



**HAL**  
open science

## Modélisation et contrôle actif des vibrations d'une structure intelligente

Sami Tliba, Hisham Abou-Kandil

► **To cite this version:**

Sami Tliba, Hisham Abou-Kandil. Modélisation et contrôle actif des vibrations d'une structure intelligente. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01813005

**HAL Id: hal-01813005**

**<https://hal.science/hal-01813005>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Modélisation et contrôle actif des vibrations d'une structure intelligente

**Sami TLIBA — Hisham ABOU-KANDIL**

*SATIE, UMR-CNRS 8029  
École Normale Supérieure de Cachan  
61, AV. Pdt Wilson, 94235 Cachan CEDEX - France*

*{tliba,abou-kandil}@satie.ens-cachan.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article, nous présentons une approche pour la modélisation d'une structure intelligente par la méthode des éléments finis, basée sur le raccord d'éléments 2D avec des éléments 3D. Ces structures sont de type plaque et sont instrumentées d'un nombre discret de pastilles piézoélectriques rectangulaires, discrètement réparties sur une surface de la plaque. Certaines de ces pastilles sont utilisées comme des capteurs et les autres comme des actionneurs. Le but est d'obtenir un modèle sous forme d'état représentant le comportement dynamique entrée-sortie de la structure afin de permettre la synthèse d'un correcteur permettant d'aboutir au contrôle actif des vibrations.*

*ABSTRACT. In this paper, we consider the problem of modelling a smart structure in the finite element framework thanks to 2D-3D elements linking. The concerned structures are plate like and equipped with several piezoelectric patches, discretely distributed on one face of the plate. Some of them are used as sensors and the others are used as actuators. The aim is to obtain a state-space form model of the dynamical input-output behavior. This model is used for active vibration control purposes.*

*MOTS-CLÉS : structure intelligente, éléments finis, raccordement 2D-3D*

*KEYWORDS: smart structure, finite element, 2D-3D linking*

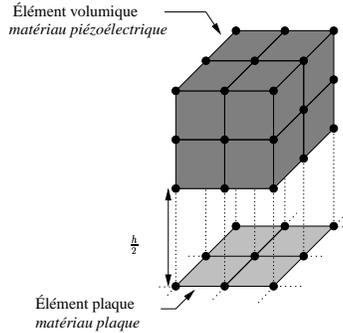
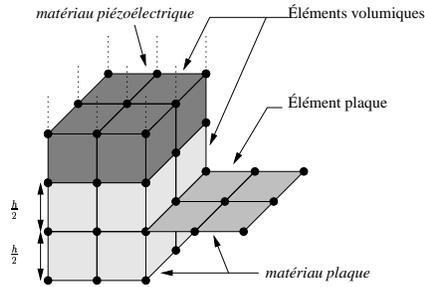
---

## 1. Introduction

Les vibrations des structures mécaniques sont souvent sources de problèmes affectant le bon fonctionnement de nombreux systèmes. C'est le cas par exemple des cartes électroniques composant les ordinateurs embarqués à bord d'avions ou d'hélicoptères. Pour répondre à un tel problème, une des solutions consiste à faire du contrôle actif des vibrations. Dans le cas de structures minces, on fait souvent appel à l'utilisation de transducteurs piézoélectriques sous forme de pastilles rectangulaires collées sur la structure comme le montrent de nombreux travaux [TLI 04]. Ces pastilles peuvent servir de capteurs de déformation ou bien d'actionneurs à effet réparti. Une telle structure est qualifiée « d'intelligente » puisqu'elle peut obéir à une loi de commande permettant, par exemple, d'amortir des vibrations.

La modélisation de structures intelligentes par la méthode des éléments finis a fait l'objet d'une attention particulière. L'intérêt porté à l'égard des matériaux piézoélectriques ainsi qu'à leurs applications pour la conception de structures intelligentes a conduit bon nombre de chercheurs à formuler de nouveaux éléments. Dans [BAL 01, ZAL 03], les auteurs proposent la formulation d'éléments coques multiphysiques permettant de modéliser des structures plaques composites avec une ou plusieurs couches piézoélectriques. Dans [BEN 00], l'auteur propose un état de l'art des éléments multiphysiques permettant de prendre en compte la présence de matériaux piézoélectriques, qu'ils soient de type poutre, plaque, coque ou encore volumique. Cependant, ces éléments ne sont pas toujours disponibles dans les logiciels commerciaux de calcul par éléments finis. Pour l'étude de problèmes tridimensionnels, la plupart de ces logiciels n'offre la possibilité de modéliser des composants piézoélectriques qu'à l'aide d'éléments volumiques ayant 4 degrés de liberté (*ddl*) par noeud (3 pour les translations et 1 pour le potentiel électrique). Ces mêmes codes de calcul permettent de modéliser des structures minces avec des éléments "très riches" comme par exemple les éléments plaques ou coques ayant 6 *ddl* par noeud et des fonctions d'interpolation quadratiques. La formulation de tels éléments peut être trouvée dans [BAT 90]. Ces derniers permettent de restituer des formes modales de géométrie complexe avec un nombre relativement faible d'éléments, moyennant une étude de convergence, et donc un coût réduit en terme de temps de calcul. Dans une telle situation, la prise en compte de l'interaction électromécanique pastille-structure devient un problème crucial pour la modélisation car on se retrouve en présence d'éléments de topologie différente.

La méthode que nous proposons suppose l'utilisation d'éléments volumiques pour la discrétisation des pastilles piézoélectriques. Elle consiste à raccorder de façon rigide les éléments piézoélectriques à ceux de la structure mince. En utilisant les hypothèses de la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love, il est possible de formuler le problème dynamique comme un problème d'optimisation sous contrainte. Cela permet d'extraire un algorithme permettant de réécrire les matrices de masse et de raideur, ainsi que le vecteur des *ddls* associés. Le calcul du modèle d'état entrée-sortie de la structure instrumentée s'obtient après analyse modale et calcul d'une base de projection modale tronquée, complétée de modes statiques adéquats permettant de récupérer les réponses statiques sur les fonctions de transfert entrée-sortie [TLI 04].


**Figure 1.** Approche QUAD4 pure

**Figure 2.** Approche mixte

## 2. Modélisation par éléments finis

### 2.1. Hypothèses

Les hypothèses nécessaires à la mise en œuvre de la méthode proposée sont celles de Kirchoff-Love [BAT 90]. Elles permettent de lier le déplacement d'un point  $i$  du plan médian de la plaque  $(u^i, v^i, w^i, \theta_u^i, \theta_v^i)$  à celui d'un point  $j$  sur la normale à ce plan passant par  $i$  grâce à la relation :

$$\begin{pmatrix} u^j \\ v^j \\ w^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^i + z \theta_v^i \\ v^i - z \theta_u^i \\ w^i \end{pmatrix} \quad [1]$$

L'équation [1] caractérise un mouvement de corps rigide de l'épaisseur, supposée constante après déformation, sous l'hypothèse des petits déplacements.

### 2.2. Choix du type d'éléments pour modéliser la plaque

Après avoir défini la géométrie et les matériaux du problème, il convient de discrétiser convenablement la structure mince par un choix adapté du type d'élément. Si le choix d'éléments volumiques de type HEXA8 pour mailler les pastilles piézoélectriques est une donnée préalable, deux approches peuvent être envisagées pour mailler la structure mince :

- Une approche où toute la structure mince est discrétisée par des éléments plaque de type Kirchoff-Love QUAD4 (figure 1).
- Une approche mixte où la structure mince est discrétisée par des QUAD4 sauf sous les pastilles piézoélectriques où sont utilisés des éléments volumiques de type HEXA8 (figure 2)

Dans le cas de l'approche mixte, il faut proscrire la présence de nœuds incompatibles. Dans l'autre cas, le maillage global doit respecter certaines contraintes permet-

tant de donner un sens aux hypothèses de Kirchoff-Love. En effet, chaque nœud d'un élément volumique de la pastille piézoélectrique doit se situer sur la normale au plan médian passant par un nœud de l'élément plaque.

### 2.3. Prise en compte de l'interaction électromécanique

La formulation variationnelle du problème aboutissant à la discrétisation par éléments finis est présentée dans [TLI 04]. Dans le cas d'une structure équipée d'un capteur et d'un actionneur, elles conduisent aux équations de mouvement [2] et d'observation [3] suivantes :

$$M \ddot{u} + (K_{uu} + K_{u\phi}^c T (K_{\phi\phi}^c)^{-1} K_{u\phi}^c) u = F - K_{u\phi}^a T \Phi^a \quad [2]$$

$$\phi^c = (K_{\phi\phi}^c)^{-1} K_{u\phi}^c u \quad [3]$$

où  $u, \phi^c, \Phi^a, F$  représentent respectivement le vecteur des *ddl*s, la tension aux bornes d'un capteur, celle appliquée à l'actionneur et les efforts extérieurs purement mécanique et  $M, K_{uu}^c, K_{\phi\phi}^c, K_{u\phi}^c$  et  $K_{u\phi}^a$  représentent respectivement les matrices de masse, de raideur mécanique, de raideur électrique, d'effet piézoélectrique pour le capteur et pour l'actionneur. Ces équations sont soumises à  $H$  contraintes cinématiques de raccordement (une par *ddl* à contraindre) issues de l'équation [1] :

$$\sum_{y=1}^{n_k} C_{xy} u_y = C_x^0 \quad x = 1, \dots, H \quad [4]$$

Par application de la méthode des liaisons multiples (ou MPC : *multipoint constraint*) entre *ddl*s présentée dans [TLI 04], on aboutit aux équations de mise à jour des matrices de masse  $M^*$  et de raideur totale <sup>1</sup>  $K^*$ , ainsi qu'à la mise à jour du vecteur des efforts généralisés  $F^*$  et du vecteur des *ddl*s  $u^*$  :

$$K_{kj}^* = K_{kj} - C_j^* K_{kx} - C_k^* K_{xj} + C_k^* C_j^* K_{xx} \quad [5]$$

$$M_{kj}^* = M_{kj} - C_j^* M_{kx} - C_k^* M_{xj} + C_k^* C_j^* M_{xx} \quad [6]$$

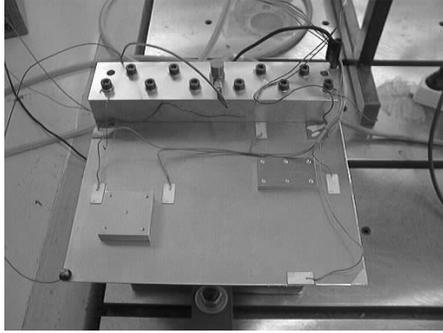
$$F_k^* = F_k - C_x^{0*} K_{kx} - C_k^* F_x + C_k^* C_x^{0*} K_{xx} \quad [7]$$

où  $C_j^* = C_j / C_x$  et  $C_x^{0*} = C_x^0 / C_x$ . Après une étude de convergence du modèle, il est alors possible d'extraire un modèle sous forme d'état, projeté dans une base modale tronquée, nécessairement complétée de mode(s) statique(s), décrivant le comportement entrée-sortie de chaque transfert actionneur-capteur.

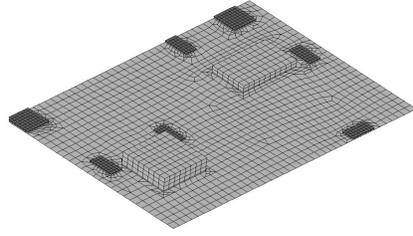
## 3. Application

Nous nous intéressons au problème de la modélisation de la structure représentée par la figure 3. Il s'agit d'une structure composée d'une plaque mince de dimensions

1. notée  $K = K_{uu} + K_{u\phi}^c T (K_{\phi\phi}^c)^{-1} K_{u\phi}^c$



**Figure 3.** *Structure expérimentale*



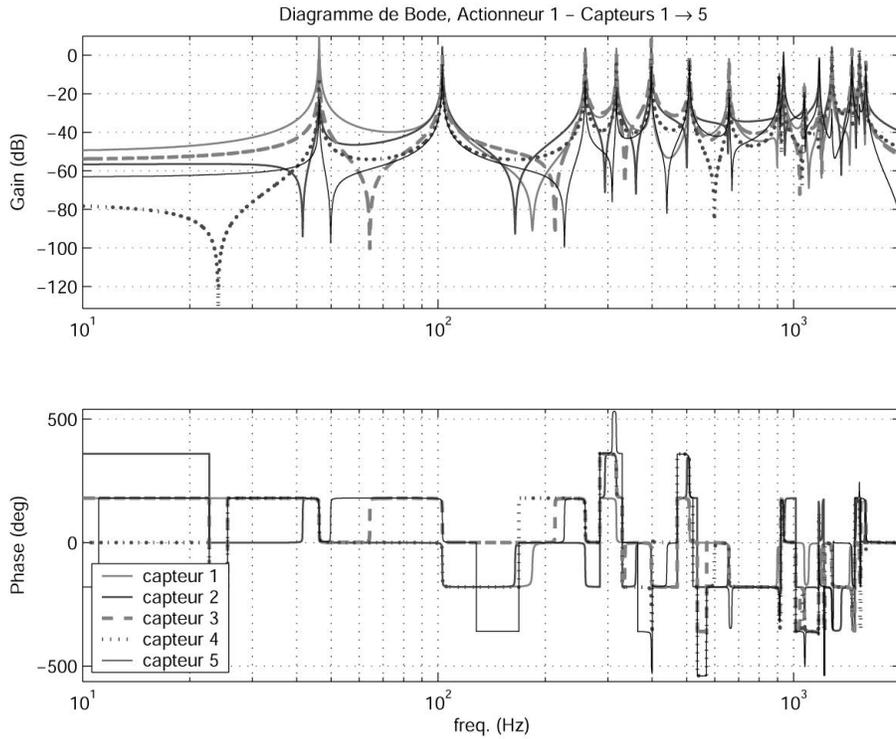
**Figure 4.** *Structure discrétisée*

230 × 160 × 1,6 mm en aluminium, encastrée dans un support pouvant être fixé sur pot vibrant, sur laquelle ont été rapportés deux blocs épais en aluminium. Plusieurs pastilles piézoélectriques ont été collées sur cette plaque. Deux d'entre elles, de dimensions 20 × 20 × 0,7 mm, servent d'actionneurs et les cinq autres, de dimensions 20 × 10 × 0,4 mm, servent de capteurs. La description géométrique complète est présentée dans [TLI 04]. La modélisation par éléments finis a été réalisée à l'aide du logiciel ANSYS® 7.1 (figure 4). Le modèle dynamique entrée-sortie a été calculé à l'aide de MATLAB® et de la toolbox *SDT 5.1* [BAL]. Pour le raccordement, l'approche utilisée est celle décrite par la figure 1. La figure 5 représente la réponse fréquentielle entre un actionneur et tous les capteurs pour une base modale tronquée aux 15 premiers modes, complétée de 3 modes statiques relatifs aux réponses statiques des deux actionneurs et de l'action d'un pot vibrant.

#### 4. Conclusion

Nous venons de présenter une méthode simple pour la modélisation par éléments finis de l'interaction électromécanique de pastilles piézoélectriques collées sur une structure mince. Cette méthode repose sur l'application de la technique des liaisons multiples entre degrés de liberté permettant de raccorder des éléments plaques à des éléments volumiques. Simple à mettre en œuvre, cette méthode permet à des utilisateurs de logiciels commerciaux de calculs par éléments finis d'obtenir des modèles d'état entrée-sortie satisfaisants.

Dans la version étendue de cet article, nous présenterons la comparaison des réponses fréquentielles simulées aux réponses fréquentielles expérimentales. Le modèle d'état obtenu après analyse modale permet ensuite d'appliquer une méthode de synthèse d'un correcteur pour amortir les vibrations de certains modes.



**Figure 5.** Réponses fréquentielles actionneur - capteurs

## 5. Bibliographie

- [BAL ] BALMÈS E., « Structural Dynamics Toolbox *SDT 5.1*, for use with matlab », Software.
- [BAL 01] BALAMURUGAN V., NARAYANAN S., « Shell finite element for smart piezoelectric composite plate/shell structures and its application to the study of active vibration control », *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 37, 2001, p. 713-738.
- [BAT 90] BATOZ J., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, vol. 1, 2 et 3, Editions Hermès, 1990.
- [BEN 00] BENJEDDOU A., « Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptative structural elements : a survey », *Computers & Structures*, vol. 76, 2000, p. 347-363.
- [TLI 04] TLIBA S., « Contrôle actif des vibrations dans des structures mécaniques minces instrumentées de transducteurs piézoélectriques », Thèse de doctorat, SATIE - ENS de Cachan, Cachan (94), décembre 2004.
- [ZAL 03] ZALLO A., GAUDENZI P., « Finite element models for laminated shells with actuation capability », *Computers & Structures*, vol. 81, 2003, p. 1059-1069.