



HAL
open science

Modélisation éléments finis de poutres sandwich adaptatives en dynamique non-linéaire pour l'atténuation de vibrations

Ana Cristina Galucio, Jean-François Deü, Roger Ohayon

► **To cite this version:**

Ana Cristina Galucio, Jean-François Deü, Roger Ohayon. Modélisation éléments finis de poutres sandwich adaptatives en dynamique non-linéaire pour l'atténuation de vibrations. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812972

HAL Id: hal-01812972

<https://hal.science/hal-01812972v1>

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Modélisation éléments finis de poutres sandwich adaptatives en dynamique non-linéaire pour l'atténuation de vibrations

Ana Cristina Galucio — Jean-François Deü — Roger Ohayon

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés
Conservatoire National des Arts et Métiers
Chaire de Mécanique, Case courrier 353,
2 rue Conté, 75003 Paris

galucio@cnam.fr — deu@cnam.fr — ohayon@cnam.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous proposons une formulation co-rotationnelle de poutres sandwich adaptatives munies d'un traitement hybride actif/passif pour l'atténuation des vibrations en dynamique non-linéaire. Il s'agit de poutres composées d'un cœur viscoélastique contraint par des peaux élastiques munies de pastilles piézoélectriques. Le couplage électromécanique est pris en compte à travers l'introduction d'un opérateur de rigidité ajoutée (cas capteur) et l'imposition d'un chargement mécanique fonction du voltage imposé (cas actionneur). Le comportement viscoélastique du cœur est décrit par une loi de comportement à base de dérivées fractionnaires. La résolution du problème est réalisée à l'aide d'un algorithme combiné de Grünwald-Newmark-Newton. Un exemple d'application de type bielle-manivelle est étudié afin de montrer la performance du traitement hybride.

ABSTRACT. A co-rotational formulation of adaptive sandwich beams for hybrid active/passive damping treatment in non-linear dynamics is proposed. The structure is composed by a viscoelastic core constrained by elastic/piezoelectric layers. The electromechanical coupling is taken into account by modifying the stiffness matrix (sensor) and by applying a mechanical load written in terms of the applied tension (actuator). A fractional derivative model is used for modeling the viscoelastic behavior of the core. The problem is solved by using a Grünwald-Newmark-Newton scheme. A slider-crank mechanism is analysed in order to emphasize the performance of the hybrid active/passive damping treatment.

MOTS-CLÉS : traitement hybride actif/passif, poutre sandwich, formulation co-rotationnelle, dynamique non-linéaire.

KEYWORDS: hybrid active/passive damping treatment, sandwich beam, co-rotational formulation, non-linear dynamics.

1. Introduction

Nous proposons dans ce travail une formulation co-rotationnelle de poutre sandwich adaptative. La structure est composée d'un cœur viscoélastique contraint par des peaux élastiques, munies de pastilles piézoélectriques. Les particularités de la formulation éléments finis résident i) dans l'absence de degrés de liberté électriques pour prendre en compte le couplage électromécanique ; ii) dans l'utilisation d'un modèle à dérivées fractionnaires pour modéliser l'amortissement viscoélastique ; et iii) dans l'utilisation d'une approche co-rotationnelle appliquée aux poutres sandwich. L'hypothèse des petites déformations est considérée, néanmoins, on se place dans le cadre des grands déplacements et grandes rotations. La résolution du problème non-linéaire est réalisée à l'aide d'une méthode implicite d'intégration directe de Newmark combinée à un algorithme de Newton-Raphson et à une procédure d'approximation des dérivées fractionnaires (formalisme de Grünwald). L'exemple d'un système bielle-manivelle est présenté et analysé. Il s'agit d'une structure largement utilisée dans la littérature, mais sans traitement actif-passif [ELK 95, SIM 86].

2. Lois de comportement

2.1. Comportement piézoélectrique

Les sous-couches piézoélectriques des peaux stratifiées sont considérées polarisées dans la direction de l'épaisseur avec un champ électrique appliqué parallèlement à cette polarisation. Ceci caractérise une action piézoélectrique par extension dont le couplage électromécanique se fait entre la composante axiale de la déformation ε_1 et la composante transverse du champ électrique E_3 . La loi de comportement tridimensionnelle pour les matériaux piézoélectriques orthotropes se réduit alors à :

$$\sigma_1 = \bar{c}_{11}\varepsilon_1 - \bar{e}_{31}E_3 \quad , \quad D_3 = \bar{e}_{31}\varepsilon_1 + \bar{d}_{33}E_3 \quad [1]$$

où σ_1 est la contrainte axiale et D_3 le déplacement électrique transverse. Les constantes élastique, piézoélectrique et diélectrique sont respectivement définies par :

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \quad , \quad \bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}} \quad , \quad \bar{d}_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}$$

Ces constantes modifiées résultent des hypothèses de contrainte transverse nulle et champ électrique uniaxial. De plus, on suppose dans ce travail que le potentiel électrique est linéaire par sous-couche piézoélectrique (indice k_j), ce qui implique un champ électrique constant.

2.2. Matériaux viscoélastiques

Nous utilisons dans ce travail le modèle fractionnaire de Zener pour décrire le comportement du cœur viscoélastique. De plus, nous supposons que le module d'Young est proportionnel au module de cisaillement, c'est-à-dire que le coefficient de Poisson est indépendant de la fréquence. La loi de comportement unidimensionnelle du matériau viscoélastique s'écrit sous la forme suivante [BAG 83] :

$$\sigma + \tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha \sigma = E_o \varepsilon + \tau^\alpha E_\infty \mathcal{D}^\alpha \varepsilon \quad [2]$$

où E_o et E_∞ sont les modules élastiques relaxé et non relaxé, α l'ordre de la dérivée fractionnaire ($0 < \alpha < 1$) et τ le temps de relaxation. L'opérateur fractionnaire \mathcal{D}^α , qui apparaît dans la loi de comportement [2], peut être approché par différentes méthodes. Une des plus simples à mettre en œuvre est basée sur la définition de Grünwald qui consiste à approcher l'opérateur fractionnaire par différences finies

$$(D^\alpha f)_n \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{N_t} A_{j+1} f_{n-j} \quad [3]$$

où Δt , supposé fixe, est l'incrément de temps du schéma numérique ($f_n = f(t_n)$ et $t_n = n\Delta t$), N_t la troncature de la série et A_{j+1} les coefficients de Grünwald calculés avec la formule de récurrence $A_{j+1} = \frac{j^{-\alpha-1}}{j} A_j$.

3. Formulation co-rotationnelle

Considérons un élément fini de poutre sandwich comme celui présenté sur la Fig. 1. Cette configuration correspond à une poutre sandwich à trois couches (cœur viscoélastique/peaux élastiques) [GAL 04]. Les déplacements généralisés sont discrétisés avec des fonctions de forme linéaires pour les déplacements moyen \bar{u} et relatif \tilde{u} et cubiques pour les déflexions w . Les vecteurs des ddl en coordonnées globale et locale sont donnés par $\mathbf{q} = [\bar{u}_1 \ w_1 \ w'_1 \ \tilde{u}_1 \ | \ \bar{u}_2 \ w_2 \ w'_2 \ \tilde{u}_2]^T$ et $\hat{\mathbf{q}} = [\hat{u}_1 \ \hat{w}'_1 \ \hat{u}_1 \ | \ \hat{u}_2 \ \hat{w}'_2 \ \hat{u}_2]^T$.

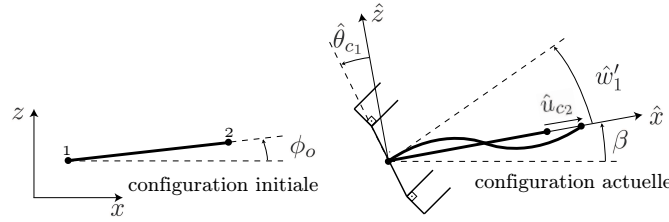


Figure 1. Configuration co-rotationnelle de poutre sandwich

Les mesures de déformation locales sont supposées petites, ainsi l'énergie interne pour chaque couche de la poutre sandwich est écrite sous la forme suivante (cœur c , peaux $k = a, b$)

$$U_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_k} \int_{\Omega_{k_j}} (\sigma_{1k_j} \varepsilon_{1k} - D_{3k_j} E_{3k}) d\Omega \quad , \quad U_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} [\sigma_{1c} \varepsilon_{1c} + \sigma_{5c} \varepsilon_{5c}] d\Omega \quad [4]$$

avec $\varepsilon_{1i} = \epsilon_i + (z - z_i) \kappa_i$ et $\varepsilon_{5c} = \gamma_c$. Le comportement du cœur viscoélastique est pris en compte à partir de l'histoire des déformations "anélastiques" ($i = 1, 5$)

$$\sigma_{ic}^{n+1} = \bar{c}_{ii}^c \left[\left(1 + c_\alpha \frac{E_\infty - E_o}{E_\infty} \right) \varepsilon_{ic}^{n+1} + c_\alpha \frac{E_\infty}{E_o} \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1} \bar{\varepsilon}_{ic}^{n+1-j} \right] \quad [5]$$

qui sont mises à jour à chaque pas de temps par (avec $c_\alpha = \tau^\alpha / (\tau^\alpha + \Delta t^\alpha)$) :

$$\bar{\varepsilon}^{n+1} = \frac{E_\infty - E_o}{E_\infty} \varepsilon^{n+1} - \frac{\tau^\alpha}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{N_t} A_{j+1} \bar{\varepsilon}^{n+1-j} \quad [6]$$

En ce qui concerne le couplage électromécanique dans les peaux, l'équation [1] est utilisée avec les conditions aux limites électriques de type circuit ouvert (CO) et circuit fermé (CF). En CF, on impose une différence de potentiel électrique telle que $E_{3k} = -V_{k_j} / h_{k_j}$. La contribution électromécanique de l'énergie interne est alors donnée par

$$U_k^{\text{ME}} = b \sum_{j=1}^{N_k} \bar{e}_{31}^{k_j} V_{k_j} \int_0^{\ell_o} [\epsilon_k + (z_{k_j} - z_k) \kappa_k] dx \quad [7]$$

Dans le cas CO, $D_{3k} = 0$, ce qui implique $E_{3k} = -\bar{e}_{31}^{k_j} / \bar{d}_{33}^{k_j} \varepsilon_{1k}$. La contribution électromécanique de l'énergie interne est alors donnée par

$$U_k^{\text{ME}} = \frac{1}{2} b \int_0^{\ell_o} (\hat{A}^k \epsilon_k^2 + 2\hat{B}^k \epsilon_k \kappa_k + \hat{D}^k \kappa_k^2) dx \quad [8]$$

avec $[\hat{A}^k, \hat{B}^k, \hat{D}^k] = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{(\bar{e}_{31}^{k_j})^2}{\bar{d}_{33}^{k_j}} [h_{k_j}, h_{k_j} (z_{k_j} - z_k), h_{k_j}^3 / 12 + h_{k_j} (z_{k_j} - z_k)^2]$.

Les termes z_k et z_{k_j} désignent la position de la ligne moyenne locale associée à la k -ième couche et à la k_j -ième sous-couche. Après discrétisation, les équations [7] et [8] fournissent un vecteur chargement fonction du voltage imposé (cas CF) et un terme de rigidité ajoutée (cas CO). Dans ce dernier cas, le voltage induit dans la pastille piézoélectrique est obtenu par post-traitement des résultats [GAL 05]. Il est important de signaler que cette approche ne nécessite pas l'introduction de degrés de liberté électriques dans la formulation.

Afin de résoudre le problème temporel, la méthode implicite d'intégration directe de Newmark est combinée à un algorithme de Newton-Raphson. Le vecteur des efforts internes ainsi que la matrice de rigidité tangente sont calculés analytiquement à chaque itération. L'équation de mouvement du système s'écrit alors sous la forme

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{q}}^{n+1} + \mathbf{F}(\mathbf{q}^{n+1}) = \mathbf{G}^{n+1} + \tilde{\mathbf{G}}^{n+1} + \bar{\mathbf{G}}^{n+1} \quad [9]$$

où \mathbf{F} est le vecteur des efforts internes calculé à partir de la variation des équations [4] et où \mathbf{m} est la matrice de masse calculée de façon classique. En ce qui concerne les efforts extérieurs, le second membre de l'équation [9] est composé d'un effort mécanique \mathbf{G} , d'un effort issu du couplage électromécanique dans le cas actionneur $\tilde{\mathbf{G}}$ et d'un vecteur de forces dissipatives issu du comportement viscoélastique du cœur, défini par

$$\bar{\mathbf{G}}^{n+1} = -c_\alpha \frac{E_\infty}{E_o} \sum_{j=1}^{N_t} A_{j+1} \bar{\mathbf{F}}^{n+1-j} \quad [10]$$

Ce terme est mis à jour à chaque pas de temps en fonction de l'histoire du vecteur des efforts internes associé au comportement viscoélastique. Il est important de signaler que le vecteur des efforts internes et la matrice de rigidité tangente font intervenir le

comportement viscoélastique du cœur ainsi que le couplage électromécanique dans le cas capteur. Ce dernier se fait par l'introduction d'un opérateur de rigidité ajoutée (terme $\tilde{\mathbf{K}}_M + \tilde{\mathbf{K}}_G$ de l'équation [12]). Dans le cas actionneur, le couplage électromécanique est pris en compte à partir d'un chargement mécanique écrit en fonction du voltage imposé :

$$\tilde{\mathbf{G}}_{ek_j}^{n+1} = -b \int_0^{L_e} e_{31}^{k_j} V_{k_j}^{n+1} \left[\mathbf{B}_{mk}^T + (z_{k_j} - z_k) \mathbf{B}_{bk}^T \right] dx \quad [11]$$

La matrice de rigidité tangente \mathbf{K}_T , quant à elle, est obtenue à partir de la différentiation du vecteur des efforts internes par rapport au vecteur des ddl. La matrice de rigidité tangente est alors écrite pour toutes les couches de la poutre sandwich

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G + \tilde{\mathbf{K}}_M + \tilde{\mathbf{K}}_G + c_\alpha \frac{(E_\infty - E_o)}{E_o} (\mathbf{K}_M^c + \mathbf{K}_G^c) \quad [12]$$

où les indices M et G désignent les composantes matérielle et géométrique de la matrice de rigidité tangente. Le dernier terme de cette équation est associé au comportement viscoélastique du cœur.

4. Exemple d'application

Considérons un système bielle-manivelle comme celui présenté sur la Fig. 2 (a). Le mécanisme est composé d'une manivelle rigide OA et d'une tige sandwich AB. Cette dernière est composée d'un cœur viscoélastique¹ ($h_c = 0,2$ mm) contraint par des peaux élastiques² ($h_{a1} = h_{b1} = 1$ mm) munies des pastilles piézoélectriques³ ($h_{a2} = h_{b2} = 0,5$ mm). La tige est discrétisée par un maillage régulier de 10 éléments. Le mouvement du mécanisme débute lorsque les points O, A et B sont alignés, avec le point A situé entre O et B. Le temps total d'étude est de $T = 60$ ms, avec un pas de temps de $\Delta t = 0,05$ ms. La manivelle tourne autour du point O avec une vitesse constante de rotation d'amplitude $\dot{\psi} = 0,15$ rad/ms. La pastille piézoélectrique collée sur la surface supérieure de la tige AB fonctionne en tant qu'actionneur alors que celle collée symétriquement sur la surface inférieure fonctionne en tant que capteur. La loi de commande qui relie les deux pastilles est de type contrôle par rétroaction de la vitesse au milieu de la poutre.

On présente sur la Fig. 2 (b) la déflexion relative du point situé au centre de la tige AB en fonction de l'angle de la manivelle. Il s'agit de la composante normale à la droite qui relie les points A et B dans la configuration actuelle. Les résultats ont été obtenus avec une vitesse initiale associée au mouvement de corps rigide. Le gain de contrôle utilisé dans les calculs est de -100 ms. On observe que la déflexion du point au milieu de la tige AB s'amortit après le premier tour. Le diagramme de phase correspondant à ce point illustre la stabilité de la solution lorsque une vitesse constante est imposée à la manivelle.

-
1. ISD112 à 27°C : $\rho = 1600$ kg/m³; $\nu = 0,5$; $E_o = 1,5$ MPa; $E_\infty = 69,95$ MPa; $\alpha = 0,7915$; $\tau = 1,4052 \times 10^{-2}$ ms
 2. Aluminium : $\rho = 2690$ kg/m³; $\nu = 0,345$; $E = 70,3$ GPa
 3. PZT5H : $\rho = 7500$ kg/m³; $c_{11} = c_{33} = 126$ GPa; $c_{13} = 84,1$ GPa; $e_{31} = -6,5$ C/m²; $e_{33} = 23,3$ C/m²; $d_{33} = 1,3 \times 10^{-8}$ F/m

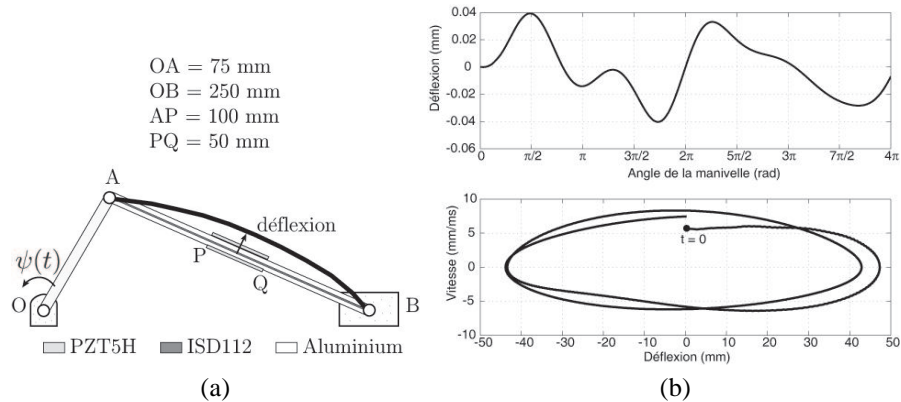


Figure 2. Géométrie du système bielle-manivelle (a) et évolution temporelle du point situé au milieu de la tige AB (b)

5. Conclusion

Nous avons proposé, dans ce travail, un traitement hybride actif/passif pour atténuer les réponses transitoires d'une poutre sandwich en non-linéaire géométrique. Pour cela, une formulation co-rotationnelle de poutre sandwich est proposée dans le cadre des petites déformations et des grands déplacements et grandes rotations. La poutre sandwich est composée d'un cœur viscoélastique et de peaux stratifiées piézo-électriques. Le modèle fractionnaire de Zener est utilisé pour modéliser le comportement viscoélastique du cœur, c'est-à-dire caractériser sa dépendance en fréquence. De plus, la prise en compte du couplage électromécanique dans les peaux ne fait pas intervenir de degrés de liberté électriques. Les réponses dynamiques du système non-linéaire sont obtenues avec un algorithme combiné Grünwald-Newton-Newmark. Enfin, un exemple de système bielle-manivelle est proposé et analysé.

6. Bibliographie

- [BAG 83] BAGLEY R. L., TORVIK P. J., « Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures », *AIAA Journal*, vol. 21, 1983, p. 741-748.
- [ELK 95] ELKARANSHAWY H.A., DOKAINISH M.A., « Corotational finite element analysis of planar flexible multibody systems », *Computers and Structures*, vol. 54, 1995, p. 881-890.
- [GAL 04] GALUCIO A. C., « Atténuation des réponses transitoires par traitement hybride piézo-électrique/viscoélastique en utilisant un modèle à dérivées fractionnaires », *Thèse de doctorat du Conservatoire National des Arts et Métiers*, 2004.
- [GAL 05] GALUCIO A. C., DEÛ J.-F., OHAYON R., « A fractional derivative viscoelastic model for hybrid active/passive damping treatments in time domain – Application to sandwich beams », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 16, 2005, p. 33-45.
- [SIM 86] SIMO J.C., VU-QUOC L., « On the dynamics of flexible beams under large overall motions – The plane case : Parts I and II », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, 1986, p. 849-863.