



**HAL**  
open science

# Fonctions de forme étendues pour la mécanique élasto-plastique de la rupture par méthode X-FEM

Thomas Elguedj, Anthony Gravouil, Alain Combescure

## ► To cite this version:

Thomas Elguedj, Anthony Gravouil, Alain Combescure. Fonctions de forme étendues pour la mécanique élasto-plastique de la rupture par méthode X-FEM. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812989

**HAL Id: hal-01812989**

**<https://hal.science/hal-01812989v1>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Fonctions de forme étendues pour la mécanique élasto-plastique de la rupture par méthode X-FEM

**Thomas Elguedj — Anthony Gravouil — Alain Combescure**

*Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides  
UMR 5514*

*INSA Lyon, Bât. Jean d'Alembert*

*18-20 rue des Sciences*

*69621 Villeurbanne*

*{thomas.elguedj,anthony.gravouil,alain.combescure}@insa-lyon.fr*

---

*RÉSUMÉ. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) a été utilisée avec succès dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture. Nous proposons de l'étendre à la propagation de fissure en fatigue dans le cadre de la plasticité confinée. Une nouvelle base d'enrichissement élasto-plastique est extraite des champs HRR et couplée avec un algorithme élasto-plastique incrémental. Les résultats en mode I et mode mixte sont en bon accord avec ceux obtenus dans un code élément fini classique.*

*ABSTRACT. The eXtended Finite Element Method (X-FEM) was used with success in the past few years for Linear Elastic Fracture Mechanics. In this paper we propose to extend this method to fatigue crack growth analysis in the case of confined plasticity. A new plastic enrichment basis is therefore extracted from HRR fields and introduced in X-FEM coupled with a Newton like iteration scheme and a radial return method for plastic flow. Comparisons are made for mode I and mixed mode loading with a finite element code and show good agreements.*

*MOTS-CLÉS : mécanique non linéaire de la rupture, méthode des éléments finis étendus, champs HRR.*

*KEYWORDS: non-linear fracture mechanics, extended finite element method, HRR fields.*

---

## 1. Introduction

Cet article présente, dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus, une analyse élasto-plastique bidimensionnelle de la propagation de fissure en fatigue en mode mixte. Cette méthode est basée sur les champs asymptotiques en pointe de fissure en élasto-plasticité appelés champs HRR (*cf.* [HUT 68] et [RIC 68]) d'où est extraite une base d'enrichissement élasto-plastique similaire à celle proposée dans [RAO 04].

## 2. Etude des champs asymptotiques élasto-plastiques

### 2.1. Singularités

Considérons un matériau élasto-plastique suivant une loi de comportement en puissance de type Ramberg-Osgood dont l'expression unidimensionnelle est la suivante :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad [1]$$

où  $\sigma_0$  est la contrainte de référence,  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$  la déformation de référence,  $E$  le module de Young,  $\alpha$  une constante matériau et  $n$  l'exposant de la loi puissance.

Pour un état multiaxial de contrainte, la loi de Ramberg-Osgood peut être généralisée en utilisant la partition du taux de déformation en sa part élastique et sa part plastique. La prédominance en pointe de fissure de la part plastique de la déformation permet d'obtenir les champs asymptotiques des contraintes, déformations et déplacements proposés par Hutchinson [HUT 68], Rice et Rosengren [RIC 68] et appelés champs HRR :

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad [2]$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad [3]$$

$$u_i = \alpha \varepsilon_0 r \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad [4]$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires d'un repère centré sur la pointe de fissure,  $I_n$  une fonction sans dimension de  $n$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  et  $\tilde{u}_i$  des fonctions angulaires sans dimension de  $n$  et  $\theta$ , et  $J$  l'intégrale de Rice.

Dans [HUT 68] et [RIC 68], les fonctions angulaires sont calculées en mode I pur ; comme présenté dans [PAN 90] celles-ci peuvent également être calculées en mode II pur en considérant les conditions d'antisymétrie. Les équations [2] à [4] représentent donc les champs asymptotiques élasto-plastiques en mode I et II.

## 2.2. Analyse de Fourier

La nécessité de résoudre une équation différentielle non linéaire d'ordre quatre pour obtenir les fonctions  $\tilde{u}_i(\theta, n)$  impose d'approximer celles-ci sur l'exemple de l'élasticité linéaire. Dans le cas élastique linéaire, les champs asymptotiques des déplacements en mode I et II sont donnés par :

$$u_1(r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (K_I \cos \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta + 2)) \quad [5]$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (K_I \sin \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) - K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta + 2)) \quad [6]$$

où  $k$  est la constante de Kolosov,  $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  en contraintes planes et  $k = 3 - 4\nu$  en déformations planes. Ces fonctions peuvent être exactement représentées en les développant sur la base suivante :

$$\left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad [7]$$

Dans le cas élasto-plastique, une décomposition en série de Fourier des fonctions  $\tilde{u}_i(\theta, n)$  est réalisée pour les modes I et II. Ces fonctions, qui sont connues sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ , sont périodisées sur  $[0; 4\pi]$  en conservant les propriétés de symétrie et antisymétrie des champs élastiques, et la variable passe de  $\theta$  à  $\theta/2$ . Il apparaît que les seules harmoniques non nulles sont celles associées aux fonctions  $\cos(k\frac{\theta}{2})$  et  $\sin(k\frac{\theta}{2})$  ( $k$  étant un entier positif) selon les propriétés de symétrie.

Cette analyse de Fourier montre que l'on peut approximer correctement les champs HRR en utilisant une décomposition tronquée comprenant les quatre premières harmoniques non nulles. On peut observer sur la Figure 1 la comparaison des développements de Fourier avec les champs HRR en déformation plane en mode I et II pour différentes valeurs de  $n$  ( $n = 3.7, n = 10, n = 50$ ).

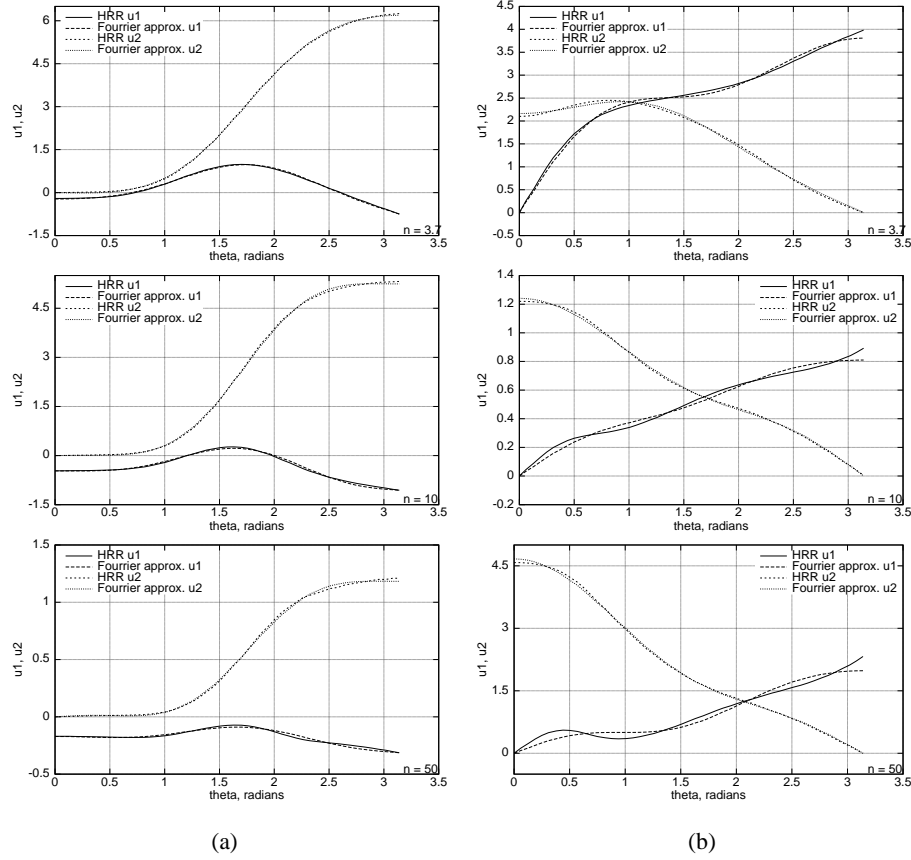
Il est donc possible de représenter correctement les champs de déplacements en mode I et II en développant les champs HRR sur la base suivante :

$$r^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \left( \cos \frac{k\theta}{2}, \sin \frac{k\theta}{2} \right); k \in [1, 3, 5, 7] \right\} \quad [8]$$

## 3. Base d'enrichissement X-FEM élasto-plastique

### 3.1. Cas élastique

La méthode des éléments finis étendus (cf. [MOE 99]) introduit des degrés de liberté supplémentaires associés à des fonctions de forme enrichies en utilisant le



**Figure 1.** Approximations des champs HRR en mode I (a) et mode II (b)

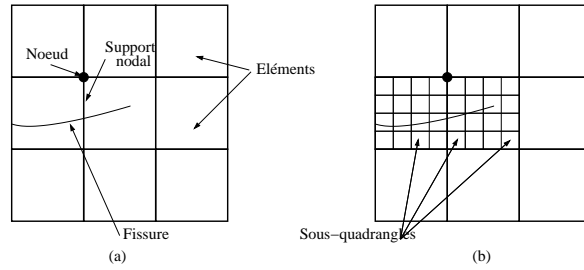
concept de partition de l'unité [BAB 97]. Le champ de déplacement enrichi s'écrit alors :

$$U = \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i(x) U_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{cut}} N_i(x) H(x) a_i + \sum_{i \in \mathcal{N}_{front}} \sum_{\alpha} N_i(x) B_{\alpha}(x) b_{i,\alpha} \quad [9]$$

avec  $\mathcal{N}$  l'ensemble des noeuds éléments finis standards,  $\mathcal{N}_{cut}$  l'ensemble des noeuds appartenant aux éléments entièrement tranchés par la fissure, et  $\mathcal{N}_{front}$  l'ensemble des noeuds appartenant à l'élément contenant la pointe de fissure.  $N_i$  sont les fonctions de forme éléments finis classiques,  $H$  est une fonction saut valant  $\pm 1$  et  $[B_{\alpha}]$  est donnée par l'équation [7] dans le cas élastique linéaire (cf. [FLE 97]).

### 3.2. Cas plastique

La base de Fourier obtenue précédemment a été modifiée par manipulations trigonométriques sur l'exemple de l'élasticité afin qu'elle ne comporte qu'une seule fonction discontinue en  $\theta = \pm\pi$ . La présence d'harmoniques plus élevées qu'en élasticité nous a amené à modifier la technique d'intégration numérique par sous-triangles utilisée jusqu'alors dans X-FEM (cf. [MOE 99]). Une technique de sous-découpage régulier en 16 sous-quadrangles (cf Figure 2) contenant chacun 16 points de Gauss nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants. Ces sous-éléments qui ne comportent pas de noeuds sont utilisés uniquement pour le calcul de la matrice de raideur et de l'écoulement plastique.



**Figure 2.** (a) Support nodal tranché par la fissure. (b) Sous-quadrangles associés aux éléments tranchés.

Une analyse des valeurs propres de différentes bases tirées de l'équation [8] et de la base élastique nous a permis de choisir la base suivante :

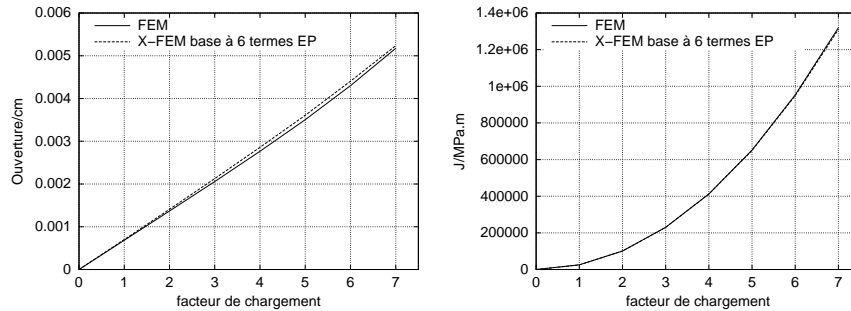
$$[B_\alpha] = \left[ r^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), r^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), r^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \right. \\ \left. r^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), r^{\frac{1}{n+1}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(3\theta), r^{\frac{1}{n+1}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(3\theta) \right] [10]$$

### 4. Exemples

Des comparaisons ont été faites en mode I pur et en mode mixte avec une code éléments finis classique dans lequel un maillage fin rayonnant en pointe de fissure a été utilisé. On peut observer sur la Figure 3 que les résultats pour l'ouverture de fissure et l'intégrale  $J$  en mode mixte sont en bon accord.

### 5. Conclusion

Une méthode d'enrichissement de l'approximation éléments finis dans le cadre de la mécanique élasto-plastique de la rupture a été présentée. L'hypothèse principale de



**Figure 3.** Comparaison X-FEM / FEM pour l'ouverture de fissure et l'intégrale  $J$ .

cette étude est que l'on se place dans le cas de la plasticité confinée en pointe de fissure et par conséquent seul l'élément fini contenant la pointe de fissure est enrichi. Une nouvelle base d'enrichissement capable de capturer les singularités HRR est présentée dans un cadre X-FEM. Les résultats présentés sont en bon accord pour l'évaluation de paramètres classiques en mécanique de la rupture tels que l'intégrale  $J$ . Comme précisé précédemment ces travaux seront utilisés par la suite pour prédire la propagation de fissure élasto-plasticité en fatigue sans remaillage avec prise en compte du contact et du frottement.

## 6. Bibliographie

- [BAB 97] BABUŠKA I., MELENK J., « The Partition of Unity Method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 727-758.
- [FLE 97] FLEMING M., CHU Y. A., MORAN B., BELYTSCHKO T., « Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, 1997, p. 1483-1504.
- [HUT 68] HUTCHINSON J., « Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material. », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, 1968, p. 13-31.
- [MOE 99] MOES N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T., « A Finite Element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.
- [PAN 90] PAN J., « Asymptotic analysis of a crack in a power-law material under combined in-plane and out-of-plane shear loading conditions », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 38, n° 2, 1990, p. 133-159.
- [RAO 04] RAO B., RAHMAN S., « An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, 2004, p. 197-223.
- [RIC 68] RICE J., ROSENGREN G., « Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 16, 1968, p. 1-12.