



HAL
open science

Analyse robuste de modèles stochastiques basée sur le chaos polynomial ou les approximants de Padé

Mohamed Guedri, Riadh Majed, Nouredine Bouhaddi

► **To cite this version:**

Mohamed Guedri, Riadh Majed, Nouredine Bouhaddi. Analyse robuste de modèles stochastiques basée sur le chaos polynomial ou les approximants de Padé. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812936

HAL Id: hal-01812936

<https://hal.science/hal-01812936>

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Analyse robuste de modèles stochastiques basée sur le chaos polynomial ou les approximants de Padé

M. GUEDRI * — R. MAJED * — N. BOUHADDI **

* Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Nabeul,
8000 M'rezgua, Nabeul - TUNISIE

mohamed.guedri@isetn.rnu.tn
riadh.majed@ipein.rnu.tn

** Institut FEMTO ST UMR 6174 - Laboratoire de Mécanique Appliquée R.
Chaléat, Université de Franche-Comté, 24 Chemin de l'Épitaphe 25000 Besançon -
FRANCE

noureddine.bouhaddi@univ-fcomte.fr

RÉSUMÉ. La stratégie présentée dans cet article consiste à coupler les approches spectrales du chaos polynomial ou la méthode des perturbations basée sur un développement en séries de Taylor amélioré par les Approximants de Padé avec une méthode de condensation dynamique robuste vis-à-vis des modifications paramétriques stochastiques.

L'intérêt de la méthode proposée et ses performances, sont illustrés par un exemple de simulation numérique.

ABSTRACT. The strategy presented in this article consists in coupling the spectral approaches of polynomial chaos or the method of the perturbations based on a development in Taylor series improved by Padé Approximant with a robust dynamic condensation method with respect to the stochastic parametric modifications.

The interest of the proposed method and its performances, are illustrated for an numerical simulation example.

MOTS-CLÉS : Méthode des éléments finis stochastiques (SFEM) ; Transformation de Karhunen-Loève ; Chaos Polynomial (PC) ; Approximant de Padé (PA)

KEYWORDS: SFEM; Karhunen-Loève transformation; Polynomial Chaos; Padé Approximant

1. Introduction

Les calculs prévisionnels sur les systèmes mécaniques présentent souvent des dispersions sur les résultats des modèles mathématiques. Ces dispersions proviennent principalement des phénomènes complexes mal modélisés ; des incertitudes sur les caractéristiques géométriques et mécaniques des composants.

Plusieurs méthodes probabilistes existent pour modéliser ces incertitudes. Ces techniques d'analyse stochastiques (la méthode de simulation de Monte Carlo (MC), les méthodes de perturbations (Kleiber *et al.*, 1992), les méthodes spectrales (Ghanem *et al.*, 1991) (Chaos Polynomial)) permettent de faire une analyse de la variabilité de la réponse dynamique. Le calcul de ces réponses aléatoires est très coûteux en dynamique, et peut être délicat au voisinage des résonances. Dans le but de surmonter ces difficultés, on propose une stratégie basée sur :

- L'introduction du PC dans l'approche SFEM, qui permet modéliser les incertitudes sur les paramètres et de faire une analyse rapide de la variabilité de la réponse.
- L'exploitation des approximants de Padé (PA) (Venkatarangan *et al.*, 1995) qui permettent d'accélérer la convergence tout en augmentant le domaine de validité de l'approximation basée sur l'expansion en série de Taylor.
- L'introduction d'une méthode de condensation robuste vis-à-vis des modifications paramétriques incertaines (Guedri *et al.*, 2004).

2. Modèle dynamique stochastique

L'équation d'équilibre d'une structure stochastique amortie soumise à une excitation harmonique déterministe, s'écrit :

$$[Z_0(\omega) + \Delta Z(\omega, \theta)] U(\omega, \theta) = f_e \quad \text{ou bien} \quad Z_0(\omega) U(\omega, \theta) = f_{\Delta}(\omega, \theta) + f_e \quad [1]$$

$$Z_0(\omega) = (-\omega^2 M_0 + K_0) \quad \text{la matrice moyenne ;} \quad \Delta Z_0(\omega, \theta) = \sum_{r=1}^q (-\omega^2 M_r + K_r) \xi_r$$

la matrice stochastique ; $U(\omega, \theta)$ le vecteur réponse stochastique ; $\xi_r(\theta), r = 1, \dots, q$

les v.a.g.c.r indépendantes ; f_e le vecteur déterministe des forces appliquées ;

$f_{\Delta}(\omega, \theta) = -\Delta Z(\omega, \theta) U(\omega, \theta)$ le vecteur aléatoire des forces associées aux modifications incertaines et inconnues de la structure nominale.

Le modèle stochastique condensé par une base de réduction du modèle nominal T_0 s'écrit, dans le domaine fréquentiel, sous la forme :

$$Z_0^c(\omega) U^c(\omega, \theta) = f_{\Delta}^c(\omega, \theta) + f_e^c \quad [2]$$

On construit la base T_0 à l'aide de l'approche K-L en sous-structuration dynamique (Kim, 2002). Les modes optimaux $(\phi_1, \dots, \phi_k, \dots, \phi_M)$ sont extraits des réponses fréquentielles des sous-structures soumise aux forces de jonctions, et s'écrivent sous la forme d'une combinaison linéaire des réponses U_0^i de la structure :

$$\phi_k = \sum_{i=1}^M \alpha_{i,k} U_0^i \quad \text{et} \quad (K_0 - \omega^2 M_0) U_0^i(\omega) = F_j(\omega) \quad [3]$$

On utilise la technique «Single Composite Input» pour exciter la sous-structure au niveau des jonctions. La transformation de \mathbf{KL} prend la forme suivante :

$$T_{KL} = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_k] \quad k \leq M \quad [4]$$

L'enrichissement de la base T_{KL} par les résidus statiques aléatoires utilise les M réponses U_0^1, \dots, U_0^M . Le vecteur forces de modifications incertaines s'écrit :

$$f_{\Delta_k} = -(\Delta K - \omega_k^2 \Delta M) U_0(\omega_k), \quad [5]$$

et permet de générer la base de forces F_{Δ} et la matrice des résidus statiques $R_{\Delta} = K^{-1} F_{\Delta}$. La base optimale KL enrichie est : $T = [T_{KL} \ ; \ R_{\Delta}]$.

3. Réponses stochastiques

L'expansion de la réponse aléatoire condensé $U^c(\omega, \theta)$ dans le chaos polynomial à l'ordre P s'écrit sous la forme tronquée :

$$U^c(\theta) = \sum_{n=0}^P u_n^c \Psi_n(\xi_r(\theta))_{r=1}^q \quad [6]$$

où Ψ_n sont les polynômes d'Hermite multidimensionnels. L'équation (2) projetée sur les polynômes Ψ_m ($m = 0, \dots, P$) donne un système de $(P+1)$ équations matricielles linéaires, dont la solution correspond aux vecteurs u_n^c .

La méthode des perturbations basée sur le développement en séries de Taylor amélioré par les approximants de Padé permet de décomposer la réponse U :

$$U(\omega, \theta) = U_0(\omega) + \sum_{r=1}^q \frac{\partial U}{\partial \xi_r} \xi_r(\theta) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^q \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_r^2} \xi_r^2(\theta) + \dots \quad [7]$$

Sous la forme (Méthode de décomposition Adomian) :

$$U(\omega, \theta) = u_n(\omega, \theta) + O(\omega, \theta) = \sum_{r=1}^q \frac{a_0 + a_1 \xi_r + \dots + a_n \xi_r^n}{1 + b_1 \xi_r + \dots + b_n \xi_r^n} + O(\omega, \theta) \quad [8]$$

u_n est le n^{ième} Approximant de Padé de U . Pour $n = 1$, on obtient :

$$U(\omega, \theta) = \sum_{r=1}^q \frac{U_0(\partial U / \partial \xi_r) + \left[(\partial U / \partial \xi_r)^2 - \frac{1}{2} U_0 \left(\partial^2 U / \partial \xi_r^2 \right) \right] \xi_r}{(\partial U / \partial \xi_r) - \frac{1}{2} \left(\partial^2 U / \partial \xi_r^2 \right) \xi_r} \quad [9]$$

4. Simulation numérique

La structure considérée (Figure 1) est un système de plaques en forme d'équerre, divisée en deux sous-structures. Le modèle éléments finis contient 4140 ddl. Le modèle de la sous-structure 1 contient 1944 ddl et celui de la deuxième sous-structure 2 contient 2340 ddl (144 ddl de jonction). Les caractéristiques nominales sont : $t_0 = 1 \times 10^{-3}$ m ; $E_0 = 2,1 \times 10^{11}$ N/m² ; $\rho_0 = 7800$ kg/m³. Six zones de modifications incertaines sont définies (Tableau 1).

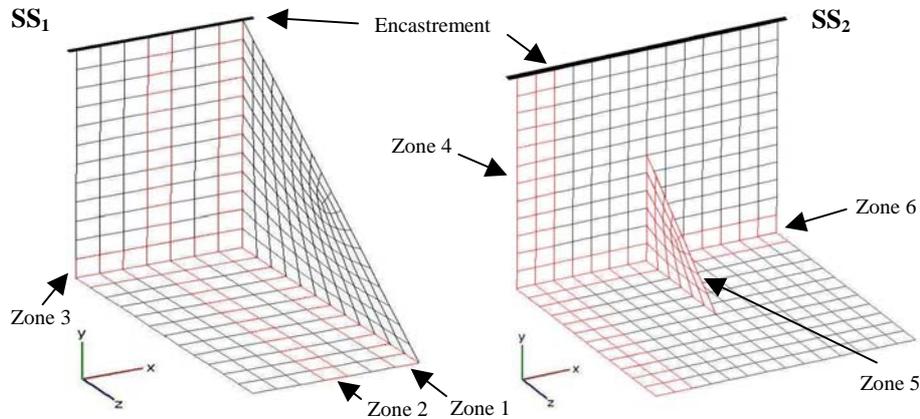
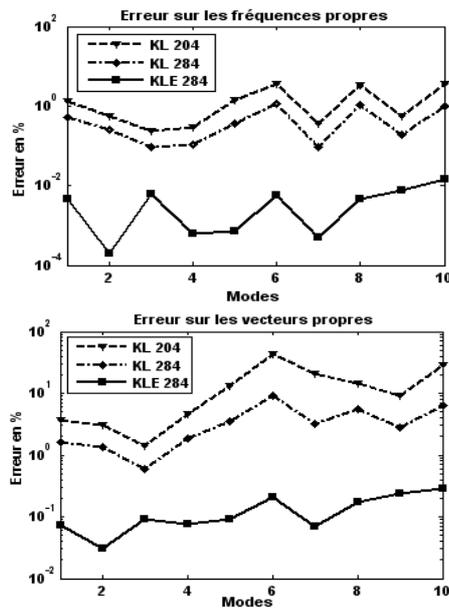


Figure 1. MEF de l'équerre – Définition des sous-structures

La bande de fréquence d'analyse comporte les 10 premiers modes. Par la méthode de KL, le modèle initial est ramené à un modèle condensé à 204 ddl. L'enrichissement de la base est effectué par 80 résidus statiques. Ainsi, la transformation KL enrichie (KLE) contient 284 vecteurs. Les modes propres aléatoires calculés à partir des modèles réduits sont comparés aux modes propres aléatoires de référence (Figure 2).

	Sous-structure 1			Sous-structure 2		
	E zone 1	t zone 2	E zone 3	E zone 4	t zone 5	E zone 6
Modifications par zones	X 1.5	X 0.25	X 1.5	X 1.5	X 0.25	X 1.5
incertitudes	5 %	2 %	5 %	5 %	2 %	5 %

Tableau 1. Modifications paramétriques incertaines



	Fréquence propre (Hz)	
	déterministe (sans modification)	aléatoire (1 ^{er} moment) (avec modification)
4140 DDLs		
1	53.570	355.80
2	66.977	409.34
3	189.38	632.68
4	307.91	750.52
5	508.81	813.12
6	550.34	829.61
7	605.41	862.45
8	666.84	985.66
9	759.94	1338.1
10	803.32	1461.2

$$\varepsilon_f \% = \frac{|f_v^{ref} - f_v^{cal}|}{|f_v^{ref}|} \times 100$$

$$\varepsilon_U \% = \frac{|y_v^{ref} - y_v^{cal}|}{\|y_v^{ref}\|} \times 100$$

Figure 2. Précision des modes propres aléatoire (1^{er} moment)

La figure (3) montre une bonne précision de la moyenne de la réponse aléatoire calculée par PC ordre 2, PA ordre 1 pour 500 tirages par Hyper Cube Latin.

5. Conclusion

Dans cet article, on propose une stratégie qui consiste à coupler la méthode des éléments finis stochastiques et une méthode de condensation de modèles robuste vis-à-vis des modifications structurales incertaines. Cette méthode de condensation est basée sur la transformation de Karhunen-Loève. Les résultats de simulation montre que cette méthode constitue une alternative intéressante aux méthodes de réduction classiques qui sont inadaptées à la condensation de modèles éléments finis stochastiques.

Par ailleurs, la comparaison des coûts de calcul a permis de mettre en évidence les performances de la condensation enrichie avec projection sur le chaos polynomial, ou avec la méthode des perturbations exploitant les approximations de Padé. Le rapport *qualité de prédiction/CPU* permet de répondre aux besoins de réanalyse rencontrés dans les procédures itératives d'optimisation.

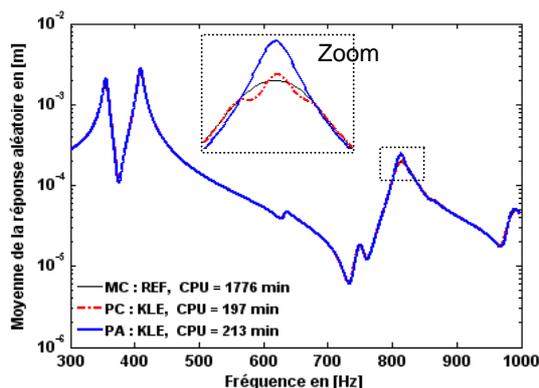


Figure 3. Moyenne de la réponse aléatoire. Modèles de référence et condensé

6. Bibliographie

- Ghanem R.G., Spanos P.D.. *Stochastic finite elements: A spectral approach*. Springer Verlag. 1991.
- Guedri M., Majed R., Bouhaddi N.. Coupling Stochastic Finite Elements – Robust Condensation Methods in Optimization of Structures. *Proceedings of the XXIIth International Modal Analysis Conference (IMAC)*. paper 301. Dearborn. Michigan. January. 2004
- Kim T.. Component Mode Synthesis Method Based on Optimal Modal Analysis. *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamic and Materials Conference*. Denver. AIAA paper 2002-1226. 2002.
- Kleiber M., Hien T.D.. *The stochastic finite element method. basic perturbation technique and computer implementation*. John Wiley & Sons. 1992.
- Venkatarangan S. N., Rajalakshmi K.. Modification of Adomian's Decomposition Method to Solve Equations Containing Radicals. *Computers Math Applic.* 29(6) pp. 75-80. 1995.