la forme d'un champ de vitesse ou d'un champ de déplacement. Nous utilisons donc la définition suivante de  $\lambda(\underline{V})$  (où  $\gamma$  est un paramètre de la méthode) :

$$\lambda(\underline{V}) = \frac{\int_0^{t_\beta} (\underline{q}^{(n)}(t)^T \underline{V})^2 dt}{\underline{V}^T \underline{V}} + \gamma \frac{\int_0^{t_\beta} (\dot{\underline{q}}^{(n)}(t)^T \underline{V})^2 dt}{\underline{V}^T \underline{V}} \quad [4]$$

Nous proposons d'étudier le cas d'évolutions très riches en événements correspondant à un problème de dynamique transitoire où le système est constitué de deux solides en contact avec frottement (Figure 1). Seuls des petits déplacements et des petites déformations élastiques sont considérés. Dans les zones de contact, les maillages sont compatibles. Pour traiter ce problème mécanique nous exploitons la méthode du Lagrangien Augmenté associée à un algorithme de résolution du type Uzawa [9]. Pour l'intégration en temps, nous utilisons une  $\theta$ -méthode avec une adaptation automatique du pas de temps. L'intervalle de temps est découpé en 4297 pas de temps (7 cycles de chargement). Impacts et vibrations basses fréquences font partie de la réponse du système. Par exemple, le spectre de la transformée de Fourier de la vitesse du point A (voir Fig. 2) a des contributions significatives (supérieures à 1%) de 46Hz à 37 kHz, alors que la fréquence d'excitation est de 160Hz. Le nombre de fonctions de forme du modèle de taille réduite reste raisonnable (239 pour 5412 degrés de liberté pour le modèle éléments finis). Deux des fonctions de forme les plus significatives sont représentées sur la figure 2. La première contribue à la représentation des vibrations à basse fréquence. La contribution de la seconde concerne l'impact entre les deux solides. Le domaine d'intégration associé à la version finale du modèle de taille réduite est lui aussi représenté sur la figure 2.



**Figure 2.** Exemple de résultats

### 3. Conclusion

Nous proposons une méthode générale de réduction de modèles pour les problèmes non-linéaires dépendants du temps. Les fonctions de forme sont construites de façon adaptative en maîtrisant les résidus des équations du modèle éléments finis de référence. On obtient ainsi une description des effets globaux et locaux. Dans le cadre de la dynamique ceci permet une bonne prévision des actions de contact, donc une prévision de l'énergie dissipée par frottement. Ceci est particulièrement utile lorsque l'on souhaite étudier des problèmes de stabilité. Le cas de la dynamique large bande ne pose pas de difficulté particulière. Il faut simplement éviter de calculer complètement les intégrales en temps pour la décomposition de Karhunen-Loève en actualisant la matrice de covariance des variables d'état réduite au cours de l'adaptation du modèle de taille réduite. Le caractère adaptatif de la méthode permet de développer des stratégies d'apprentissage déterministes. Or, nul ne sait réaliser un modèle satisfaisant d'une transformation non-linéaire en une seule étape de modélisation. Ce type de stratégie a pour intérêt de faire évoluer le modèle simplifié en même temps que le modèle éléments finis de référence. Le temps passé à l'ajustement des paramètres numériques et des paramètres matériau peut ainsi être mis à profit pour la construction d'un modèle simplifié, qui permet d'accélérer les différentes étapes de simulation. Pour finir, l'hyperréduction peut être considérée comme une façon de soustraire de l'effort numérique une partie du modèle. Une des perspectives possibles est de soustraire de la simulation la partie du système la mieux modélisée pour concentrer l'effort numérique sur ce qui est difficile à prévoir.

### 4. Bibliographie

- D. Ryckelynck, A priori hyperreduction method : an adaptive approach, *International Journal of Computational Physics*, 202 (2005) 346-366
- Ladevèze P., Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures, CRAS, Paris, 300, série II n<sup>o</sup>2 (1985) 41-44.
- Ladevèze P., Mécanique non linéaire des Structures, Etudes en mécanique des matériaux et des structures, Hermès, 1996, p. 265.
- Ryckelynck D., Réduction a priori de modèles thermomécaniques, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 499-505.
- K. Karhunen, über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung, *Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. Al. Math. Phys.*, vol. 37 (1946).
- M. M. Loève, Probability theory, *The University Series in Higher Mathematics*, 3rd Ed, Van Nostrand, Princeton, NJ (1963).
- R.W. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, 1975.
- Sirovich L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part I : coherent structures. *Quarterly of applied mathematics*, XLV, n<sup>o</sup>3, 561-571, (1987)
- Fortin M. and Glowinski R., Les méthodes de Lagrangien augmenté, Dunod, (1982)