



**HAL**  
open science

# Frontière mobile en transformations finies: analyse thermodynamique

Benoît Delattre, Rachel-Marie Pradeilles Duval, Claude Stolz

► **To cite this version:**

Benoît Delattre, Rachel-Marie Pradeilles Duval, Claude Stolz. Frontière mobile en transformations finies: analyse thermodynamique. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812985

**HAL Id: hal-01812985**

**<https://hal.science/hal-01812985v1>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Frontière mobile en transformations finies : analyse thermodynamique

**B. Delattre<sup>\*,\*\*</sup> — R.M. Pradeilles Duval<sup>\*</sup> — C. Stolz<sup>\*</sup>**

<sup>\*</sup> *LMS - Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau  
{delattre,rachel,stolz}@lms.polytechnique.fr*

<sup>\*\*</sup> *MFPM-Michelin, 63000 Clermont Ferrand*

---

*RÉSUMÉ. Nous nous intéressons ici à l'analyse thermodynamique de l'évolution d'une discontinuité matérielle liée à une transformation irréversible de phase. Nous considérons une structure hétérogène dissipative dont nous liions la dissipation d'énergie induite par la transformation de matériau avec l'évolution de la frontière marquant le passage d'une phase à l'autre. Nous formulons un critère de type endommagement portant sur le taux local de restitution d'énergie à travers le front de transformation du système. Nous nous plaçons dans le cadre des transformations finies pour des matériaux hyperélastiques avec liaisons internes. Enfin, nous appliquons cette modélisation à un cylindre creux endommagé à ses deux extrémités radiales soumis à un cisaillement de Poiseuille.*

*ABSTRACT. The evolution of a moving boundary related to an irreversible phase transformation is analyzed through thermodynamical considerations. The phase transformation induces a dissipation of energy upon the interface. Analyzing this dissipation, an energy release rate is obtained and a damaging criterion is defined. We consider hyperelastic materials with internal constraints within the finite transformations framework. The example of a composite hollow cylinder, damaged at both radial boundaries, under Poiseuille's shear test, is described to apply this moving boundaries method.*

*MOTS-CLÉS : Frontières mobiles, approche thermodynamique, transformations finies*

*KEYWORDS: Moving boundaries, thermodynamical approach, finite transformations*

---

## 1. Introduction

La transformation de phase induite par un chargement mécanique est couramment observée en pratique. La plastification, la rupture fragile ou ductile, l'usure sont autant d'exemples. La description de telles transformations a souvent été abordée dans la littérature [ABE 90, GUR 90, PRA 95, STR 96, SIM 00, DRA 01], sous certaines hypothèses (élasticité linéaire, hypothèse de petites perturbations, symétries, etc). Le présent article vise à présenter une extension de ces méthodes à des cas plus complexes.

Nous nous proposons de décrire thermodynamiquement l'évolution d'un milieu continu 3D dans lequel se propage un front de transformation de phase. Cette évolution quasi-statique est associée à un changement irréversible de comportement mécanique entre matériaux hyperélastiques soumis à des liaisons internes (de type incompressibilité). L'analyse est présentée dans le cadre des transformations finies, en description lagrangienne avec des opérateurs non symétriques.

## 2. Analyse thermodynamique de l'évolution de $\Gamma_t$

Soit la description lagrangienne d'un domaine hétérogène  $\Omega_t = \Omega_1 \cup \Omega_2$  constitué de deux sous domaines homogènes hyperélastiques, séparés par la frontière  $\Gamma_t$  (Fig.1). L'indice  $i$  correspond au matériau  $i$ . Ce volume subit la transformation  $\underline{\Phi}$  définie par  $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t)$  où  $\underline{X}$  (resp.  $\underline{x}$ ) est le vecteur position lagrangien (resp. eulérien) dans la configuration  $\mathcal{K}_0$  initiale (resp.  $\mathcal{K}_t$  à l'instant  $t$ ),  $\underline{u} = \underline{x} - \underline{X}$ , le champ de déplacements. Nous faisons l'hypothèse qu'au cours de l'évolution, le matériau 1 se transforme irréversiblement en matériau 2 à travers le front de transformation du matériau  $\Gamma_t$ . La frontière  $\Gamma_t$  n'est mobile dans la configuration  $\mathcal{K}_0$  que s'il y a transformation effective. La surface extérieure  $\partial\Omega_t$ , de normale extérieure  $\underline{n}$ , présente une partition  $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_T$  sur laquelle on impose respectivement des déplacements  $\lambda \underline{u}^d$  et des efforts  $\lambda \underline{T}^d$ , paramétrés par le chargement  $\lambda$ . Notons  $\underline{\nu}$  la normale à  $\Gamma_t$ , orientée de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ . La vitesse de propagation de  $\Gamma_t$  paramétrise la transformation de phase, mais seule sa partie normale  $-\phi \leq 0$  est intrinsèque, sa partie tangente dépendant de la paramétrisation de la surface  $\Gamma_t$ , en dehors de ses éventuels bords débouchants.

### 2.1. Équations d'équilibre

Les deux matériaux sont caractérisés par leur énergie libre  $w_i$ , fonction de  $\underline{F}$ , le gradient de transformation, et soumis à des liaisons internes, qui s'écrivent respectivement  $\varphi_i(\underline{F}) = 0$ . Ainsi, le tenseur des contraintes de Boussinesq<sup>1</sup> est donné par la loi de comportement :

$${}^t \underline{B}_i = \frac{\partial w_i}{\partial \underline{F}} + \eta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \underline{F}} \text{ dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

1. noté parfois tenseur de Piola-Lagrange ou premier tenseur de Piola-Kirchhoff

où  $\eta_i$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la liaison interne  $\varphi_i$ <sup>2</sup>. Soit un champ  $\underline{u}$  cinématiquement admissible à  $\lambda \underline{u}^d$  ( $\underline{u} \in \mathcal{W}(\lambda \underline{u}^d)$ ), le Lagrangien du système s'écrit :

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \Gamma_t, \lambda, \eta) = \int_{\Omega_t(\Gamma_t)} w(\underline{F}(\underline{X})) dv_0 - \int_{\partial\Omega_T} \lambda \underline{T}^d \cdot \underline{u} ds_0 + \int_{\Omega_t(\Gamma_t)} \eta(\underline{X}) \varphi(\underline{F}(\underline{X})) dv_0 \quad (2)$$

A un instant  $t$  donné, pour une configuration géométrique  $\Gamma_t$  connue,  $\underline{u}(\Gamma_t, \lambda)$  est le champ de déplacements solution du problème défini par la stationnarité du Lagrangien :  $\mathcal{L}_{,u} \delta \underline{u} + \mathcal{L}_{,\eta} \delta \eta = 0$  pour tout champ  $\delta \eta$  et  $\delta \underline{u} \in \mathcal{W}(\underline{0})$ . En dérive les équations d'équilibre classiques, exprimées à l'aide du tenseur de Boussinesq<sup>3</sup> :

$$\text{Div} \underline{B} = \underline{0} \text{ dans } \Omega_t, \quad \underline{B} \cdot \underline{n} = \lambda \underline{T}^d \text{ sur } \partial\Omega_T, \quad \llbracket \underline{B} \rrbracket_{\Gamma} \cdot \underline{\nu} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_t \quad (3)$$

## 2.2. Évolution quasi-statique

Lorsque le paramètre de chargement  $\lambda$  évolue au cours du temps, le front  $\Gamma_t$  peut se propager. Pour une vitesse de propagation normale le long de  $\Gamma_t$  donnée,  $\phi$ , les conditions de contact parfait sur l'interface  $\Gamma_t$  se dérivent en :

$$\llbracket \dot{\underline{u}} \rrbracket_{\Gamma} - \phi \llbracket \underline{F} \rrbracket_{\Gamma} \cdot \underline{\nu} = \underline{0} \quad \text{et} \quad \llbracket \dot{\underline{B}} \rrbracket_{\Gamma} \cdot \underline{\nu} + \text{Div}_{\Gamma} \llbracket \phi \underline{B} \rrbracket_{\Gamma} = \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (4)$$

où  $\dot{\underline{u}}$  est le champ de vitesses et  $\text{Div}_{\Gamma} f$  correspond à la divergence du champ  $f$  sur  $\Gamma_t$ . L'hypothèse d'évolution quasi-statique implique que  $\dot{\underline{u}}$  est solution du problème défini par :  $d(\mathcal{L}_{,u} \delta \underline{u} + \mathcal{L}_{,\eta} \delta \eta) / dt = 0$  pour tout champ  $\delta \eta$  et  $\delta \underline{u} \in \mathcal{W}(\underline{0})$  à tout instant. Ainsi, les équations locales correspondantes définissent-elles le problème en vitesses  $\mathcal{S}_v$  suivant :

$$\begin{aligned} {}^t \underline{B} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \underline{F}^2} : \dot{\underline{F}} + \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \underline{F}^2} : \dot{\underline{F}} + \dot{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{F}} \quad \text{et} \quad \text{Div} \dot{\underline{B}} = \underline{0} \text{ dans } \Omega_t \\ \dot{\underline{B}} \cdot \underline{n} &= \dot{\lambda} \underline{T}^d \text{ sur } \partial\Omega_T, \quad \llbracket \dot{\underline{B}} \rrbracket_{\Gamma} \cdot \underline{\nu} = -\text{Div}_{\Gamma} \llbracket \phi \underline{B} \rrbracket_{\Gamma} \text{ sur } \Gamma_t \end{aligned} \quad (5)$$

## 2.3. Dissipation

La puissance dissipée  $\mathcal{D}$  d'un système est donnée à l'équilibre par la différence entre la puissance des efforts extérieurs  $\mathcal{W}$  et la variation d'énergie libre totale  $d\mathcal{L}/dt$  :

$$\mathcal{D} = \mathcal{W} - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int_{\Gamma_t} \phi \left( \llbracket w \rrbracket_{\Gamma} - \underline{\nu} \cdot \llbracket \underline{B} \cdot \underline{F} \rrbracket_{\Gamma} \underline{\nu} \right) ds_0 = \int_{\Gamma_t} \phi \mathcal{G} ds_0 \quad (6)$$

Le taux de restitution d'énergie  $\mathcal{G} = \llbracket w \rrbracket_{\Gamma} - \underline{\nu} \cdot \llbracket \underline{B} \cdot \underline{F} \rrbracket_{\Gamma} \underline{\nu}$  est défini comme la force thermodynamique associée à  $\phi$  [SIM 00, PRA 95].

2. Dans le cas d'un matériau à plus d'une liaison interne, il suffit écrire  $\sum_p \eta_i^p \partial \varphi_i^p / \partial \underline{F}$ ,  $p \leq 6$ .  
3.  $\llbracket f \rrbracket_{\Gamma} = f_1 - f_2$ , le saut à travers la surface  $\Gamma_t$

## 2.4. Propagation

Le critère de propagation de  $\Gamma_t$  choisi est un critère énergétique sur le taux de restitution d'énergie  $\mathcal{G}$ . La loi d'évolution est une loi associée à ce critère. Ainsi :

$$\forall \vec{s} \in \Gamma_t, \quad \begin{cases} g(\mathcal{G}(\vec{s}, \lambda)) = 0 & \Rightarrow \phi(\vec{s}) \geq 0 \\ g(\mathcal{G}(\vec{s}, \lambda)) < 0 & \Rightarrow \phi(\vec{s}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Alors, la loi d'évolution s'écrit simplement  $D_\phi(g(\mathcal{G}(\vec{s}))) = D_\phi(\mathcal{G}(\vec{s})) \partial g / \partial \mathcal{G} = 0$ , où  $D_\phi(f)$  est la dérivée convective du champ  $f$  au cours d'une propagation normale du front  $\Gamma_t$ . Dans notre cas, en notant  $\text{Tr}_\Gamma(f) = f : (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\nu}} \otimes \underline{\underline{\nu}})$  la trace sur  $\Gamma_t$  et  $\underline{\underline{\nabla}}_\Gamma f$  le gradient sur  $\Gamma_t$ , nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned} D_\phi(\mathcal{G}) = \text{Tr}_\Gamma \left( \llbracket \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}} \rrbracket_\Gamma \right) - \underline{\underline{\nu}} \cdot \llbracket \underline{\underline{\dot{B}}} \cdot \underline{\underline{F}} \rrbracket_\Gamma \underline{\underline{\nu}} - \phi \text{Tr}_\Gamma \left( \llbracket \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{F}} \rrbracket_\Gamma \cdot \underline{\underline{\nu}} \right) \\ - 2\underline{\underline{\nu}} \cdot \llbracket \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}} \rrbracket_\Gamma \cdot \underline{\underline{\nabla}}_\Gamma \phi + \phi \underline{\underline{\nu}} \cdot \llbracket \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{B}} \rrbracket_\Gamma : (\underline{\underline{\nu}} \otimes \underline{\underline{\nu}}) \quad (8) \end{aligned}$$

## 2.5. Formulation variationnelle du problème en vitesses et unicité

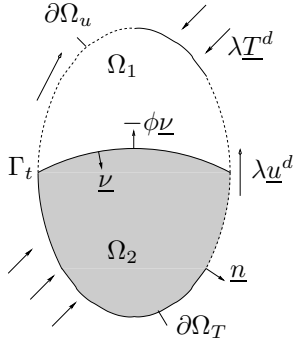
Le problème d'évolution du système peut se mettre sous une forme variationnelle. Notons  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\underline{\underline{u}}, \dot{\lambda}, \phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\dot{F}}} : \frac{\partial^2 w}{\partial \underline{\underline{F}}^2} : \underline{\underline{\dot{F}}} dv_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \eta \underline{\underline{\dot{F}}} : \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \underline{\underline{F}}^2} : \underline{\underline{\dot{F}}} dv_0 + \int_{\Omega_t} \dot{\eta} \underline{\underline{\dot{F}}} : \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{F}}} dv_0 \\ - \int_{\partial \Omega_T} \dot{\lambda} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{u}} ds_0 - \int_{\Gamma_t} \phi \llbracket \underline{\underline{B}} \rrbracket_\Gamma : \underline{\underline{\dot{F}}} ds_0 + \int_{\Gamma_t} \frac{\phi^2}{2} \llbracket \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{F}} \rrbracket_\Gamma \cdot \underline{\underline{\nu}} ds_0 \\ + \int_{\Gamma_t} \frac{\phi^2}{2} \text{Div}_\Gamma(\underline{\underline{B}}_2) \cdot \llbracket \underline{\underline{F}} \rrbracket_\Gamma \cdot \underline{\underline{\nu}} ds_0 - \int_{\Gamma_t} \frac{\phi^2}{2} \underline{\underline{B}}_2 : \underline{\underline{\nabla}}_\Gamma \llbracket \underline{\underline{F}} \rrbracket_\Gamma \cdot \underline{\underline{\nu}} ds_0 \quad (9) \end{aligned}$$

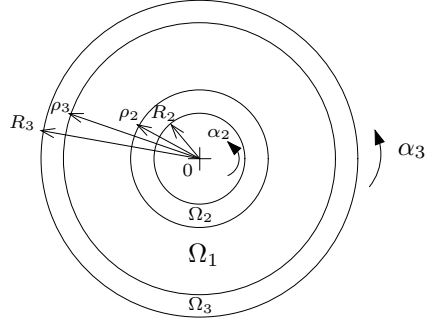
où  $(\underline{\underline{u}}, \phi) \in \mathcal{J}$  (i.e.  $\underline{\underline{u}} \in \mathcal{U}(\lambda \underline{\underline{u}}^d)$ ,  $\phi$  respecte (Eq.7) et  $(\underline{\underline{u}}, \phi)$  relié par (Eq.4b)). Une solution  $(\underline{\underline{u}}, \phi)$  du problème aux limites en vitesses est caractérisée par :

$$\forall (\underline{\underline{u}}^*, \phi^*) \in \mathcal{J}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{u}}}(\underline{\underline{u}}^* - \underline{\underline{u}}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}(\phi^* - \phi) \geq 0 \quad (10)$$

En considérant la fonction  $\mathcal{H}(\dot{\lambda}, \phi) = \mathcal{F}(\underline{\underline{u}}(\dot{\lambda}, \phi), \dot{\lambda}, \phi)$ , la valeur prise par la fonction  $\mathcal{F}$  à la solution  $\underline{\underline{u}}(\dot{\lambda}, \phi)$  du problème  $\mathcal{S}_v$ ,  $\mathcal{H}$  caractérise les courbes d'équilibre passant par l'état d'équilibre  $\underline{\underline{u}}(\lambda, \Gamma_t)$ , dans son voisinage. Une condition nécessaire d'unicité locale de l'évolution est la définie positivité de  $\partial^2 \mathcal{H} / \partial \phi^2$ . Dans le cas général, il n'existe pas de condition suffisante d'unicité [STO 03].



**Figure 1.** *Système étudié et notations dans le cas général.*



**Figure 2.** *Cylindre creux endommagé aux bords  $r = R_i$  sous cisaillement de Poiseuille.*

### 3. Application

Nous appliquons la méthodologie développée précédemment sur un exemple. Soit  $\Omega_t$  un cylindre creux composite, de hauteur  $H$  et de rayons intérieur et extérieur  $R_2$  et  $R_3$ , constitué de deux matériaux répartis en trois domaines (Fig. 2). Le volume  $\Omega_1$  ( $\rho_2 \leq R \leq \rho_3$ ) est composé par un matériau incompressible "sain" de type neo-hookien (de module  $\mu_s$ ). Le système est endommagé sur ces deux faces latérales intérieure et extérieure : un matériau "endommagé" (incompressible et neo-hookien de module  $\mu_e$ ) constitue les cylindres intérieur (domaine  $\Omega_2$  compris entre les rayons  $R_2$  et  $\rho_2$ ) et extérieur (domaine  $\Omega_3$  compris entre les rayons  $\rho_3$  et  $R_3$ ). Par ailleurs, il est moins rigide ( $\mu_e < \mu_s$ ) que le matériau sain. On note les deux fronts d'endommagement  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  (définis resp. par  $R = \rho_2$  et  $R = \rho_3$ , de vitesses de propagation normale  $\phi_2$  et  $\phi_3$  et de taux de restitution d'énergie  $\mathcal{G}_2$  et  $\mathcal{G}_3$ ). On impose des conditions de contact sans frottement sur les bords  $Z = 0$  et  $Z = H$  et des déplacements sur les bords  $R = R_i$ . On considère un chargement de type cisaillement de Poiseuille où on prescrit une variation d'angle ( $\alpha_i = \theta - \Theta$  en  $R = R_i$ ) sans changement de rayon ni de hauteur. La solution statique à un tel chargement respectant la symétrie cylindrique du problème est  $\theta = \Theta + \delta_i - b_i/R^2$  où  $\delta_i$  et  $b_i$  sont constants sur chaque volume  $\Omega_i$ ,  $\theta$  étant continu sur tout le domaine  $\Omega$ .

En appliquant une variation de chargement de  $\dot{\alpha}_i$  sur chaque extrémité radiale, la solution axisymétrique du problème en vitesse est  $\dot{\theta} = \hat{\delta}_i - \hat{b}_i/R^2$  où  $\hat{\delta}_i$  et  $\hat{b}_i$  sont constants par domaine. On note  $\Delta\hat{\alpha}_2 = \hat{\delta}_1 - \hat{b}_1/\rho_3^2 - \hat{\alpha}_2$  et  $\Delta\hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_3 - \hat{\delta}_1 + \hat{b}_1/\rho_2^2$ . Dans ces conditions,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  sont forcément uniformes et positives. En supposant leur positivité stricte, on détermine tous les paramètres de la solution en vitesses. Alors, grâce aux relations d'Hadamard en vitesses (Eq.4a), on exprime linéairement  $\rho_i \Delta\hat{\alpha}_i$  en fonction de  $\phi_i$ . Avec les relations d'Hadamard sur les taux de contraintes (Eq.4b), on obtient  $\rho_3 \phi_2 + \rho_2 \phi_3 = 0$ . Or, l'hypothèse  $\phi_i > 0$  est incompatible avec cette dernière relation. Ainsi, indépendamment du critère  $g$  choisi, le système ne peut-il en

aucun cas s'endommager simultanément des deux cotés tout en respectant la symétrie cylindrique du problème. On observe donc une compétition entre les deux processus d'endommagement du système.

Par contre, le calcul des taux de restitutions d'énergie  $\mathcal{G}_i$  dans le cas axisymétrique général donne  $\mathcal{G}_i = (\mu_s - \mu_e)(1 + 4\mu_s b_3^2 / \mu_e \rho_i^4)$ . Ainsi, a-t-on  $\mathcal{G}_2 > \mathcal{G}_3$ . En prenant une fonction  $g$  convexe et croissante (critère basé sur un processus d'endommagement cumulatif), Le front qui peut se propager en premier est forcément  $\Gamma_2$ . La solution respectant les hypothèses  $\phi_3 = 0$  et  $\phi_2$  uniforme et positive existe et donne :

$$\phi_2 = \frac{(\dot{\alpha}_3 - \dot{\alpha}_2)(\mu_s \rho_2^2 \rho_3^2 (R_3^2 - R_2^2) - (\mu_s - \mu_e) R_3^2 R_2^2 (\rho_3^2 - \rho_2^2))}{2(\alpha_3 - \alpha_2) \rho_2 (\mu_s \rho_3^2 (R_3^2 - R_2^2) + (\mu_s - \mu_e) R_3^2 R_2^2)} \geq 0 \quad (11)$$

#### 4. Conclusion

L'évolution d'un système avec front de transformation irréversible entre deux matériaux hyperélastiques avec liaisons internes a été présentée dans le cadre des transformations finies. La formulation variationnelle du problème en vitesses lorsque le critère de propagation du front s'appuie sur le taux de restitution d'énergie permet d'écrire un critère suffisant d'existence et d'unicité locales de cette évolution. Cette méthode est illustrée par le cisaillement de Poiseuille d'un cylindre creux doublement endommagé.

#### 5. Bibliographie

- [ABE 90] ABEYARATNE R., KNOWLES J., « On the driving traction acting on a surface of strain discontinuity in a continuum », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 38, 1990, p. 345-360.
- [DRA 01] DRAGON LOUISET M., « On a predictive macroscopic contact-sliding wear model based on micromechanical considerations », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, 2001, p. 1625-1639.
- [GUR 90] GURTIN M., STRUTHERS A., « Multiphase thermodynamics with interfacial structure. 3. Evolving phase boundaries in the presence of bulk deformation », *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 112, 1990, p. 97-160.
- [PRA 95] PRADEILLES DUVAL R., STOLZ C., « Mechanical transformation and discontinuities along a moving surface », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 43, 1995, p. 91-121.
- [SIM 00] SIMHA N., BHATTACHARYA K., « Kinetics of phase boundaries with edges and junctions in a three-dimensional multi-phase body », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, 2000, p. 2619-2641.
- [STO 03] STOLZ C., *Energetic approaches in non-linear mechanics*, AMAS lectures Notes 11, Center of excellence for advanced materials and structures, IFTR, IPPT, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003.
- [STR 96] STROMBERG N., JOHANSSON L., KLARBRING A., « Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 33, 1996, p. 1817-1836.