



**HAL**  
open science

# Application de la méthode des éléments de frontière à la résolution de problèmes élastoplastiques

Gaétan Hello, Hocine Kébir, Laurent Chambon, Jean-Marc Roelandt, Alain  
Rassineux

► **To cite this version:**

Gaétan Hello, Hocine Kébir, Laurent Chambon, Jean-Marc Roelandt, Alain Rassineux. Application de la méthode des éléments de frontière à la résolution de problèmes élastoplastiques. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812941

**HAL Id: hal-01812941**

**<https://hal.science/hal-01812941v1>**

Submitted on 12 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Application de la méthode des éléments de frontière à la résolution de problèmes élastoplastiques.

**Gaétan Hello\* - Hocine Kébir\* - Laurent Chambon\*\*  
Jean-Marc Roelandt\*- Alain Rassineux\***

*\*Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne / CNRS  
BP 20529 - 60205 Compiègne cedex  
gaetan.hello@utc.fr - hocine.kebir@utc.fr - jean-marc.roelandt@utc.fr  
alain.rassineux@utc.fr*

*\*\*EADS, Centre Commun de Recherches  
12 rue Pasteur – BP 76 – 92152 Suresnes Cedex  
laurent.chambon@eads.net*

---

RÉSUMÉ : L'objet de ce travail consiste à étudier la résolution des problèmes élastoplastiques par la méthode des éléments de frontière. Les deux principales difficultés inhérentes à l'utilisation de cette méthode sont d'une part la nécessité de disposer d'une procédure efficace d'évaluation des intégrales singulières et d'autre part l'obligation d'adapter un algorithme d'intégration de comportement élastoplastique de type explicite à la formulation équations intégrales du problème. Les solutions utilisées sont décrites puis appliquées à la résolution d'un cas académique de problème élastoplastique bidimensionnel.

ABSTRACT : This work aims at studying the solving of 2D elastoplastic issues using the boundary element method. There are two main difficulties linked with this method. First an efficient procedure for the accurate evaluation of the singular integrals is needed. Then the existing elastoplastic behaviour integration algorithm will have to be adapted so as to take into account the boundary integral equations formulation. The solutions developed will be described before being employed in the solving of an academic example of 2D elastoplastic problem.

MOTS-CLÉS : Méthode des éléments de frontière, algorithme élastoplastique explicite.

KEYMORDS : Boundary elements method, elastoplastic explicit algorithm.

---

## 1. Introduction :

La méthode des éléments de frontière s'avère particulièrement bien adaptée à la résolution de problèmes élastoplastiques en raison de la liberté qu'elle autorise face aux contraintes de maillage et de la latitude qu'elle laisse quant au choix de l'approximation du champ de déformations plastiques. Les premiers travaux portant sur le sujet datent des années 70.

Cette méthode ne requiert que le maillage des seules zones potentiellement plastiques qui demeurent généralement localisées à proximité des concentrations et singularités de contraintes. Ce recours possible à une discrétisation restreinte de la structure étudiée contribue à réduire sensiblement le temps d'analyse en simplifiant l'étape de maillage.

Le champ de déformations plastiques est quant à lui approché localement par une fonction polynomiale dont le degré ne dépend pas des approximations faites pour les autres champs mécaniques. Ainsi, contrairement à la méthode des éléments finis où l'on perd un degré en passant de l'interpolation des déplacements à celle des déformations plastiques, ces dernières peuvent être approximées localement en éléments de frontière avec autant de précision que souhaité.

La qualité des résultats obtenus par cette méthode dépendra de la procédure de constitution des systèmes linéaires ainsi que de l'efficacité de l'algorithme élastoplastique explicite qui les exploite.

## 2. Formulation du problème d'élastoplasticité en éléments de frontière :

### 2.1 Formulation intégrale continue :

Le point de départ de la méthode des éléments de frontière est le théorème de Maxwell Betti [BON99] qui permet de corréler dans une relation intégrale deux solutions mécaniques distinctes du problème d'équilibre d'un domaine  $\Omega$ . Connaissant la solution fondamentale de Kelvin valable pour un champ de force volumique particulier, il est possible d'obtenir l'expression du déplacement de la solution mécanique inconnue sous forme d'intégrales où interviennent les autres champs inconnus :

$$\alpha(X;\Omega) \cdot u_i(X) = \int_{\partial\Omega} (U_j^i(X;Y) \cdot t_j(Y)) \cdot dS - \int_{\partial\Omega} (u_j(Y) \cdot T_j^i(X;Y)) \cdot dS + \int_{\Omega} (\sigma_{jk}^i(X;Y) \cdot \varepsilon_{jk}^p(Y)) \cdot d\Omega [1]$$

Le paramètre  $\alpha$  traduit un processus de limitation et vaut 1 si le point de collocation est strictement à l'intérieur du domaine, 1/2 sur le contour et 0 hors du domaine. Les noyaux  $U_j^i$ ,  $T_j^i$  et  $\sigma_{jk}^i$  sont les solutions de Kelvin [ALI02].

Pour un problème d'élastoplasticité en petites perturbations, la différenciation de [1] permet d'obtenir les déformations élastiques et donc la deuxième relation intégrale en contraintes :

$$\sigma_{ij}(X) = \left[ \int_{\partial\Omega} (D_{jk}^i \cdot t_k(Y)) \cdot dS - \int_{\partial\Omega} (u_k(Y) \cdot S_{jk}^i) \cdot dS \right] + \int_{\Omega} (\Sigma_{jkl}^i(X;Y) \cdot \varepsilon_{kl}^p(Y)) \cdot d\Omega + f_{ij}(\varepsilon_{kl}^p(X)) [2]$$

Les noyaux  $D_{jk}^i$ ,  $S_{jk}^i$  et  $\Sigma_{jkl}^i$  sont déduits des 3 précédents noyaux de Kelvin, tandis que le terme  $f_{ij}(\varepsilon_{kl}^p)$  résulte de l'intégration de  $\sigma_{jk}^i$  sur une surface centrée sur  $X$ .

## 2.2 Formulation discrète et obtention des systèmes linéaires :

Pour parvenir à une formulation discrète du problème, il faut au préalable définir une approximation locale des champs intervenant dans les intégrales de [1] et [2]. Les champs de déplacements et de tensions sur le contour sont approchés par une interpolation élémentaire quadratique 1D non-conforme (fig. 1.). Les déformations plastiques sont quant à elles approchées par une interpolation élémentaire linéaire 2D sur les cellules triangulaires du maillage de domaine (fig. 2.).

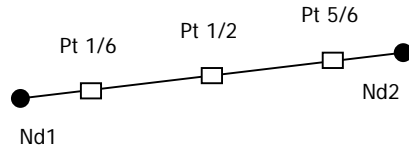


Figure 1. Points de collocation 1D

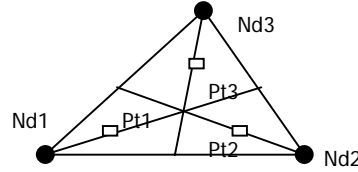


Figure 2. Points de collocation 2D

Une fois approchés les champs tant sur le contour qu'à l'intérieur du domaine, il est possible de faire apparaître des vecteurs discrets dans les équations [1] et [2] :

$$\frac{1}{2} \cdot u_i(X) = \langle U^i(X; \Omega) \rangle \cdot \{t\} + \langle T^i(X; \Omega) \rangle \cdot \{u\} + \langle \sigma^i(X; \Omega) \rangle \cdot \{\varepsilon^p\}, \quad X \in \partial\Omega \quad [3]$$

$$\sigma_{ij}(X) = \langle D^{ij}(X; \Omega) \rangle \cdot \{t\} + \langle S^{ij}(X; \Omega) \rangle \cdot \{u\} + \langle \Sigma^{ij}(X; \Omega) + f_{ij}(X) \rangle \cdot \{\varepsilon^p\}, \quad X \in \bar{\Omega} \quad [4]$$

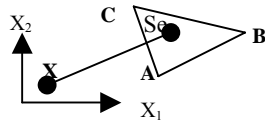
Les vecteurs discrets  $\{t\}$ ,  $\{u\}$ ,  $\{\varepsilon^p\}$  sont respectivement le vecteur des tensions et des déplacements des points du contour et le vecteur des déformations plastiques des points intérieurs. Le passage aux systèmes linéaires employés dans l'algorithme explicite peut désormais être achevé. En écrivant [3] pour l'ensemble des composantes de déplacement de l'ensemble des points de collocation de l'ensemble des éléments de contour, puis en sommant ces égalités, on parvient à faire apparaître le vecteur  $\{u\}$  dans le premier membre. Il est alors possible de se ramener à un système de la forme:

$$[A] \cdot \{u\} = [B] \cdot \{t\} + [D] \cdot \{\varepsilon^p\} \quad [5]$$

Partant maintenant de [4] que l'on écrira pour toutes les composantes de contraintes de l'ensemble des points de collocation des cellules 2D du domaine, on organisera ces grandeurs dans un vecteur noté  $\{\sigma\}$  dont l'expression est la suivante:

$$\{\sigma\} = -[A'] \cdot \{u\} + [B'] \cdot \{t\} + [E] \cdot \{\varepsilon^p\} \quad [6]$$

Concernant l'évaluation des matrices linéaires  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[A']$ ,  $[B']$  une méthode analytique présentée dans [KEB98] est utilisée. S'agissant de l'évaluation des matrices non linéaires  $[D]$ ,  $[E]$ , une méthode analytique de calculs d'intégrales singulières a été développée. Pour chacune des deux matrices, il faut évaluer des intégrales dont les bornes d'intégration vont dépendre de la cellule 2D support et dont l'intégrande va varier en fonction des diverses composantes de champ et du point de collocation considéré. La méthode consiste à décomposer cette intégrale  $I$  en une combinaison linéaire (fonction de la configuration) de 3 intégrales sur des sous-domaines qui ont pour sommet commun le point de collocation.



$$I(X; S_e) \stackrel{ici}{=} I(X; XAB) + I(X; XBC) - I(X; XAC)$$

Cette méthode présente les avantages de n'avoir à utiliser qu'une unique forme d'intégrande par type de composantes des champs et permet de systématiser l'usage de l'évaluation analytique en bannissant les configurations critiques qui aboutissaient à des bornes d'intégration singulières.

### 3. Algorithme d'intégration du comportement :

A partir de [5] on constate que si l'on connaît  $\{\varepsilon^p\}$  à un instant donné de l'historique de chargement, il est possible de déduire immédiatement  $\{t\}$  et  $\{u\}$  après application des conditions limites et résolution d'un système linéaire. Connaissant alors les trois vecteurs discrets du membre de droite de [6] on peut directement déduire  $\{\sigma\}$  après substitution. Pour résoudre un problème d'élastoplasticité complet il convient donc de mettre en place un processus itératif [ALI02] permettant l'évaluation du champ de déformations plastiques à partir d'états mécaniques initiaux soumis à des incréments de chargement successifs (figure 3).

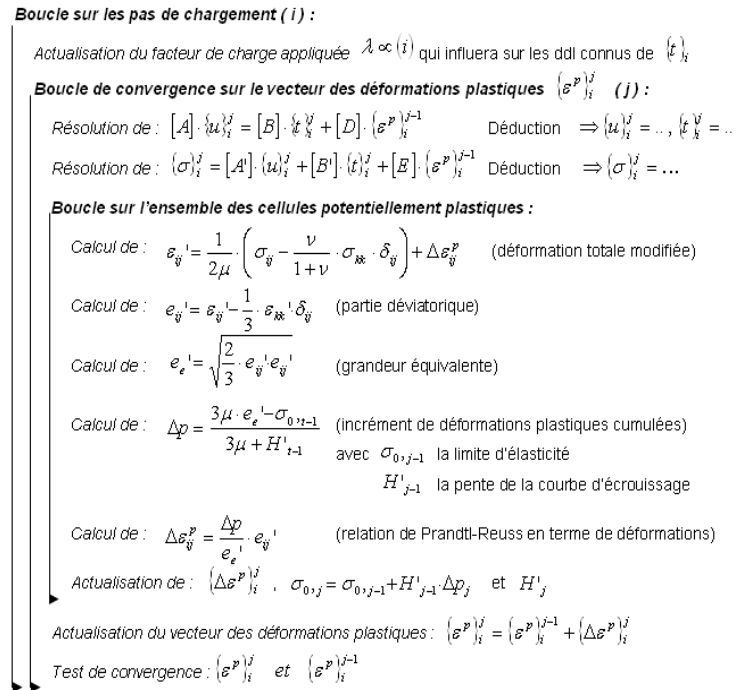
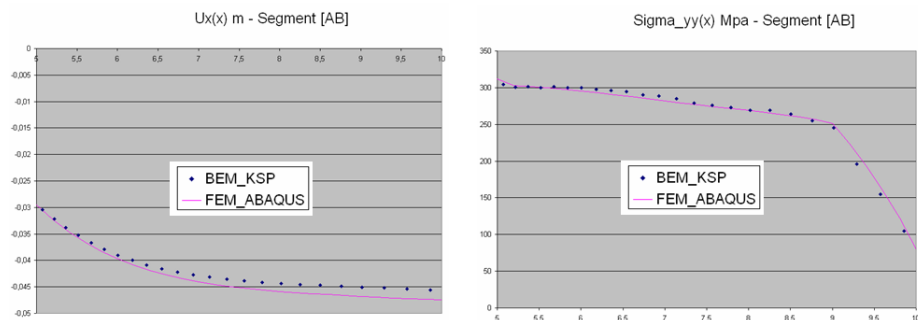


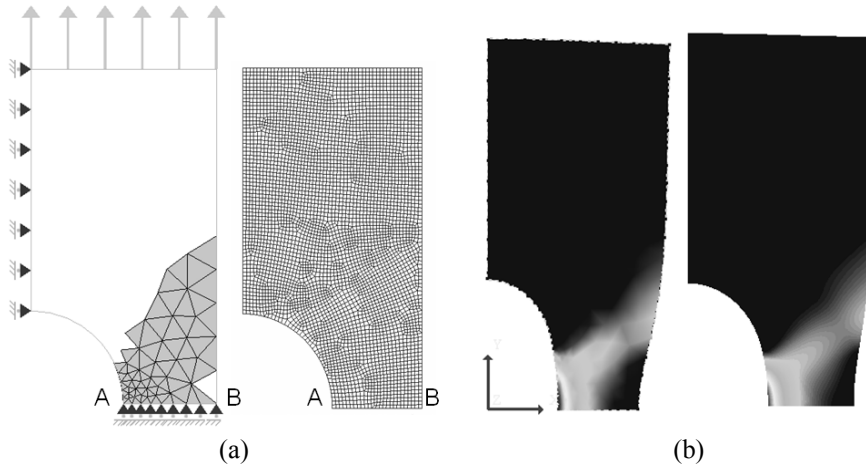
Figure 3. Algorithme élastoplastique

#### 4. Résultats numériques :

La validation des méthodes de calculs des intégrales singulières et de l'algorithme élastoplastique passe par la comparaison des résultats numériques obtenus par le code KSP développé à l'UTC et ceux fournis par ABAQUS. Le problème de référence est celui d'un quart de plaque trouée en traction. Le calcul FEM référence utilise un maillage raffiné de 4544 éléments Q4 tandis que le calcul BEM se base sur une discrétisation grossière de 89 cellules triangulaires et 41 éléments de frontière .



**Figure 4.** Comparaison des résultats numériques en déplacement et contraintes



**Figure 5.** Comparaison BEM/FEM : (a) maillage KSP et maillage ABAQUS, (b) champ de déformations plastiques cumulées KSP et ABAQUS.

## 5. Conclusion

Les résultats concluants obtenus par l'algorithme élastoplastique explicite dans la résolution de problèmes 2D ouvrent des perspectives dans le développement de procédures numériques de simulation d'endommagement et de propagation de fissures (déchirure ductile) en présence de non linéarités matérielles se basant sur la méthode des équations intégrales duales.

## 6. Bibliographie

- [ALI 02] Aliabadi M.H., "The boundary element method Vol. 2 : Applications in solids and structures", John Wiley & Sons, 2002.
- [BON 99] Bonnet M., "Boundary integral equations methods for solids and fluids", John Wiley & Sons, 1999.
- [BRE 89] : C.A. Brebbia and J. Dominguez, "Boundary elements : an introductory course", Mc Graw-Hill, 1st edition, 1989.
- [HEL 04] Hello G., "Algorithme de résolution de problèmes élastoplastiques par la méthode des éléments de frontière", Mémoire de DEA, UTC Compiègne, 2004.
- [KEB 98] Kebir H., "Approches déterministe et probabiliste de la prévision de la durée de vie de structures aéronautiques à l'aide de la méthode des équations intégrales duale", Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1998.

[KEB 99] : Kebir H., Roelandt J. M. and Foulquier J., "A new singular boundary element for crack problems: application to bolted joints", Engineering Fracture Mechanics V62, 1999.