



HAL
open science

Méthode de réduction de modèles, application à l'étude de stabilité d'un lamifié élastomère-métal

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin

► To cite this version:

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin. Méthode de réduction de modèles, application à l'étude de stabilité d'un lamifié élastomère-métal. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812956

HAL Id: hal-01812956

<https://hal.science/hal-01812956>

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Méthode de réduction de modèles, application à l'étude de stabilité d'un lamifié élastomère-métal

Stéphane Lejeunes — Adnane Boukamel — Bruno Cochelin

*Ecole Généraliste d'Ingénieurs de Marseille
IMT/Technopôle Château-Gombert, 13451 Marseille Cedex 20
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille
31 chemin Joseph-Aiguier, 13402 Marseille cedex 20
lejeunes@esim.fr*

RÉSUMÉ. On présente, dans ce papier, une technique pour résoudre les problèmes d'équilibre de structures géométriquement complexes possédant des propriétés de périodicité selon une direction et dont le comportement présente des non-linéarités géométriques et matérielles. Basée sur une formulation en éléments finis, cette méthode consiste à projeter sur une base polynomiale, bien choisie vis-à-vis des propriétés d'invariance, les champs inconnus. Elle permet ainsi de réduire la dimension du problème à résoudre. Le couplage d'une telle méthode avec une méthode de continuation, nous permet d'analyser les instabilités d'un lamifié élastomère-métal en compression. Des comparaisons avec des modèles éléments-finis standards sont présentées.

ABSTRACT. In this paper, we present a model reduction technique, to find the equilibrium state at finite strain of geometrically complex structure which have, periodic properties in a direction with non-linear material behavior. Based on finite-elements formulation, this technique consists in the projection of the unknown fields on a polynomial basis in the purpose to reduce the problem dimension. This method has been coupled within a continuation resolution scheme to find the instabilities of a laminated rubber bearing in compression. Comparisons are made with standard finite-element model.

MOTS-CLÉS : réduction de modèle, hyperélasticité, éléments-finis, stabilité, bifurcation, continuation.

KEYWORDS: model reduction, hyperelasticity, finite-element, stability, bifurcation, continuation.

1. Introduction

Les pièces à matrice élastomérique sont de nos jours couramment employées dans de nombreux secteurs industriels (structures multi-couches ou structures élancées en composite à matrice élastomérique). La conception de ces pièces, nécessite une modélisation numérique affinée. Cependant l'utilisation d'outils classiques de modélisation (éléments finis tridimensionnels), conduit souvent à une taille de modèles prohibitive. Différentes approches permettant de réduire la taille des modèles ont ainsi été proposées. On peut les classer en trois catégories : les macro-modèles basés sur des théories poutres enrichies ou des assemblages de comportements simples [IIZ 00], les méthodes numériques de sous-structuration, par sous-domaines [LéN 01], ou multi-niveaux [MEO 02] et les techniques d'homogénéisation appliqués aux composites à matrice élastomérique [DUM 90].

Nos travaux s'inscrivent dans une logique de réduction de modèles inspirée des méthodes éléments finis semi-analytiques développées par Cheung au milieu des années 70. Ces dernières consistent à discrétiser seulement la section transversale d'un solide prismatique et à choisir des fonctions de formes continues pour la direction longitudinale [CHE 95, BOU 88]. Nous proposons donc d'étendre ce type de réduction à des lois de comportement hyperélastiques quasi-incompressibles.

Par ailleurs, l'application présentée dans ce papier consiste en la caractérisation du flambement en compression d'un lamifié élastomère métal en déformations planes, en utilisant une méthode de continuation à longueur d'arc cylindrique proposée par [CRI 97].

2. Formulation variationnelle en hyperélasticité quasi-incompressible

En désignant par \mathbf{F} , le tenseur gradient décrivant le mouvement local et en notant $J = \det \mathbf{F}$, la transformation peut être décomposée en une partie compressible $J^{1/3} \mathbf{I}$ et une partie incompressible $\overline{\mathbf{F}}$, soit : $\mathbf{F} = (J^{1/3}) \overline{\mathbf{F}}$. L'énergie de déformation est alors décomposée en une partie isochore et une partie volumique.

La résolution du problème d'équilibre hyperélastique se ramène donc au problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \left(\tilde{\psi}_{iso}(\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{v})) + \tilde{\psi}_{vol}(J(\mathbf{v})) \right) dV - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{v}) \quad [1]$$

Or, en posant $\hat{\psi}_{vol}(J) = (1/2\alpha)G(J)^2$, avec $G(1) = 0$, la fonctionnelle [1], s'interprète mathématiquement comme la formulation pénalisée du problème incompressible. La minimisation de cette fonctionnelle (avec une méthode d'intégration réduite sélective) est équivalente à la recherche d'un point selle de la fonctionnelle en Lagrangien perturbé [MAL 78] :

$$\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega_0} \left(\tilde{\psi}_{iso}(\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{v})) + qG(J(\mathbf{v})) - \frac{\alpha}{2}q^2 \right) dV - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{v}) \quad [2]$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle [2] sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_{iso}(\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{F}} + p \frac{\partial G(J(\mathbf{u}))}{\partial J} \text{Cof} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \right) : \delta \mathbf{F} dV - \delta \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{u}) \\ \int_{\Omega_0} (G(J(\mathbf{u})) - \alpha p) \delta p dV = 0 \end{array} \right. \quad [3]$$

3. Mise en œuvre de la technique de réduction de modèles

L'idée de départ consiste à construire des éléments finis réduits, basés sur des fonctions de forme suffisamment riches pour approximer les champs de déplacement \mathbf{u} et de pression p . L'unité représentative (voir figure 1) est constituée d'une rangée d'éléments dans la direction à condenser. Ainsi, dans le cas d'une réduction 2D-1D, on obtient avec le paramétrage $\xi = 2X/L$:

$$\mathbf{u}(X, Y) = \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}^i(Y) T_i(\xi), \quad p(X, Y) = \sum_{i=0}^{n_p} p^i(Y) T_i(\xi) \quad [4]$$

La base de projection est constituée de polynômes de Lagrange d'ordre 1 (permettant d'imposer directement les conditions cinématiques de type translations et/ou rotations), enrichis par des fonctions bulles, constituant une correction dans la direction condensée. Soit de façon formelle, en utilisant les polynômes de Legendre $L_n(\xi)$:

$$T_0(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad T_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, \quad T_n(\xi) = \frac{L_n(\xi) - L_{n-2}(\xi)}{\sqrt{2(2i-1)}} \quad [5]$$

A partir de la décomposition des champs inconnues présentée avec les équations [4], on peut utiliser une approximation éléments-finis incompressibles classique du déplacement et de la pression avec des fonctions de formes basés sur des polynômes de Lagrange : N_u^j et N_p^j . Soit :

$$\mathbf{u}(X, Y) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=1}^{l_u} N_u^j(Y) \mathbf{u}_j^i T_i(\xi), \quad p(X, Y) = \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=1}^{l_p} N_p^j(Y) p_j^i T_i(\xi) \quad [6]$$



Figure 1. Réduction de modèle 2D-1D

Ainsi, les degrés libertés pour les noeuds de déplacement sont les composantes \mathbf{u}_j^i du déplacement dans la base \mathcal{T} , alors que les composantes p_j^i de la pression constituent les ddls des noeuds de pression. Des éléments finis correspondant à la formulation présentée, ont été implémentés dans le code élément finis ZéBuLoN, développé par l'école des Mines de Paris, l'ONERA et l'INSA de Rouen. Le choix des ordres n_u et n_p doit faire l'objet de précautions particulières afin d'éviter des phénomènes d'instabilités numériques dûes à la formulation mixte des éléments finis, plus de détails pourront être trouvés dans [LEJ 05].

4. Analyse du flambement et du post-flambement avec une méthode de continuation

Pour pouvoir traverser les éventuels points singuliers du chemin d'équilibre d'une structure, nous avons choisi d'utiliser une méthode à longueur d'arc avec une contrainte cylindrique. Cette dernière consiste en la résolution du système augmenté suivant :

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{R}(\mathbf{a}, \lambda) \\ f(\Delta \mathbf{a}, \Delta \lambda) = \Delta \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{a} - dl^2 \end{array} \right] = 0 \quad [7]$$

$\mathbf{R}(\mathbf{a}, \lambda)$ étant l'équation d'équilibre, λ le facteur de charge, $\Delta \mathbf{a}$ l'incrément de déplacement par rapport à la dernière solution convergée et dl la longueur d'arc. La mise en oeuvre de cette méthode est détaillée dans [CRI 97].

En utilisant conjointement le plus petit pivot de la matrice tangente \mathbf{K}_T et le paramètre courant de rigidité C_k définit par :

$$\tau = \min \{ \text{pivot } \mathbf{K}_T \} \quad \text{et} \quad C_k = \frac{\mathbf{Q}_{ef}^T \Delta \mathbf{a}}{\Delta \mathbf{a}^T \Delta \mathbf{a}} \quad [8]$$

avec \mathbf{Q}_{ef} les efforts extérieurs, on peut détecter la présence de bifurcations (simple ou multiple) si l'on observe uniquement un changement de signe de τ . Dans le cas où τ et C_k changent de signe en même temps on est en présence d'un point limite.

Après avoir détecté une bifurcation du chemin d'équilibre, on peut déterminer plus précisément le point de bifurcation en effectuant un retour en arrière sur le chemin d'équilibre et en adaptant la longueur d'arc à chaque itération suivant la procédure décrite dans [CRI 97].

Le système augmenté est ensuite perturbé en introduisant \mathbf{Z} , le plus petit vecteur propre de \mathbf{K}_T , calculé au point de bifurcation, le système [7] devient :

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{R}(\mathbf{a}, \lambda) \\ f(\Delta \mathbf{a}, \Delta \lambda) = (\Delta \mathbf{a}^T \mathbf{Z})(\mathbf{Z}^T \Delta \mathbf{a}) - dl^2 \end{array} \right] = 0 \quad [9]$$

Le tracé de la branche bifurquée est initié en prenant le prédicteur dans la direction de \mathbf{Z} :

$$\Delta \mathbf{a} = dl \mathbf{Z} \quad \Delta \lambda = 0 \quad [10]$$

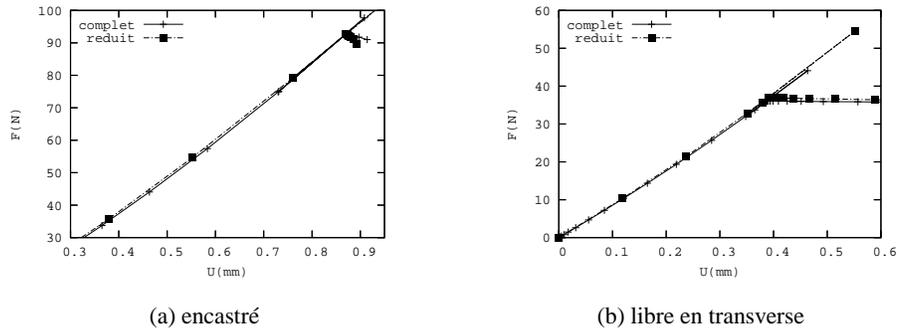


Figure 2. Branche fondamentale et bifurqué

5. Application

A titre d'application, nous présentons l'exemple en déformation plane d'un lamifié élastomère métal constitué de 10 lamelles de 10 mm de large, faisant 1 mm d'épaisseur pour l'élastomère ainsi que pour l'acier. Cette structure est soumise à un chargement de compression sur sa partie supérieure. Deux types de flambement sont traités selon les conditions cinématiques imposées sur les faces inférieures et supérieures, soit bi-encastré, soit encastré et libre en transverse. L'élastomère est représenté par un modèle de Mooney-Rivlin [MOO 40] avec $a_{10} = 0.31$ Mpa, $a_{01} = 0.11$ Mpa, son module de compressibilité est de $k = 2500$ Mpa.

Le modèle de référence est constitué d'éléments de type Q9P3 pour l'élastomère et Q8 pour l'acier, le modèle réduit comporte des éléments finis de type L3P2, avec les caractéristiques polynomiales suivante : $n_u = 9$ et $n_p = 8$. Le modèle réduit comporte 1494 degrés de liberté, le modèle complet 10282. Les figures 2 présentent les courbes d'effort-déplacement vertical de la surface supérieure du lamifié. On observe globalement une bonne concordance entre les modèles réduits et complets. Les modes de flambement associés sont présentés sur les figures 3. La déformée du modèle réduit est reconstruite à partir des équations [6].

6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce papier, une technique de réduction de modèles à comportement non-linéaire pour des structures périodiques dont l'analyse directe conduit généralement à un grand nombre de degrés de libertés ou un rapport d'élanement d'éléments pénalisant lors d'une modélisation éléments-finis classique. L'utilisation de cette technique de réduction dans un schéma de résolution à longueur d'arc, avec détection de bifurcation et perturbation suivant le plus petit mode propre de la matrice tangente, permet d'obtenir les modes de flambement d'un lamifié élastomère-métal.

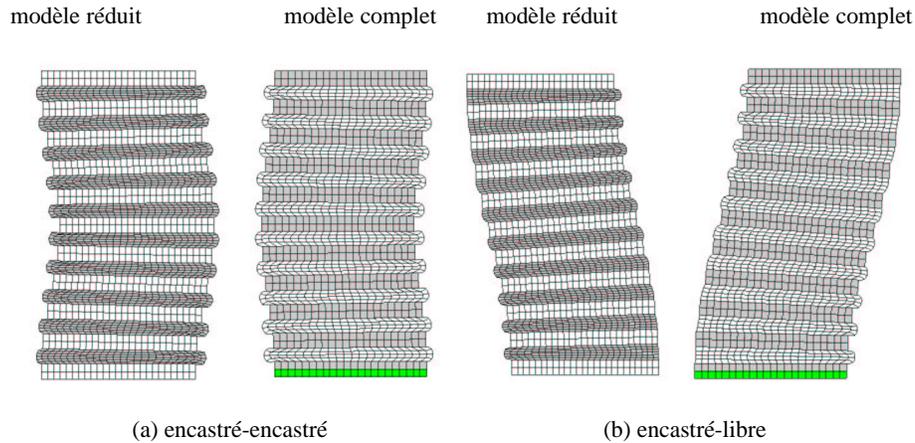


Figure 3. *Mode de flambement*

Le modèle réduit induit un gain de 6.9 en taille de modèle pour un écart très faible sur la valeur de la charge critique (moins de 1%).

7. Bibliographie

- [BOU 88] BOUKAMEL A., « Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations », Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1988.
- [CHE 95] CHEUNG Y., AU F., « Isoparametric Spline Finite Strip for Degenerate Shells », *Thin-Walled Structures*, vol. 21, 1995, p. 65-92.
- [CRI 97] CRISFIELD M., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Wiley, 1997.
- [DUM 90] DUMONTET H., « Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites », Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, 1990.
- [IIZ 00] IIZUKA M., « A macroscopic model for predicting large-deformation behaviors of laminated rubber bearings », *Engineering Structures*, vol. 22, 2000, p. 323-334.
- [LEJ 05] LEJEUNES S., BOUKAMEL A., COCHELIN B., « Model reduction method for composite structures with hyperelastic matrix », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Soumis en 2005.
- [LéN 01] LÉNÉ F., REY C., « Some strategies to compute elastomeric lamified composite structures », *Composite Structures*, vol. 54, 2001, p. 231-241.
- [MAL 78] MALKUS D., HUGHES T., « Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques : a unification of concepts », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 15, 1978, p. 63-81.
- [MEO 02] MEO S., DEBORDES O., BOUKAMEL A., « Assemblage de structures une à une invariante dans une direction », *Mécanique & Industries*, vol. 3, 2002, p. 211-225.
- [MOO 40] MOONEY M., « A theory of large elastic deformation », *J. Appl. Phys.*, vol. 11, 1940, p. 582-592.