HAL
open science

# Fissuration en grandes transformations avec X-FEM

Grégory Legrain, Nicolas Moes, Erwan Verron

## To cite this version:

Grégory Legrain, Nicolas Moes, Erwan Verron. Fissuration en grandes transformations avec X-FEM. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812953

**HAL Id: hal-01812953**

**https://hal.science/hal-01812953**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Fissuration en grandes transformations avec X-FEM

**G. Legrain*** — **N. Moës*** — **E. Verron***

*GeM - Institut de Recherche en Genie Civil et Mécanique*
*École Centrale de Nantes - Université de Nantes - CNRS UMR 6183*
*1, rue de la Noë, BP 92101 - 44321 Nantes Cedex 3 - FRANCE*

RÉSUMÉ. *L'étude de la fissuration des élastomères est un domaine en pleine expansion. En effet, les phénomènes mis en jeux font apparaître des difficultés de multiple nature : d'une part des problèmes numériques dûs au comportement du matériau (grandes transformations, non-linéarité du comportement, incompressibilité), et d'autre part liés à la fissuration (discontinuité du déplacement, singularité des champs de déformation et de contrainte en pointe de fissure, difficulté de maillage, loi de propagation, solutions analytiques très limitées). L'étude présentée ici met l'accent sur l'application de la méthode X-FEM à la mécanique non-linéaire de la rupture sous l'hypothèse des contraintes planes. Deux points importants sont étudiés : le choix de la formulation utilisée lors de la résolution, et la détermination de fonctions d'enrichissement adaptées. L'implémentation de la méthode est ensuite validée sur un cas simple.*

ABSTRACT. *Fracture of rubber-like materials is still an open problem. Indeed, it deals with modeling issues (crack growth law, bulk behaviour) and computational issues (robust crack growth in 2D and 3D, incompressibility). The present study focuses on the application of the eXtended Finite Element Method (X-FEM) to large strain fracture mechanics under plane stress. Two important issues are investigated: the choice of the formulation used to solve the problem and the determination of suitable enrichment functions. Finally, he implementation of the method is validated with a simple example.*

MOTS-CLÉS : *Fissuration, mécanique non-linéaire de la rupture, partition de l'unité, X-FEM*

KEYWORDS: *Fracture, nonlinear fracture mechanics, partition of unity method, X-FEM*

## 1. Introduction

L'étude de la fissuration des élastomères est un domaine en pleine expansion. En effet, les phénomènes mis en jeux font apparaître des difficultés de multiple nature : d'une part des problèmes numériques dûs au comportement du matériau (grandes transformations, non-linéarité du comportement, incompressibilité), et d'autre part liés à la fissuration (discontinuité du déplacement, singularité des champs de déformation et de contrainte en pointe de fissure, difficulté de maillage, loi de propagation, solutions analytiques très limitées). A l'opposé, la fissuration des métaux a considérablement évolué ces dernières années. Plusieurs approches ont été proposées : un premier axe visant à éviter le problème du remaillage a donné naissance aux méthodes de résolution sans maillage (Element Free Galerkin Method, Reproducing Kernel Particule Methods...) [FLE 97]. Ces méthodes permettent en outre d'inclure dans la base d'interpolation des fonctions issues de la physique du problème afin d'améliorer la qualité de la solution. Malheureusement, elles font apparaître des paramètres dans l'interpolation (taille du domaine d'influence, etc...) dont l'influence n'a pu être précisément quantifiée. Un second axe basé sur la partition de l'unité a permis d'une part l'introduction dans la base éléments finis de fonctions physiques, mais aussi la possibilité de représenter la structure indépendamment du maillage. La méthode X-FEM utilisée comme base ici fait partie cette dernière classe. Elle est apparue en 1999 avec comme premier objectif la modélisation de la fissuration des métaux [MOË 99], en évitant le problème du remaillage. Elle a depuis été étendue à d'autres domaines, principalement ceux où la gestion du maillage peut devenir problématique (inclusions matérielles [SUK 01], homogénéisation [MOË 03]...).
Le but de notre étude est dans un premier temps de montrer comment cette méthode peut être appliquée à la mécanique non-linéaire de la rupture. Ensuite, la méthode est validée par comparaison avec la litérature.

## 2. Equations du problème

### 2.1. *Déformation en grandes transformations d'un corps fissuré*

Considérons un corps fissuré de faible épaisseur $\mathcal{B}$ , défini par sa surface médiane $\Omega$ et sa distribution d'épaisseur $H$ dans la configuration de référence non déformée $(\mathcal{C}_0)$. Sollicité dans son plan, $\mathcal{B}$ se déforme et occupe la configuration $(\mathcal{C})$. Dans cette configuration, la surface médiane, la frontière et la distribution d'épaisseur sont respectivement notées $\omega$, $\partial\omega$ and $h$. La figure 1 présente les notations. Le mouvement entre $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C})$ peut être décrit par le mapping $\phi$ qui relie la position courante, $\mathbf{x}$, d'une particule à l'instant $t$, à sa position initiale $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) \qquad [1]$$

Dans la configuration déformée, la frontière de $\mathcal{B}$ peut être séparée en 2 parties distinctes : $\partial\omega_u$ sur laquelle sont appliquées les conditions limites de Dirichlet, et $\partial\omega_T$ pour les conditions limites de Neumann. Remarquons que $\partial\omega_T$ inclue les lèvres de la

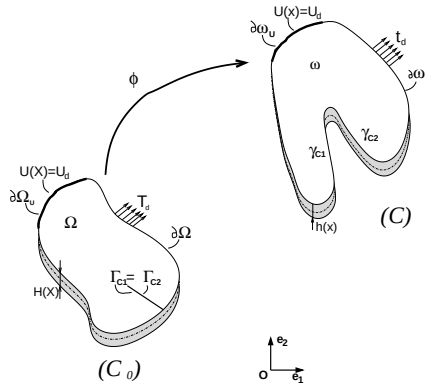



**Figure 1.** *Notations du problème considéré*

fissure $\partial\gamma_{C1}$ et $\partial\gamma_{C2}$. Les parties correspondantes sont notées, dans la configuration de référence, $\partial\Omega_u$ (conditions limites de Dirichlet), $\partial\Omega_T$ (conditions limites de Neumann), $\partial\Gamma_{C1}$ et $\partial\Gamma_{C2}$ pour les lèvres de la fissure. En négligeant les forces de volume, la formulation forte du problème s'exprime, en description matérielle :

$$\begin{array}{ll} Div_{\mathbf{X}}\,\underline{\underline{P}} = \mathbf{0} & dans\ \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u_d} & sur\ \partial\Omega_u \\ \underline{\underline{P}}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{T_d} & sur\ \partial\Omega_t \setminus ((\partial\Gamma_{C1})\cup(\partial\Gamma_{C2})) \\ \underline{\underline{P}}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{0} & sur\ \partial\Gamma_{C1}\ and\ \partial\Gamma_{C2} \end{array} \qquad [2]$$

Dans ces équations, $\underline{\underline{P}}$ correspond au premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff , $\mathbf{u}$ au champ de déplacement, $\mathbf{u_d}$ aux déplacements imposés, $\mathbf{N}$ à normale unitaire extérieure à la frontière $\partial\Omega_T$ et $\mathbf{T_d}$ le vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff imposé. La formulation faible du problème peut ensuite être exprimée en description matérielle :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}) = \int_\Omega H(X)\ \underline{\underline{S}} : \delta\underline{\underline{E}}d\Omega - \int_{\partial\Gamma_T} \mathbf{T_d}\cdot\delta\mathbf{u}\ d\Gamma = 0 \quad \forall\delta\mathbf{u} \qquad [3]$$

Où $\underline{\underline{S}}$ représente le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\underline{\underline{E}}$ le tenseur des déformations de Green-Lagrange et $\delta\mathbf{u}$ le champ de déplacement virtuel. Dans notre cas, l'équation précédente est non-linéaire (à cause des grandes transformations et des non-linéarités matérielles). Dans l'optique d'une résolution de type Newton, sa linéarisation s'écrit :

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u})[\mathbf{u}] = & \int_\Omega H(X)\ D\underline{\underline{E}}[\delta\mathbf{u}] : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{C}}}}} : D\underline{\underline{E}}[\mathbf{u}]\ dV \\ & + \int_\Omega H(X)\ \underline{\underline{S}} : \left[(Grad_X\,\mathbf{u})^T\cdot(Grad_X\delta\mathbf{u})\right]\ dV \end{aligned} \qquad [4]$$

Où $D\bullet$ représente la dérivation directionnelle et $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{C}}}}}$ le tenseur d'élasticité matériel. On a en outre supposé que les vecteurs contraintes imposés ne dépendaient pas du

champ de déplacement. Finalement, le matériau est supposé homogène, isotrope et incompressible. On considère la théorie générale de l'hyperélasticité choisissant un matériau de type Néo-Hookéen. La densité d'énergie de déformation s'écrit alors :

$$W = \frac{\mu}{2}(Tr(\underline{\underline{C}}) - 3) \qquad [5]$$

Où $\mu$ représente le module de cisaillement et $\underline{\underline{C}}$ le tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite ($\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{E}}$). La contrainte de Piola-Kirchhoff N°2 s'écrit alors, sous l'hypothèse des contraintes planes (grâce à la faible épaisseur de la feuille et au chargement dans le plan) :

$$\underline{\underline{\bar{S}}} = \mu \left[\underline{\underline{\bar{I}}} - det(\underline{\underline{\bar{C}}})^{-1}\underline{\underline{\bar{C}}}^{-1}\right] \qquad [6]$$

Où $\underline{\underline{\bar{I}}}$ est le tenseur identité $2 \times 2$, $\underline{\underline{\bar{C}}}$ et $\underline{\underline{\bar{S}}}$ sont respectivement les restrictions dans le plan du tenseur des dilatations et du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff N°2. Finalement, le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{C}}}}}$ de l'équation (4) devient :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{C}}}}} = 2\mu\, det(\bar{C})^{-1}\left(\underline{\underline{\bar{C}}}^{-1} \otimes \underline{\underline{\bar{C}}}^{-1} + \underline{\underline{\mathcal{I}}}\right) \qquad [7]$$

Où $\underline{\underline{\mathcal{I}}} = \partial\underline{\underline{\bar{C}}}^{-1}/\partial\underline{\underline{\bar{C}}}^{-1}$.

## 3. La méthode X-FEM

Pour les raisons exposées dans [LEG 04], on se basera sur une formulation Lagrangienne totale. Il faut donc approximer le champ de déplacement sur la configuration de référence. L'approximation éléments finis d'un champ vectoriel $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ sur un élément $\Omega_e$ est enrichie (via la partition de l'unité) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X})|_{\Omega_e} = \sum_{i=1}^{Nddl_e} \mathbf{N^i} \left(u^i + \sum_{j=1}^{Nenr} a_j^i\, \phi_j(\mathbf{X})\right) \qquad [8]$$

Où Nddl_e correspond au nombre de degrés de liberté de l'élément, Nenr au nombre de ddl additionnels, $a_j^i$ aux ddl additionnels associés au degré de liberté i, et $\phi_j$ la $j^{eme}$ fonction d'enrichissement scalaire. Deux types d'enrichissement sont utilisés en mécanique de la rupture [MOË 99] pour les ddl des noeuds dont le support contient la discontinuité :

– Un enrichissement discontinu pour les noeuds dont le support est coupé par la fissure. Dans ce cas, l'interpolation du champ de déplacement doit être discontinue à travers la fissure. Une fonction de type Heaviside est utilisée pour modéliser cette discontinuité (cette fonction vaut $+1$ d'un côté de la fissure et $-1$ de l'autre). Elle est en outre calculée à partir de la représentation levelset de la fissure.

– Un enrichissement en pointe pour les noeuds dont le support contient la pointe de la fissure. En mécanique linéaire de la rupture, cet enrichissement est obtenu en considérant les champs de déplacements asymptotiques en pointe de fissure. Dans le cas d'un matériau Néo-Hookéen, des résultats théoriques ont été établis sous l'hypothèse des contraintes planes incompressibles par Geubelle et Knauss [GEU 94]. Le champ asymptotique de déplacement s'écrit alors :

$$\begin{cases} v_1(r,\theta) \approx r\cos(\theta) \\ v_2(r,\theta) = r^{1/2}\sin(\theta/2) \end{cases} \qquad [9]$$

Où $v_1$ et $v_2$ sont les projections du champ de déplacement respectivement sur les directions tangentes et normales au plan de la fissure. Finalement, l'enrichissement considéré sera :

$$\phi = \left\{ r^{1/2}\ \sin(\theta/2) \right\} \qquad [10]$$

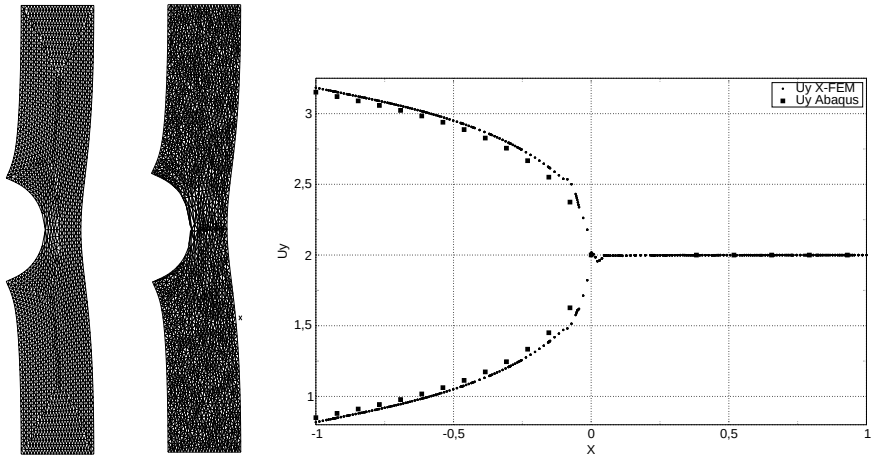
Le premier terme de (9) n'est pas considéré, car ce terme est linéaire. Il faisait donc déjà partie de l'espace d'approximation élément finis avant enrichissement. Son utilisation pourrait donc conduire à des problèmes de conditionnement de la matrice tangente du problème.

## 4. Application : comparaison avec un code élément finis industriel

Dans cette application, les résultats de calculs provenant d'X-FEM et d'Abaqus sont comparés. Une éprouvette simple entaille (dimensions = $2\,\text{mm} \times 6\,\text{mm}$ , fissure de longueur 1 mm) est soumise à un déplacement imposé de $4\,\text{mm}$ sur son côté supérieur, le côté inférieur de l'éprouvette étant encastré. On considère un matériau Néo-Hookéen ayant un module de cisaillement $\mu = 0.4225$. Le maillage utilisé avec Abaqus maille explicitement la fissure, et a la même densité que celui utilisé avec X-FEM (qui est non structuré, la fissure passant à travers les éléments) Les configurations déformées sont comparées. Qualitativement, elles sont similaires, comme le montrent les figures 2(a) and (b). Pour les comparer plus précisément, le déplacement vertical des noeuds situés sur les lèvres de la fissure est tracé en fonction de la position horizontale initiale de ceux-ci. (cf figure 2(c)). Les deux déformées sont similaires, montrant que les résultats obtenus avec X-FEM sont fiables

## 5. CONCLUSIONS

Cette application de la méthode X-FEM permet de réaliser simplement et précisément des calculs en mécanique de la rupture non-linéaire. On a montré la robustesse de la méthode en la comparant à un code élément fini commercial. D'autres validations [LEG 04] ont permis de quantifier l'influence des fonctions d'enrichissement sur la qualité de la solution éléments finis. Cette étude pourra donc se poursuivre selon de nombreux axes comme le choix de fonctions d'enrichissement adaptées à des matériaux plus proches de la réalité, mais aussi plus complexes (Mooney rivlin, Ogden...),




(a) (b) (c)

**Figure 2.** *(a) Configuration déformée Abaqus ; (b) Configuration déformée X-FEM ; (c) Déplacements verticaux des noeuds de la fissure*

ou l'étude de stratégies de gestion de l'incompressibilité en déformations planes ou calculs tridimensionnels.

## 6. Bibliographie

[FLE 97] FLEMING M., CHU Y., MORAN B., BELYTSCHKO T., « Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 1997.

[GEU 94] GEUBELLE P., KNAUSS W., « Finite Strains at the Tip oh a Crack in a Sheet of Hyperelastic Material : I. Homogeneous Case », *Journal of Elasticity*, vol. 35, 1994, p. 61-98.

[LEG 04] LEGRAIN G., MOËS N., VERRON E., « Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended Finite Element Method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , 2004, Accepted.

[MOË 99] MOËS N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131–150.

[MOË 03] MOËS N., CLOIREC M., CARTRAUD P., REMACLE J.-F., « A computational approach to handle complex microstructure geometries », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 192, 2003, p. 3163–3177.

[SUK 01] SUKUMAR N., CHOPP D. L., MOËS N., BELYTSCHKO T., « Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method », *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 190, 2001, p. 6183–6200.