



**HAL**  
open science

# Stabilité et Bifurcations de solutions asymptotiques en mécanique des solides non linéaires

Claire David, Marine Marcilac, Alain Rigolot

► **To cite this version:**

Claire David, Marine Marcilac, Alain Rigolot. Stabilité et Bifurcations de solutions asymptotiques en mécanique des solides non linéaires. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812974

**HAL Id: hal-01812974**

**<https://hal.science/hal-01812974>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Stabilité et Bifurcations de solutions asymptotiques en mécanique des solides non linéaire

Claire DAVID, Marine MARCILAC, Alain RIGOLOTT

LMM - UMR CNRS 7607 – Université Paris VI, 4, Place Jussieu

F 75252 PARIS Cedex 05

david@lmm.jussieu.fr

---

*RÉSUMÉ.* Pour l'élasticité du second ordre, le champ de déplacement est obtenu comme somme d'une série dont deux termes successifs sont liés par un système différentiel récursif. Nous présentons ici une méthode originale de résolution de ce type de problème. La forme de la solution dépend des paramètres initiaux (géométrie, loi de comportement, chargement); une étude immédiate et explicite de stabilité est alors possible. La solution est donnée explicitement dans le cas d'une poutre.

*ABSTRACT.* For the elasticity of the second order, the displacement field is obtained as the sum of a series, whose terms are defined recursively, by means of a differential system. We present here an original method for solving this kind of problems. The form of the solution depends on the initial parameters : geometry, the constitutive law of the material and the loading; therefore, an immediate and explicit study of stability is possible. This method is applied numerically in the case of the plane flexion of beams.

*MOTS-CLÉS :* Stabilité; bifurcation; systèmes différentiels récursifs.

*KEYWORDS :* Stability; bifurcation; differential recursive systems.

---

## 1. Introduction

Les études de stabilité de systèmes mécaniques sont l'objet de nombreux travaux. La théorie classique de la stabilité élastique est développée par S. Timoshenko et M. Roseau. La stabilité statique, à laquelle nous nous intéressons ici, est à distinguer de la stabilité dynamique.

En ce qui concerne la stabilité élastique, E. Absi et J. Lerbet définissent sur un exemple classique une approche directe pour des systèmes non conservatifs, pouvant s'appliquer à la fois à des systèmes conservatifs ou non.

Pour la stabilité des corps élancés, la référence principale de la théorie non linéaire est S. S. Antman. Dans le cas particulier d'une poutre sous chargement axial, A. Magnusson, M. Ristinmaa et C. Ljung montrent que la charge de flambement de la solution élastique dépend de l'élancement, et donc que pour un élancement faible le point de bifurcation est instable.

S. Papargyri-Beskou, K. G. Tsepoura, D. Polyzos et G. E. Beskos étudient les problèmes de flexion et de flambage de poutres d'Euler-Bernoulli ; ils proposent une solution analytique, sur la base simplement de la théorie linéaire du gradient élastique avec une surface d'énergie.

Dans le cas d'une poutre sous compression axiale reposant sur un milieu non linéaire, Y. Zhang et K. D. Murphy s'intéressent à deux aspects reliés au saut de modes. Leur étude se base sur une approche trimodale, prenant en compte les défauts de géométrie.

## 2. Position du problème

On considère une poutre, de longueur  $l$ . On désignera, dans ce qui suit, par  $\Omega$  l'espace occupé par la poutre, par  $A$  sa surface latérale,  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  ses bases,  $d$  une longueur caractéristique de  $\Sigma_0$ , et par  $(A_i)$ ,  $(1 \leq i \leq 3)$ , le système de coordonnées dans la configuration non déformée.

Le champ de déplacement d'un point  $M$  quelconque de la poutre s'écrit sous la forme :

$$U = \ell u, \text{ avec } u = O(1). \quad [1]$$

En introduisant le paramètre  $\varepsilon$ , défini par :

$$\varepsilon = \frac{d}{l}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad [2]$$

le problème étudié est normalisé grâce au changement de variables :

$$a_\alpha = \frac{A_\alpha}{d} , \quad a_3 = \frac{A_3}{d} \quad [3]$$

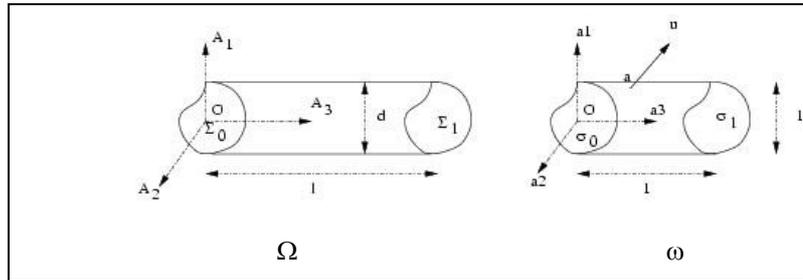


Figure 1.

L'hypothèse des petites déformations permet d'obtenir une représentation des premiers termes du développement :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)} + \dots + \varepsilon^n \mathbf{u}^{(n)} + \dots \quad [4]$$

et de les comparer à ceux du champ de la Résistance des matériaux non linéaire.

Deux termes successifs,  $\mathbf{u}^{(n)}$  et  $\mathbf{u}^{(n+1)}$ , sont reliés par le système différentiel suivant :

$$\mathbf{u}^{(n)} \equiv A M_{\alpha\beta} \mathbf{u}^{(n-1)} \quad [5]$$

où  $M$  est une matrice d'opérateurs différentiels.

L'expression du champ  $\mathbf{u}^{(n)}$  à un ordre quelconque  $n$  peut alors être obtenue :

$$\mathbf{u}^{(n)} \equiv \left[ AM_{\alpha\beta} \right]^{n-2} \mathbf{u}^{(2)} \quad [6]$$

A l'aide d'un outil de calcul symbolique (*Mathematica*), il est possible de calculer le produit formel de deux matrices d'opérateurs différentiels, et d'obtenir ainsi une approximation aussi fine que l'on souhaite du champ de déplacement. La forme de la solution dépend de paramètres initiaux (géométrie et chargement), et permet une étude immédiate de stabilité.

### 3. Expression du champ solution

En appliquant notre méthode de résolution des systèmes différentiels récurrents (à paraître), les composantes des  $\mathbf{u}^{(n)}$  sont cherchées sous la forme :

$$u_i^{(n)} = \operatorname{Re} \left[ \sum_k U_{0i}^{(n)k} a_1^{\alpha_n^i k} a_2^{\beta_n^i k} a_3^{\gamma_n^i k} e^{C_{1,n}^i a_1} e^{C_{2,n}^i a_2} e^{C_{3,n}^i a_3} \right] \quad [7]$$

A l'aide de la relation de récursivité [6], on obtient des relations de récurrence entre  $C_{j,n+1}^i$  et  $C_{j,n}^i$ ,  $U_{0i}^{n+1}$  et  $U_{0i}^n$ ,  $\alpha_{n+1}^i$ ,  $\beta_{n+1}^i$ ,  $\gamma_{n+1}^i$  et  $\alpha_n^i$ ,  $\beta_n^i$ ,  $\gamma_n^i$ .

### 4. Etude de stabilité

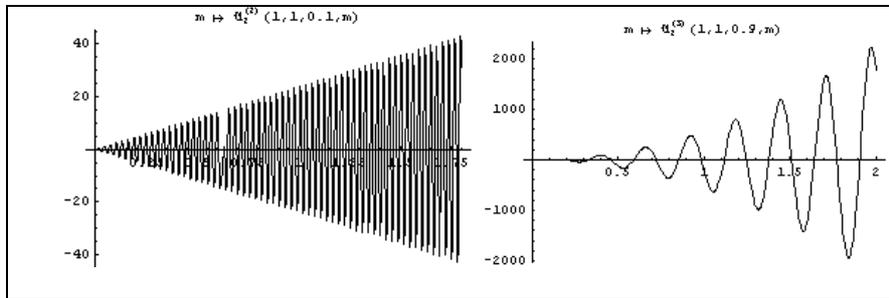
$a_3$	$m_c \left( \tilde{u}_1^{(n)}, \tilde{u}_2^{(n)} \right)$	$m_c \left( \tilde{u}_3^{(n)} \right)$
0.1	0.00730	0.0146
0.9	0.0657	0.1314

**Table 1.** Valeurs des points de bifurcation en fonction du paramètre de chargement.

La Table 1 montre l'évolution du point de bifurcation entre l'extrémité encastree et l'extrémité libre de la poutre. Il est à noter que cette valeur ne dépend pas du rang  $n$  du terme étudié : ainsi, toutes les composantes du développement asymptotique se comportent de la même façon, comme cela était prévisible en fonction de leurs expressions littérales. On peut alors déterminer l'évolution du comportement de la poutre uniquement grâce aux premiers termes de ce

développement (  $n = 0, 1, 2$  ). De plus, cela confirme bien le fait que les termes d'ordre supérieur (  $n \geq 2$  ) ont moins d'influence que ceux du premier ordre (  $n = 0, 1$  ) . Il est donc possible d'obtenir une approximation correcte du champ de déplacement solution en le tronquant à un ordre donné  $N$ . On peut également noter, comme cela était prévisible, que le système est plus sensible aux variations du paramètre de chargement près de l'extrémité libre, le déplacement y devenant très vite instable.

Le point de bifurcation correspond à la valeur  $m = m_c \approx 0.0657$  .



**Figures 1a, b.** Variations de  $\tilde{u}_2^{(2)}$ ,  $\tilde{u}_2^{(3)}$  en fonction de  $m$ .

Les figures 1a,b présentent les variations des composantes  $\tilde{u}_2^{(2)}$ ,  $\tilde{u}_2^{(3)}$  en fonction du paramètre de chargement  $m$ . Les composantes  $\tilde{u}_2^{(n)}$ ,  $\tilde{u}_3^{(n)}$ , à un ordre  $n$  quelconque, présentent le même type de variations. On observe à nouveau que près de l'extrémité libre de la poutre, le déplacement devient très vite instable. Les oscillations augmentent alors exponentiellement.

## 5. Conclusion

Nous proposons ici une étude de stabilité obtenue directement à partir de la solution exacte d'un système différentiel a priori non résoluble. Il est ainsi possible d'obtenir exactement les valeurs numériques des points de bifurcation, et d'étudier avec précision le comportement de la structure en fonction du paramètre de chargement. De plus, l'influence des différentes composantes du développement asymptotique apparaît clairement. Le travail exposé ci-dessus se généralise aisément à la résolution de systèmes différentiels de Mécanique des Solides non Linéaire. L'un des attraits réside dans la facilité d'application, mais également dans l'obtention de solutions explicites.

## 6. Bibliographie

- Absi E., Lerbet J., "Instability of elastic bodies", *Mechanics Research Communications* 31, 2004, 39-44.
- Antman S.S., The theory of rods. In : Flügge, S. (Ed), *Handbuch der Physik*, vol. VIa/2, Springer, Berlin, 1972, 641-703.
- Courbon J., *Résistance des Matériaux*, Dunod, Paris, 1966.
- Germain P., *Cours de mécanique des milieux continus*, Tome 1, Masson et Cie, 1973.
- Lions J.L., Magenes E., « Problèmes aux limites non homogènes et applications », Dunod, Paris, 1970.
- Magnusson A., Ristinmaa M., Ljung C., « Behaviour of the extensible elastica solution », *Int. J. Solids Struct.* 38, 2001, 8441-8457.
- Papargyri-Beskou S., Tsepoura K.G., Polysos D., Beskos D.E., « Bending and stability analysis of gradient elastic beams », *Int. J. Solids Struct.* 40, 2003, 385-400.
- Rigolot A., « Sur une théorie asymptotique des poutres droites », Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VI, 1976.
- Rigolot A., « Déplacements finis et petites déformations des poutres droites : Analyse asymptotique de la solution à grande distance des bases », *Journal de la Mécanique appliquée*, Vol.1, N°2, 1977.
- Roseau M., *Vibrations des systèmes mécaniques*, Masson, Paris, 1984.
- Timoshenko. S, Goodier J .N., *Theory of Elasticity*, third ed. MacGraw-Hill Book Co.,Inc, New York, 1970.
- Zhang Y., Murphy K.D., « Secondary buckling and tertiary states of a beam on non-linear elastic foundation », *Int. J. Nonlinear Mech.* (uncorrected proof).