



**HAL**  
open science

# Construction d'un modèle probabiliste de la matrice d'impédance d'un domaine non-borné par une méthode non paramétrique Application au dimensionnement sismique d'un ouvrage

Régis Cottereau, Didier Clouteau, Christian Soize, Simon Cambier

## ► To cite this version:

Régis Cottereau, Didier Clouteau, Christian Soize, Simon Cambier. Construction d'un modèle probabiliste de la matrice d'impédance d'un domaine non-borné par une méthode non paramétrique Application au dimensionnement sismique d'un ouvrage. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812978

**HAL Id: hal-01812978**

**<https://hal.science/hal-01812978v1>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Construction d'un modèle probabiliste de la matrice d'impédance d'un domaine non-borné par une méthode non paramétrique

## Application au dimensionnement sismique d'un ouvrage

Régis Cottereau\* — Didier Clouteau\* — Christian Soize\*\* — Simon Cambier\*\*\*

\* Laboratoire MSSMat, École Centrale Paris  
Grande Voie des Vignes, F-92295 Châtenay-Malabry cedex  
{cottereau,clouteau}@mssmat.ecp.fr

\*\* LaM, Université de Marne-la-Vallée  
Cité Descartes, F-77454 Marne-la-Vallée cedex 2  
soize@univ-mlv.fr

\*\*\* Électricité de France R&D, Dépt. AMA  
F-92141 Clamart cedex  
simon.cambier@edf.fr

---

*RÉSUMÉ. Des facteurs économiques et réglementaires poussent les ingénieurs à prendre en compte les incertitudes existant dans les domaines en interaction, via des impédances de frontière, avec les structures qu'ils modélisent. Un modèle probabiliste de ces impédances est construit par une méthode non paramétrique, autour d'un modèle moyen à variables d'état cachées identifié à partir de calculs déterministes. L'approche est appliquée au dimensionnement d'une cuve de stockage de gaz construite sur pieux.*

*ABSTRACT. Economic and legal pressures on the structural engineers force them to consider uncertainty in the domains interacting, through boundary impedances, with their design structure. A probabilistic model of this impedance is constructed around a mean hidden state variables model using a non-parametric method. This mean model is constructed using only deterministic tools. The methodology is applied to the design of a gas container constructed on a pile foundation.*

*MOTS-CLÉS : modèle non paramétrique, impédance, mécanique probabiliste, incertitudes*

*KEYWORDS: non-parametric model, impedance, probabilistic mechanics, uncertainty quantification*

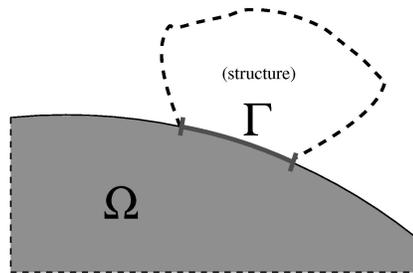
---

## 1. Introduction

En aéronautique, hydrodynamique et géodynamique, les ingénieurs sont confrontés à des domaines de très grande taille - atmosphère, mers ou sols - en interaction, via une matrice d'impédance, avec les structures qu'ils cherchent à dimensionner [WOL 85]. Celle-ci, notée  $[Z(\omega)]$ , relie - pour le problème harmonique local défini sur le domaine extérieur  $\Omega$  (figure 1) - les vecteurs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de contraintes  $\mathbf{t}$  définis sur une certaine base de fonctions d'interface sur la frontière  $\Gamma$ .

$$[Z(\omega)] \mathbf{u} = \mathbf{t}.$$

Dans un souci d'efficacité économique et de respect de la sécurité, ils doivent pouvoir calculer cette impédance le plus exactement possible, et savoir quantifier l'incertitude sur leur estimation, donc calculer la fonction densité de probabilité de  $[Z(\omega)]$ . Le sol notamment pose de nombreux problèmes [MAG 00, FAV 98], liés à la difficulté de mesure de ses caractéristiques, à une grande variabilité spatiale de celles-ci, et à des problèmes de modélisation.



**Figure 1.** *Problème du couplage d'un domaine non-borné  $\Omega$  incertain à une structure via l'interface  $\Gamma$*

Les nombreuses méthodes stochastiques paramétriques développées [SCH 97], notamment la méthode des éléments finis stochastiques [GHA 91, AUV 00] ou des méthodes couplées Éléments Finis Stochastiques / Éléments Finis de Frontière [SAV 02], sont mal adaptées pour des domaines comme le sol car elles nécessitent l'identification des paramètres incertains et surtout la connaissance des fonctions densité de probabilité sur ces derniers. De plus, pour un domaine non-borné, le nombre de degrés de liberté à considérer en complique l'application.

Récemment, une méthode non paramétrique a été introduite par Soize [SOI 00] qui s'affranchit de ces inconvénients et permet de prendre en compte les incertitudes sur les modèles. Elle est utilisée dans cette communication pour construire directement, c'est à dire sans passer par la construction d'un modèle probabiliste de la matrice de rigidité du système puis sa condensation sur  $\Gamma$ , un modèle probabiliste de  $[Z(\omega)]$ . Pour une telle construction, avantageuse en termes de degrés de liberté, les méthodes paramétriques sont difficilement utilisables car la dépendance de la valeur des coefficients de  $[Z(\omega)]$  par rapport aux paramètres mécaniques n'est en général pas accessible.

L'utilisation de la méthode non paramétrique pour la prise en compte d'incertitudes sur des domaines bornés est brièvement rappelée (section 2) puis l'extension aux domaines non-bornés est envisagée avec la construction d'un modèle probabiliste de l'impédance de frontière (section 3). Ce modèle est basé sur l'utilisation de

variables d'état cachées, et un modèle moyen est identifié à partir d'un modèle déterministe (section 4). L'approche est appliquée à un cas industriel de dimensionnement d'une cuve de stockage de gaz posée sur des pieux (section 5).

## 2. La méthode non paramétrique

La méthode non paramétrique propose de remplacer les matrices réduites, définies positives ou positives et indépendantes de la fréquence, issues de l'approximation Éléments Finis d'un problème mécanique déterministe par des matrices aléatoires. La densité de probabilité  $p_{[A]}$  de chacune de ces matrices aléatoires  $[A]$  est calculée analytiquement par maximisation de l'entropie [JAY 57] sous les contraintes :

$$\begin{cases} E \{[A]\} = [\underline{A}] \\ E \{\ln(\det [A])\} = \nu_{[A]} < +\infty, \end{cases} \quad (1)$$

où  $[\underline{A}]$  et  $\nu_{[A]}$  sont des paramètres. Les matrices moyennes  $[\underline{A}]$  sont déterminées à partir du problème déterministe et les  $\nu_{[A]}$  sont déduits de paramètres de dispersion  $\delta_{[A]}$  estimés par le modélisateur ou déterminés expérimentalement [ARN 05]. Le principe constructif de la fonction densité de probabilité d'une matrice aléatoire définie positive  $[A]$  peut être appliqué aussi bien à un modèle de matrice de rigidité d'un domaine borné de la forme

$$[R(\omega)] = [K] - i\omega [C] - \omega^2 [M].$$

qu'à tout autre modèle, par exemple d'impédance, composé de matrices définies positives indépendantes de la fréquence.

## 3. Modèle probabiliste de la matrice d'impédance

Le modèle construit doit, pour être physiquement valable, être causal. Plusieurs méthodes permettent *a priori* d'assurer cette causalité : utilisation des relations de Kramers-Kronig [KRO 26, KRA 27] ; décomposition sur une base de fonctions de Hardy [PIE 01] ; ou utilisation de variables cachées [CHA 87]. En mécanique numérique, la première méthode n'est pas constructive car les parties réelles et imaginaires ne sont pas accessibles indépendamment l'une de l'autre comme c'est le cas en mécanique expérimentale. Le développement sur une base de fonctions de Hardy pose des problèmes de convergence et, les matrices en facteur n'étant *a priori* pas définies positives, la méthode non paramétrique nécessite l'utilisation d'autres ensembles de matrices aléatoires plus délicats à construire.

L'approche proposée consiste à rechercher l'impédance  $[Z(\omega)]$  sous la forme d'une condensation sur  $\Gamma$  d'un système mécanique régi par une équation du second degré à coefficients constants. Les variables considérées sont alors des variables d'état cachées, liées seulement indirectement aux degrés de liberté physiques du système.

L'impédance du système, décomposée en blocs selon les  $n_\Gamma$  degrés de liberté sur  $\Gamma$  et  $n_h$  variables cachées, est

$$\begin{aligned} [R(\omega)] &= [K] - i\omega [C] - \omega^2 [M] \\ &= \begin{bmatrix} [Z_{\Gamma\Gamma}(\omega)] & [Z_{\Gamma h}(\omega)] \\ [Z_{\Gamma h}(\omega)]^T & [Z_{hh}(\omega)] \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où  $[K]$ ,  $[C]$  et  $[M]$  sont des matrices définies positives (la présence de modes de corps rigide peut également être traitée).  $[Z_{\alpha\beta}(\omega)] = [K_{\alpha\beta}] - i\omega [C_{\alpha\beta}] - \omega^2 [M_{\alpha\beta}]$ , pour  $(\alpha, \beta)$  dans  $\{\Gamma, h\}^2$ ,  $[M_{\Gamma\Gamma}]$ ,  $[C_{\Gamma\Gamma}]$  et  $[K_{\Gamma\Gamma}]$  sont des matrices  $n_\Gamma \times n_\Gamma$  réelles définies positives,  $[M_{\Gamma h}]$ ,  $[C_{\Gamma h}]$  et  $[K_{\Gamma h}]$  des matrices  $n_\Gamma \times n_h$  réelles et  $[M_{hh}]$ ,  $[C_{hh}]$  et  $[K_{hh}]$  des matrices  $n_h \times n_h$  réelles définies positives. L'impédance de frontière condensée sur  $\Gamma$  peut alors être mise sous la forme d'une fraction matricielle rationnelle

$$\begin{aligned} [Z(\omega)] &= [Z_{\Gamma\Gamma}(\omega)] - [Z_{\Gamma h}(\omega)] [Z_{hh}(\omega)]^{-1} [Z_{\Gamma h}(\omega)]^T \\ &= \frac{[N(\omega)]}{d(\omega)}, \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\omega \mapsto [N(\omega)]$  and  $\omega \mapsto d(\omega)$  sont deux polynômes de  $\omega$  à coefficients constants (matriciels pour  $N$  et scalaires pour  $d$ ). Les degrés de  $d$  et  $N$  vérifient  $\deg d = 2n_h$  et  $\deg N = \deg d + 2$ .

#### 4. Identification du modèle moyen

La forme de l'impédance  $[Z(\omega)]$  assure sa causalité. La méthode non paramétrique permet alors de déterminer (équation 1) les fonctions densité de probabilité des matrices définies positives  $[K]$ ,  $[C]$  et  $[M]$  moyennant l'identification des matrices moyennes  $[\underline{K}]$ ,  $[\underline{C}]$  et  $[\underline{M}]$  et l'estimation des coefficients de dispersion [ARN 05] pour chaque matrice. Un modèle moyen à variables d'état cachées doit donc être proposé à partir de résultats expérimentaux ou numériques en minimisant

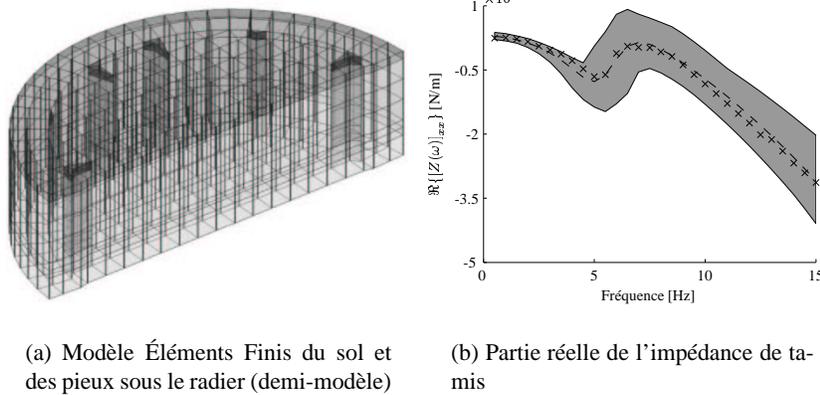
$$\epsilon = \sum_{k=1}^{n_f} \left\| [Z(\omega_k)] - [\tilde{Z}(\omega_k)] \right\|_F,$$

où  $[\tilde{Z}]$  est la matrice des impédances mesurées (expérimentalement ou numériquement avec un modèle déterministe), connue aux fréquences  $\omega_k$  pour  $k$  dans  $\{1, \dots, n_f\}$ ,  $[Z(\omega_k)]$  est la condensation sur  $\Gamma$  (équation 2) de  $[\underline{K}] - i\omega_k [\underline{C}] - \omega_k^2 [\underline{M}]$  et  $\|\cdot\|_F$  représente la norme de Frobenius. De nombreux outils peuvent être utilisés pour la résolution de ce problème, en général non-linéaire, d'identification (voir par exemple [LEB 96] ou [BUL 95]).

#### 5. Exemple : dimensionnement d'une cuve de stockage

La méthode est appliquée au dimensionnement du radier circulaire d'une cuve de stockage de gaz. De grande taille - 80 mètres de diamètre - ce radier est posé sur

pieux. L'impédance déterministe est calculée à l'aide d'une méthode mixte Éléments Finis - Éléments Finis de Frontière : une zone cylindrique sous la fondation, englobant les pieux, est modélisée par Éléments Finis (figure 2(a)) et l'influence du reste du sol est prise en compte par la méthode des Éléments Finis de Frontière. Le modèle moyen à variables cachées de l'impédance est ensuite construit par identification, et la méthode non paramétrique est appliquée. Les résultats sont présentés à la figure 2(b) pour la partie réelle de l'impédance de tamis. La méthode non paramétrique a été utilisée avec 1000 tirages de Monte-Carlo (la convergence de l'espérance et de la covariance est observée pour moins de 500 tirages) et des coefficients de dispersion  $\delta_{[K]} = \delta_{[C]} = \delta_{[M]} = 0.1$ .



**Figure 2.** Application de la méthode non paramétrique au calcul de l'impédance de tamis du sol et des pieux d'une cuve de stockage de gaz : résultat déterministe (+), modèle moyen (—) et enveloppe des tirages de Monte-Carlo (en gris).

## 6. Conclusions et perspectives

La méthode présentée permet de construire un modèle probabiliste de l'impédance de domaines non-bornés complexes, prenant en compte les incertitudes de modélisation, et ne nécessitant pas l'identification des paramètres incertains et la quantification de leur incertitude. La réduction de l'analyse à des matrices d'impédance de bord permet des gains de temps de calcul importants par rapport à des méthodes paramétriques où le domaine non-borné serait discrétisé. L'intérêt de la méthode a été montré sur un premier exemple numérique de dimensionnement. Les principaux axes de recherche concernent l'identification des coefficients de dispersion  $\delta$  [ARN 05] et les méthodes d'identification du modèle moyen pour des cas plus compliqués que celui présenté.

## 7. Bibliographie

- [ARN 05] ARNST M., CLOUTEAU D., BONNET M., « Identification de modèles probabilistes - Application au modèle non-paramétrique introduit par Soize », *7ème Colloque National en Calcul des Structures*, 2005, à paraître.
- [AUV 00] AUVINET G., MELLAH R., MASROURI F., RODRIGUEZ J. F., « La méthode des éléments finis stochastiques en géotechnique », *Revue Française de Géotechnique*, vol. 93, 2000, p. 67-79.
- [BUL 95] BULTHEEL A., VAN BAREL M., « Vector orthogonal polynomials and least squares approximation », *SIAM Journal of Matrix Analysis and its Applications*, vol. 16, n° 3, 1995, p. 863-885.
- [CHA 87] CHABAS F., SOIZE C., « Prise en compte dans la méthode des éléments finis de sous-systèmes mécaniques identifiés par leur impédance de frontière », *La Recherche Aérospatiale*, vol. 5, 1987, p. 59-75.
- [FAV 98] FAVRE J.-L., « Errors in Geotechnics and their impact on safety », *Computers & Structures*, vol. 67, n° 1, 1998, p. 37-45.
- [GHA 91] GHANEM R. G., SPANOS P. D., *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Springer-Verlag, 1991.
- [JAY 57] JAYNES E. T., « Information theory and statistical mechanics », *Physical Review*, vol. 106, n° 4, 1957, p. 620-630.
- [KRA 27] KRAMERS H. A., « La diffusion de la lumière par les atomes », *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici*, vol. 2, 1927, p. 545-557.
- [KRO 26] KRONIG R. D. L., « On the theory of dispersion of X-rays », *Journal of the Optical Society of America*, vol. 12, n° 6, 1926, p. 547-557.
- [LEB 96] LEBLOND J., OLIVI M., « Weighted  $H^2$  approximation of transfer functions », rapport n° RR-2863, 1996, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Sophia-Antipolis, France, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-2863.html>.
- [MAG 00] MAGNAN J.-P., « Quelques spécificités du problème des incertitudes en géotechnique », *Revue Française de Géotechnique*, vol. 93, 2000, p. 3-9.
- [PIE 01] PIERCE L. B., « Hardy Functions », Junior paper, 2001, Princeton University, <http://www.princeton.edu/lbpierce/>.
- [SAV 02] SAVIN E., CLOUTEAU D., « Coupling a bounded domain and an unbounded heterogeneous domain for elastic wave propagation in three-dimensional random media », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, 2002, p. 607-630.
- [SCH 97] SCHUËLLER G. I., « A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics », *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 12, n° 4, 1997, p. 197-321.
- [SOI 00] SOIZE C., « A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics », *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 15, 2000, p. 277-294.
- [WOL 85] WOLF J. P., *Dynamic soil-structure interaction*, Prentice-Hall, Inc., 1985.