



HAL
open science

Modélisation des inclusions par des éléments finis spectraux étendus (X-FEM)

Antoine Legay, H Wang, Ted Belytschko

► **To cite this version:**

Antoine Legay, H Wang, Ted Belytschko. Modélisation des inclusions par des éléments finis spectraux étendus (X-FEM). 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812955

HAL Id: hal-01812955

<https://hal.science/hal-01812955>

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Modélisation des inclusions par des éléments finis spectraux étendus (XFEM)

A. Legay^a, H. Wang^b and T. Belytschko^b

^aLaboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes couplés - EA 3196
Chaire de Mécanique - case courrier 353
Conservatoire National des Arts et Métiers
2 rue conté, 75003 Paris, France
antoine.legay@cnam.fr

^bDepartment of Mechanical Engineering
Northwestern University
2145 Sheridan Road
Evanston, IL., 60208-3111, USA
h-wang7@northwestern.edu
tedbelytschko@northwestern.edu

RÉSUMÉ. Une méthodologie pour modéliser les inclusions sans mailler les interfaces entre les différents matériaux est proposée. L'approche envisagée s'appuie sur la méthode des éléments finis étendus (XFEM) basée sur le concept de partition de l'unité. Les interfaces entre matériaux sont décrites par des fonctions d'espace, appelées lignes de niveaux. L'objet du travail présenté est d'étendre la méthode, déjà appliquée à des éléments de faible degré, à des éléments finis d'ordre plus élevé de type spectral afin d'obtenir un meilleur taux de convergence.

ABSTRACT. A non-matching interface mesh method in order to model inclusions problems is presented. The used method is the extended finite element method (XFEM) which is based on the partition of unity concept. Interfaces are described by a level-set fonction. This study follows the one from Sukumar et al. in which linear approximation fields are used. The aim of this work is to extend the method to high order elements in order to get a better convergence rate.

MOTS-CLÉS : élément fini spectral, XFEM, ligne de niveau, inclusions.

KEYWORDS: spectral finite element, XFEM, level-set, inclusions.

1. Introduction

L'approche numérique classique pour traiter des problèmes multi-domaines suppose un maillage de l'interface. Le remaillage de l'interface, si celle-ci est en mouvement, est d'une part couteux en temps de calcul, et engendre d'autre part une erreur à chaque projection des champs d'un maillage à l'autre.

La méthode des éléments finis étendus (XFEM) [MOË 99], permet de prendre en compte les discontinuités dans les éléments. L'interface est d'une part suivie par une ligne de niveau [SET 99], et est d'autre part prise en compte dans l'élément par des fonctions additionnelles sur le principe de partition de l'unité [MEL 96].

Le but du travail est d'étendre la méthode XFEM à des éléments finis de haut degrés de type élément fini spectral [PAT 84] [KAR 99]. Cette étude fait suite aux travaux de Sukumar et al. [SUK 01] effectuée pour des éléments d'ordre 1.

2. Description de l'élément fini spectral

L'élément fini spectral d'ordre n est défini dans le domaine de référence (r, s) avec $r \in [-1, 1]$ et $s \in [-1, 1]$. L'élément fini spectral, dont la spécificité est la répartition des noeuds, est due à Patera [PAT 84]. La répartition des noeuds est de type Gauss-Chebyshev : $(r_I, s_J) = (-\cos \frac{I\pi}{n}, -\cos \frac{J\pi}{n})$, où I et J varient de 0 à n . La fonction de forme $H_{IJ}(r, s)$ associée au noeud IJ vaut $H_{IJ}(r, s) = h_I(r)h_J(s)$, où $h_Q(\eta)$ est le polynôme de Lagrange d'ordre n associé au point η_Q .

3. Description de l'interface par une ligne de niveau

Afin de modéliser l'interface Γ entre 2 domaines, le concept de ligne de niveau est utilisé [SET 99]. Cette fonction, notée $\phi(\underline{x})$ est choisie ici comme la distance signée du point \underline{x} à l'interface (Fig. 1). La convention suivante est utilisée : $\phi > 0$ dans Ω_1 et $\phi < 0$ dans Ω_2 . Si la fonction $\phi(\underline{x})$ n'est pas connue de façon analytique, elle est alors interpolée par les fonctions de forme en fonction de ses valeurs aux noeuds.

4. Méthode des éléments finis étendus (XFEM)

4.1. Enrichissement de la solution

L'espace du champ de discrétisation est enrichi par des fonctions additionnelles discontinues. La composante i du déplacement s'écrit alors

$$u_i(\underline{x}) = \sum_{I \in \mathcal{S}} H_I(\underline{x}) U_i^I + \sum_{J \in \mathcal{S}^{enr}} H_J^{enr}(\underline{x}) \left(|\phi(\underline{x})| - |\phi(\underline{x}_J)| \right) A_i^J. \quad [1]$$

où \mathcal{S} est l'ensemble des noeuds du maillage (Fig. 1), \mathcal{S}^{enr} est l'ensemble des noeuds enrichis, H_I est la fonction de forme du noeud I , H_J^{enr} est un ensemble de fonctions

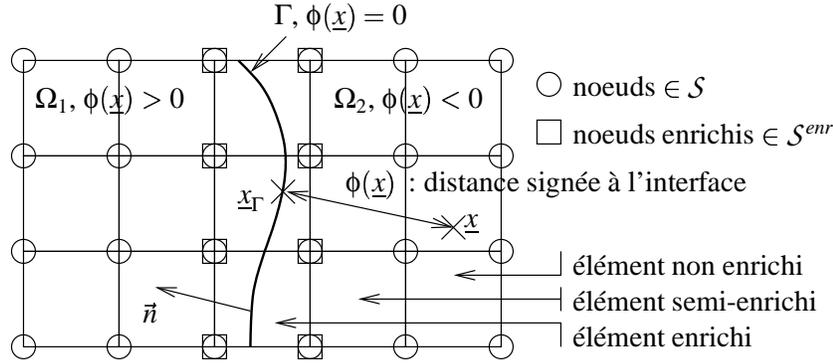


Figure 1. Description de l'interface à l'aide d'une ligne de niveau $\phi(x)$. Description du problème discrétisé. Définition de l'ensemble des noeuds enrichis \mathcal{S}^{enr} . Seuls les 4 noeuds sommets des éléments finis spectraux sont représentés.

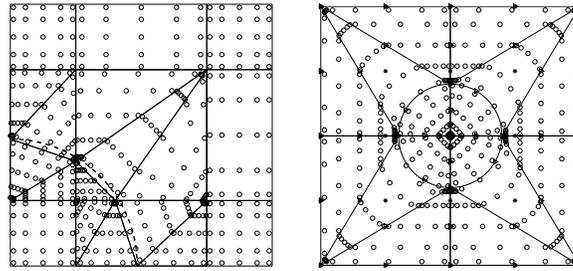
formant une partition de l'unité, U_i^I est l'inconnue de déplacement du noeud I et A_i^J est l'inconnue nodale additionnelle associée. L'identification d'un noeud par deux indices IJ est avantageusement remplacée ici par un seul indice I . La déformation étant discontinue dans le cas d'une interface entre deux matériaux, la fonction d'enrichissement est prise comme la valeur absolue de la distance à l'interface.

L'ensemble des fonctions H_f^{enr} est habituellement choisit comme l'ensemble des fonctions de forme de la partie régulière, on choisit cependant dans ce travail de prendre les 4 fonctions bilinéaires ayant pour support les 4 noeuds sommets de l'élément.

Un élément dont au moins un noeud est enrichi et au moins un autre ne l'est pas est appelé élément semi-enrichi (Fig. 1). Dans un tel élément, le principe de partition de l'unité du support des fonctions d'enrichissement n'est plus respecté. Cependant, le fait de prendre comme partition de l'unité les fonctions bilinéaires d'ordre 1 permet de palier automatiquement au non respect de la partition de l'unité. En effet la partie régulière de l'approximation est d'ordre supérieur aux fonctions manquantes de la partition H_f^{enr} . Dans le cas où $n = 1$, la partie régulière n'est pas d'ordre suffisamment élevé et une correction par déformation postulée est utilisée en suivant la démarche présentée dans [CHE 03].

4.2. Intégration de la matrice de rigidité d'un élément enrichi

L'intégration numérique de la matrice de rigidité est faite en intégrant séparément chaque partie Ω_1 et Ω_2 de l'élément. L'ordre maximum d'un élément enrichi est $2(n+1)$. Cet ordre est plus élevé qu'un élément régulier ($2n$) car les dérivées des fonctions de forme additionnelles sont à prendre en compte. Il est donc nécessaire d'utiliser $n+2$



(a) Découpage en quadrangles puis en triangles à 3 noeuds d'un élément d'ordre 3.

(b) Découpage en triangles à 6 noeuds d'une inclusion circulaire au milieu d'un groupe de 4 éléments d'ordre 2.

Figure 2. *Découpage d'un élément enrichi pour l'intégration numérique.*

points de Gauss dans chaque direction. La première méthode testée est un découpage en quadrangles dont les sommets sont les noeuds de l'élément puis en triangles à 3 noeuds si le quadrangle est coupé par l'interface (Fig. 2(a)). La deuxième est un découpage en triangles à 6 noeuds (Fig. 2(b)).

5. Applications

5.1. Barre bi-matériaux

Une barre constituée de deux domaines Ω_1 et Ω_2 de modules d'Young différents de rapport 10 est chargée en traction (Fig. 3(a)). L'interface des deux matériaux est située arbitrairement de façon à être non conforme aux frontières entre les éléments. Les quatre maillages utilisés sont 3×6 , 6×12 , 12×24 et 24×48 éléments. Les résultats sont comparés à la solution exacte. La figure 3(b) montre l'évolution de l'erreur en énergie en fonction de la taille des éléments. Chaque maillage est testé avec des éléments d'ordre 1, 2 puis 3. L'élément d'ordre 1 est testé avec et sans la correction de déformation postulée. Les résultats sont très bons pour tous les cas sauf pour le cas $n = 1$ où la correction de déformation postulée n'est pas utilisée.

5.2. Inclusion circulaire

Une plaque en traction dans les deux directions possédant une inclusion circulaire est étudiée (Fig. 4(a)). La solution analytique en déplacement pour la plaque infinie

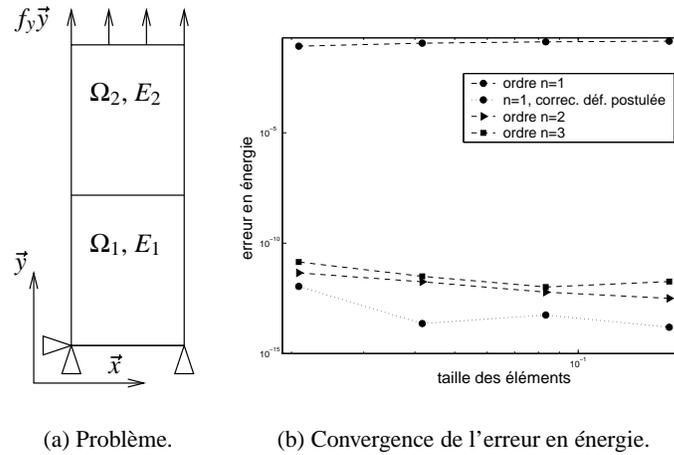
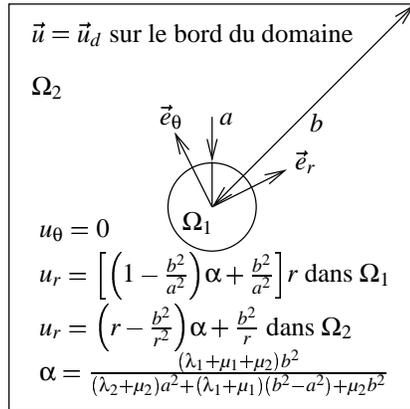


Figure 3. Application à une barre bi-matériaux en traction.

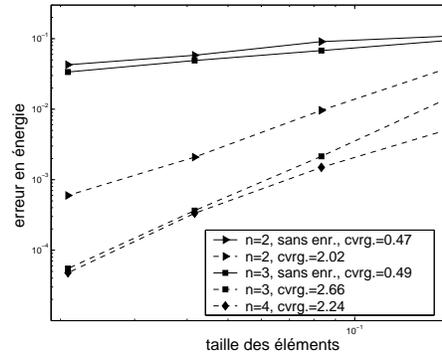
est imposée sur les quatre bords de la plaque [SUK 01]. Les valeurs des paramètres sont les suivantes : $a = 0,4$, $b=2$, $\lambda_1 = 0,4$, $\lambda_2 = 5,769$, $\mu_1 = 0,4$ et $\mu_2 = 3,846$. L'évolution de l'erreur en énergie en fonction de la taille des éléments en utilisant une intégration avec un découpage en triangles à 6 noeuds est présentée sur la figure 4(b). Les éléments d'ordre 2 et 3 sont aussi testés sans enrichissement, mais avec le même maillage incompatible à l'interface. Dans ces deux cas, les taux de convergence sont inférieurs. Les taux de convergence en utilisant une intégration avec des triangles à 3 noeuds sont également inférieurs : 1,8 pour l'élément d'ordre 2 et 2,2 pour l'élément d'ordre 3.

6. Conclusion

L'élément fini spectral associée à la méthode XFEM est testé pour des problèmes bi-matériaux. L'intégration des éléments enrichis par des triangles à 6 noeuds dont les frontières sont courbes donne de meilleurs résultats que l'utilisation de triangles à 3 noeuds, mais n'est cependant pas suffisante pour l'ordre $n = 4$. Le choix de prendre comme partition de l'unité pour l'enrichissement les 4 fonctions bi-linéaires du quadrangle à 4 noeuds permet d'éviter de corriger les éléments semi-enrichis. Les taux de convergence calculés sont en bon accord avec ceux des éléments finis d'ordres élevés. L'utilisation des éléments finis spectraux avec la méthode XFEM peut donc être envisagée dans des cas plus complexes, par exemple pour des problèmes de dynamique où l'interface est en mouvement.



(a) Description du problème.



(b) Convergence de l'erreur en énergie.

Figure 4. Application à une inclusion circulaire.

7. Bibliographie

- [CHE 03] CHessa J., WANG H., BELYTSCHKO T., « On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, vol. 57, n° 7, 2003, p. 1015-1038.
- [KAR 99] KARNIADAKIS G., SHERWIN S., « Spectral/hp Element Methods for CFD », GOLUB G., JELTSCH R., LIGHT W., MORTON K., SÜLIE., Eds., *Numerical Mathematics and Scientific Computation*, p. 1-386, Oxford University Press, Inc., 1999.
- [MEL 96] MELENK J., BABUSKA I., « The partition of unity finite element method : Basic theory and applications », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 139, 1996, p. 289-314.
- [MOË 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, vol. 46, n° 1, 1999, p. 131-150.
- [PAT 84] PATERA A., « A spectral method for fluid dynamics : Laminar flow in a channel expansion », *J. Comp. Phys.*, vol. 54, 1984, p. 468-488.
- [SET 99] SETHIAN J., « Level Set Methods and Fast Marching Methods Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science », Cambridge University Press, 1999.
- [SUK 01] SUKUMAR N., CHOPP D., MOËS N., BELYTSCHKO T., « Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 190, 2001, p. 6183-6200.