



HAL
open science

Méthodes sans maillage et conditions aux limites

Serge Dumont, Olivier Goubet, Tuong Ha-Duong, Pierre Villon

► **To cite this version:**

Serge Dumont, Olivier Goubet, Tuong Ha-Duong, Pierre Villon. Méthodes sans maillage et conditions aux limites. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812994

HAL Id: hal-01812994

<https://hal.science/hal-01812994>

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Méthodes sans maillage et conditions aux limites

Serge Dumont* — **Olivier Goubet*** — **Tuong Ha-Duong**** — **Pierre Villon*****

* *LAMFA-CNRS UMR 6140, UPJV*
33, Rue Saint-Leu
80 039 Amiens Cedex
{serge.dumont,olivier.goubet}@u-picardie.fr

** *LMAC, UTC*
BP 20529
60205 Compiègne Cedex
tuong.ha-duong@utc.fr

*** *Laboratoire Roberval*
UTC, BP 20529
60205 Compiègne Cedex
pierre.villon@utc.fr

RÉSUMÉ. Nous montrons ici qu'il est possible d'utiliser une méthode sans maillage pour résoudre une équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites de type Dirichlet non homogène, même dans le cas où les fonctions de base ne s'annulent pas sur le bord du domaine, et ceci grâce à une formulation variationnelle adaptée. Nous montrerons l'efficacité de la méthode par une étude numérique en dimension deux, et une étude théorique complète en dimension un.

ABSTRACT. We perform here some mesh free methods to inhomogeneous Laplace equations. We prove the efficiency of those methods compare with classical ones, in two D case for numerics, and for 1D for complete theoretical results.

MOTS-CLÉS : méthodes sans maillage, approximation non conforme, transformée en ondelettes

KEYWORDS: meshfree methods, nonconforming methods, wavelets transform

1. Position du problème

On considère un domaine borné régulier Ω , de frontière $\Gamma = \partial\Omega$, et une équation aux dérivées partielles elliptique avec conditions aux limites de type Dirichlet écrites sur ce domaine. Classiquement la résolution approchée de ce type d'équations s'effectue à l'aide des éléments finis. On est alors amené à discrétiser le domaine, et il est bien connu que la qualité des résultats dépend en particulier de la précision avec laquelle le maillage approche le bord du domaine [CIA 98].

Lorsque l'on utilise une méthode sans maillage, de type éléments diffus [BRE 99], ondelettes [BEY 92, DAU 88, DUM 96] ou autre, la difficulté provient du fait que ces méthodes sont particulièrement efficaces lorsque les supports de toutes les fonctions de forme sont identiques ou proportionnels. Ceci nous empêche donc de considérer des fonctions de forme sur une grille respectant la géométrie du domaine.

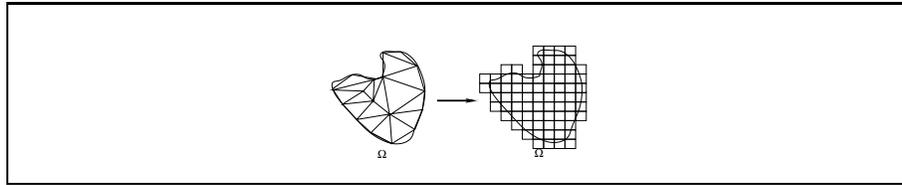


Figure 1. Illustration éléments finis / méthode sans maillage.

Une parade peut être alors d'utiliser des techniques de type domaine fictif, consistant à plonger le domaine initial dans un domaine plus grand et de géométrie plus simple. On impose alors les conditions aux limites sur le bord Γ par des techniques provenant de l'optimisation. Cette méthode est très coûteuse car elle nécessite l'emploi d'un grand nombre de degrés de liberté (augmentation de la taille du domaine, utilisation de multiplicateurs de Lagrange). L'idée de cet article est d'incorporer les conditions aux limites de type Dirichlet à l'intérieur d'une formulation variationnelle que nous appellerons non standard, un peu à la manière des conditions de type Neumann. Malheureusement, la forme bilinéaire associée à cette formulation demeure symétrique mais n'est plus définie positive. Les idées développées ici sont proches de celle rencontrées avec la méthode de Galerkin discontinue [PRU 02].

2. Ondelettes sur \mathbb{R}

Les tests numériques effectués lors de cette étude ont été réalisés à l'aide de la transformée en ondelettes. Nous allons définir brièvement cette base d'approximation. Ce sont des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ construites à partir de dilatations et translations de deux fonctions (φ la fonction d'échelle et ψ l'ondelette associée) de telle sorte que, en notant $\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^jx - k)$, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{jk}) \varphi_{jk}(x) + \sum_{i \geq j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{ik}) \psi_{ik}(x)$$

où (f, φ_{jk}) sont les coefficients d'approximation de la fonction, et (f, ψ_{ik}) sont les coefficients de détails.

La fonction φ vérifie également une relation d'échelle $\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k)$ où (h_k) est une suite (un filtre) de longueur finie, connue.

Ceci induit une propriété très intéressante de la transformée en ondelettes : les coefficients de la matrice de rigidité peuvent être calculés directement à partir de la relation d'échelle, sans formule de quadrature.

3. La formulation variationnelle non standard

3.1. Principe

Soit Ω un ouvert borné, régulier de frontière Γ régulière. Soit $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^{3/2}(\Gamma)$ donné, nous nous intéressons à la résolution du problème modèle :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) & \text{si } x \in \Gamma \end{cases} \quad [1]$$

Il est bien connu [CIA 98] que ce problème admet une unique solution u dans $V = H^2(\Omega)$. Afin d'écrire une formulation faible associée à ce problème, considérons une fonction test $v \in V = H^2(\Omega)$, on obtient, grâce à la formule de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad [2]$$

Ensuite, sachant que $u = u_0$ sur le bord Γ , on peut introduire les conditions de Dirichlet dans la formulation variationnelle en écrivant, pour tout $v \in V$

$$- \int_{\Gamma} (u - u_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \, ds = 0. \quad [3]$$

En ajoutant les deux égalités précédentes, on obtient ainsi la formulation variationnelle non standard

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v + u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Gamma} u_0 \frac{\partial v}{\partial n} \, ds. \quad [4]$$

On notera par la suite cette égalité sous la forme $\beta(u, v) = \Lambda(v) \forall v \in V$.

REMARQUE. — Cette formulation variationnelle est connue [NIT 74], mais jusqu'à présent, on ajoutait un terme de pénalisation afin d'obtenir de bonnes propriétés. Cette formulation est également utilisée dans la méthode des éléments finis discontinus, où on permet à la solution d'être discontinue d'un élément du maillage à un autre [PRU 02]. Dans ce cas, on utilise plutôt la forme non symétrique de la formulation, qui consiste à retrancher 3 à 2 au lieu de l'ajouter comme ici.

3.2. Propriétés

On peut montrer, exactement comme dans le cas standard ensuite que cette formulation variationnelle 4 est équivalente à la formulation forte 1.

La forme bilinéaire β et la forme linéaire Λ sont continues sur $V = H^2(\Omega)$, mais ne le sont pas sur $H^1(\Omega)$, contrairement à la formulation variationnelle standard.

La forme bilinéaire β est symétrique, mais n'est pas définie positive. En effet $\beta(v, v) = 0$ dès que v est une fonction constante. Malgré cela, grâce à l'équivalence entre 4 et 1, la solution de 4 est toujours unique.

Dans le cas où u et v sont dans l'espace variationnel standard pour ce problème, c'est-à-dire $u, v \in H_0^1(\Omega)$, la formulation variationnelle 4 est identique à la formulation variationnelle non standard. Par suite, sur cet espace, la forme bilinéaire β est définie positive.

3.3. Discrétisation

Nous allons considérer ici une espace d'approximation V_h de dimension fini, du type (en notant $h = 2^{-j}$ le pas d'approximation)

$$V_h = \{\phi_{jk}, k \in \mathbb{Z}, \text{support } \phi_{jk} \cap \Omega \neq \emptyset\},$$

mais tout autre espace d'approximation ayant les qualités suffisantes (conditions de Strang-Fix [STR 73]) peut convenir (en particulier les éléments finis, au tout autre méthode sans maillage). Il reste à montrer que le problème : trouver $u \in V_h$ tel que

$$\beta(u_h, v_h) = \Lambda(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad [5]$$

admet une unique solution pour tout h suffisamment petit, et que cette solution tend vers la solution du problème continue lorsque le pas h tend vers 0. Nous allons distinguer deux cas, la dimension 1 et la dimension supérieure.

3.4. Cas de la dimension 1

Soit $\Omega = (0, 1)$, la formulation 4 devient, étant donné $f \in L^2(\Omega)$, a et b deux réels, trouver $u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\int_0^1 u' v' dx + \left(u'(0)v(0) + u(0)v'(0) - u'(1)v(1) - u(1)v'(1) \right) = \int_0^1 f v dx - av'(0) + bv'(1). \quad [6]$$

Nous avons alors la proposition

Proposition 1 *Pour tout $h > 0$ suffisamment petit, la formulation discrète 6 possède une unique solution u_h , et cette solution converge vers la solution du problème continu 4 lorsque h tends vers 0.*

La preuve de cette propriété est relativement simple. Elle repose sur le fait que tout élément de V_h peut s'écrire

$$v_h(x) = v_h(0)(1 - x) + v_h(1)x + w_h(x) \quad [7]$$

où w_h est dans l'espace $E_h = H_0^1(\Omega) \cap V_h$. La matrice de rigidité obtenue à partir de la formulation 6 est donc équivalente à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -C \end{pmatrix} \quad [8]$$

où A est définie positive (c'est la matrice de rigidité issue de la formulation variationnelle standard), C est la matrice positive

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et B est telle que $\ker(M) = \{0\}$. Ensuite, comme V_h est un espace d'approximation contenant les polynômes de degré inférieur ou égal à 1, la partie linéaire de v_h est reconstruite exactement, l'erreur étant uniquement sur w_h . On est alors ramené au problème standard, ce qui induit la convergence.

3.5. Cas de la dimension supérieure

Dans ce cas, on a une décomposition analogue (on peut écrire toute fonction de $V = H^2(\Omega)$ comme la somme d'une fonction harmonique et d'une fonction de $H_0^1(\Omega)$), mais cette décomposition ne permet pas de conclure. Il a toutefois été montré qu'en ajoutant un terme de pénalisation, c'est à dire qu'en remplaçant β par

$$\beta_r(u, v) = \beta(u, v) + r \int_{\Gamma} uv \, ds$$

où r est un réel suffisamment grand, alors la forme bilinéaire β_r devient définie positive et la solution u_h de la formulation variationnelle 5 en remplaçant β par β_r est unique pour tout h . De plus, la limite de u_h , quand le pas h tend vers 0, est bien la solution du problème initial 4. Les détails de cette démonstration se trouvent dans [NIT 74]. Toutefois, il est montré numériquement dans la suite que ce terme de pénalisation est inutile. Même sans ce terme, la matrice de rigidité est inversible, et la vitesse de convergence de la solution approchée est du même ordre que dans le cas standard.

4. Résultats numériques

Nous avons effectué des tests numériques en dimension 2, en particulier dans le cas où la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est décomposée en $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ où sur la partie Γ_N

est imposée des conditions de type Neumann. Dans ce cas, des difficultés persistent encore au niveau théorique.

Ces résultats montrent la consistance de la technique. Si on utilise des fonctions de formes permettant de reconstruire exactement des polynômes de degré 2, alors, lorsque la solution de 4 est un polynôme de degré 2, l'erreur obtenue par discrétisation en utilisant 5 est inférieure à 10^{-10} .

Lorsque la solution est régulière, nous avons vérifié que l'on obtient bien alors un taux de convergence $\|u - u_h\|_{L^2} = O(h^3)$.

Nous avons obtenu également des résultats comparables à ceux d'une formulation standard, même dans le cas de fonctions singulières (couches limites).

Nous avons enfin comparé le comportement des valeurs propres propres de l'opérateur discrétisé, en utilisant la formulation variationnelle standard ou non standard 4.

5. Conclusion

Toute cette étude nous montre que cette formulation variationnelle donne des résultats comparables à ceux obtenus avec des éléments finis standards. Ceci nous permet d'envisager l'utilisation beaucoup plus aisée qu'auparavant des méthodes sans maillage pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

6. Bibliographie

- [BEY 92] BEYLKIN G., « On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets », *SIAM J. Anal. Num.*, vol. 29, 1992, p. 1716-1740.
- [BRE 99] BREITKOPF P., TOUZOT G., VILLON P., « Méthodes alternatives aux éléments finis : collocation diffuse à double grille », *Actes des 4^e colloque national en Calcul des Structures*, Giens, mai 1999, p. 549-554.
- [CIA 98] CIARLET P., *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, 1998.
- [DAU 88] DAUBECHIES I., « Orthonormal bases of compactly supported wavelets », *Comm. in pure and appl. Math.*, vol. 41, 1988, p. 909-998.
- [DUM 96] DUMONT S., LEBON F., « Representation of plane elastostatics operators in Daubechies wavelets », *Comp. Struct.*, vol. 60, 1996, p. 561-569.
- [NIT 74] NITSCHKE J., « Convergence of nonconforming method », *Proc. Symposium Math. Res. Center*, 1974, p. 15-53.
- [PRU 02] PRUDHOMME S., PASCAL F., ODEN J., ROMKES A., « Review of a priori error estimation for discontinuous Galerkin methods », rapport de technique n° RT00-02, 2002, Laboratoire de mathématiques, Univ. Paris Sud.
- [STR 73] STRANG G., FIX G. J., *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.