



HAL
open science

Construction de la réponse paramétrique déterministe d'un système mécanique par éléments finis stochastiques

Marc Berveiller, Bruno Sudret, Maurice Lemaire

► To cite this version:

Marc Berveiller, Bruno Sudret, Maurice Lemaire. Construction de la réponse paramétrique déterministe d'un système mécanique par éléments finis stochastiques. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812913

HAL Id: hal-01812913

<https://hal.science/hal-01812913>

Submitted on 12 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Construction de la réponse paramétrique déterministe d'un système mécanique par éléments finis stochastiques.

Marc Berveiller^{*,**} — Bruno Sudret^{*} — Maurice Lemaire^{**}

^{*}Electricité de France - R&D Division, Site des Renardières,
F-77818 Moret-sur-Loing,

^{**}LaMI - UBP & IFMA
Institut Français de Mécanique Avancée,
Campus de Clermont-Ferrand - Les Cézeaux, BP265,
F-63175 Aubière
{bruno.sudret,marc.berveiller}@edf.fr
maurice.lemaire@ifma.fr

RÉSUMÉ. L'objectif de cette communication est d'utiliser les développements récents des éléments finis stochastiques (BER 04) pour effectuer des analyses paramétriques déterministes précises à moindre coût. En modélisant en effet les paramètres variables de l'analyse paramétrique par des variables aléatoires de loi uniforme sur leur intervalle de définition, on obtient une expression polynomiale approchée de la réponse.

L'approche EFS est appliquée au tassement d'une fondation.

ABSTRACT. The objective of this communication is to use recent developments of the stochastic finite element method to carry out accurate deterministic parametric analyses at low cost. By modelling indeed the parameters of the parametric analysis by random variables with uniform PDF on their interval of definition, one obtains an approximate polynomial expression of the response. The Approach is applied to the compressing of a foundation.

MOTS-CLÉS : Analyse paramétrique, éléments finis stochastique, chaos polynomial, méthode non intrusive

KEYWORDS: Sensitivity analysis, stochastic finite element method, polynomial chaos, non intrusive method

1. Introduction

Classiquement, les simulations numériques fournissent la réponse d'un système pour un jeu de paramètres d'entrée donné. Les analyses de sensibilité du modèle sur une plage de variation des paramètres d'entrée (*e.g.* des paramètres décrivant la géométrie, les propriétés matériau et/ou le chargement) permettent de mieux appréhender sa robustesse ou encore de l'intégrer dans un processus d'optimisation. Les méthodes actuelles sont basées sur des surfaces de réponse déterministes, en pratique un développement de la réponse en série polynomiale d'ordre 2. Les points d'évaluation de la fonction sont choisis selon un plan d'expériences. Les différents plans d'expériences qui sont couramment utilisés sont en étoile, factoriel, ou tabulé de type Taguchi.

La méthode des éléments finis stochastiques (MEFS) proposée dans (BER 04) s'apparente donc à une méthode de surface de réponse polynomiale dans l'espace de probabilité, qui est formulée de façon cohérente à tout ordre (base du chaos polynomial) et pour laquelle le choix des points de collocation (équivalent du plan d'expériences) est fixé de façon optimale par la théorie.

L'objectif de cette communication est d'utiliser ces développements récents pour effectuer des analyses paramétriques *déterministes* précises à moindre coût. En modélisant en effet les paramètres variables de l'analyse paramétrique par des variables aléatoires de loi uniforme sur leur intervalle de définition, on obtient une expression polynomiale approchée de la réponse. Les grands principes de la MEFS sont rappelés à la section 2. L'application à l'analyse paramétrique est illustrée sur un exemple d'élasticité.

2. Méthodes des éléments finis stochastiques

2.1. Méthode historique des éléments finis stochastiques

L'équilibre d'une structure pour des problèmes d'élasticité linéaire s'écrit par la méthode des éléments finis sous la forme d'un système de taille $N_{ddl} \times N_{ddl}$, où N_{ddl} est le nombre de degrés de liberté du système $\mathbf{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}$. Dans cette section, \mathbf{K} est la matrice de rigidité, \underline{U} est le vecteur des déplacements nodaux et \underline{F} est le vecteur des forces nodales.

Dans la méthode des éléments finis stochastiques (GHA 91; Sud 04), du fait de l'introduction de propriétés matériaux aléatoires et de paramètres de chargement aléatoires, la matrice \mathbf{K} et le vecteur \underline{F} deviennent aléatoires. Ainsi le vecteur des déplacements nodaux devient également aléatoire. On le note $\underline{U}(\theta)$ où θ représente la dimension probabiliste. Chaque composante de ce vecteur est une variable aléatoire qui peut se décomposer sur la base du *chaos polynomial* (GHA 91)

$$\underline{U}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{U}_j \Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M), \text{ où } \{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M \text{ est un ensemble de variables aléa-}$$

toires gaussiennes centrées réduites ayant servi à discrétiser les variables aléatoires d'entrée du problème et $\{\Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M)\}$ sont des polynômes d'Hermite multidimensionnels qui forment la base du chaos polynomial. Les coefficients $\{\underline{U}_j, j =$

$0, 1, \dots\}$ sont calculés en utilisant une minimisation au sens de Galerkin du résidu de l'équation $\mathbf{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}$ obtenu en tronquant à un certain ordre P les développements en série de \mathbf{K} , \underline{U} et \underline{F} . Ce type de résolution s'accompagne d'une implémentation spécifique dans le code aux éléments finis, et conduit à un système linéaire couplé de taille $P \times N_{dat}$.

De nouvelles méthodes de résolution ont été développées récemment pour calculer ces coefficients à l'aide de calculs aux éléments finis *déterministes* et de calculs analytiques. De ce fait, ces méthodes sont appelées *non intrusives*, car elles ne nécessitent pas d'implémentation à l'intérieur du code aux éléments finis, mais seulement le lancement d'une batterie de calculs déterministes et leur post-traitement.

2.2. Méthode des éléments finis stochastiques non intrusive

La méthode non intrusive présentée dans cette communication est basée sur une minimisation au sens des moindres carrés entre la solution exacte et la solution approchée par le chaos polynomial (ISU 99; BER 04). La première étape est le passage de l'espace physique dans l'espace normé pour chacune des variables aléatoires d'entrée, rassemblées dans un vecteur aléatoire \underline{X} . Si ces M variables sont indépendantes, cette transformation s'écrit :

$$\xi_i = \Phi^{-1}(F_i(X_i)) \quad (1)$$

où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite et $\{F_i(x_i), i = 1, \dots, M\}$ sont les fonctions de répartition des X_i .

Supposons que l'on veuille approximer le vecteur aléatoire des déplacements nodaux par un développement tronqué sur la base du chaos polynomial :

$$\underline{U} \approx \tilde{\underline{U}} = \sum_{j=0}^{P-1} \underline{U}_j \Psi_j(\underline{\xi}) \quad , \quad \underline{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_M\} \quad (2)$$

où $\{\Psi_j, j = 0, \dots, P-1\}$ sont P polynômes d'Hermite multidimensionnaux de $\underline{\xi}$ dont le degré est inférieur ou égal à p . Nous avons la relation suivante $P = \frac{(M+p)!}{M! p!}$.

Choisissons n réalisations du vecteur aléatoire $\underline{\xi}$, soit $\{\xi^{(k)}, k = 1, \dots, n\}$. Pour chaque réalisation $\underline{\xi}^{(k)}$, la transformation isoprobabiliste (1) permet d'obtenir le vecteur aléatoire des variables d'entrée $\underline{X}^{(k)}$. En utilisant le code aux éléments finis, le vecteur réponse $\underline{U}^{(k)}$ est calculé, notons $\{u^{(k),i}, i = 1, \dots, N_{dat}\}$ ses composantes. En utilisant (2) pour chaque composante i , nous posons $\tilde{u}^i(\underline{\xi}) = \sum_{j=0}^{P-1} u_j^i \Psi_j(\underline{\xi})$. où $\{u_j^i\}$ sont les coefficients à calculer. La méthode des moindres carrés consiste à trouver pour chaque degré de liberté $i = 1, \dots, N_{dat}$ l'ensemble de coefficients qui minimise la différence $\Delta u^i = \sum_{k=1}^n [u^{(k),i} - \tilde{u}^i(\underline{\xi}^{(k)})]^2$. Ces coefficients sont solution d'un système linéaire inversé *une fois pour toutes*. Ainsi les coefficients du développement des autres degrés de liberté u^i sont calculés par un simple produit matrice-vecteur.

Le point le plus important de la méthode est le choix des points de collocation, *i.e.* des réalisations $\{\xi^{(k)}, k = 1, \dots, n\}$ avec $n \geq P$. Isukapalli (ISU 99) choisit pour

chaque variable d'entrée les $p + 1$ racines du polynôme d'Hermite d'ordre $p + 1$, et construisent $(p+1)^M$ vecteurs de taille M contenant toutes les combinaisons possibles de ces racines. Il sélectionne ensuite les réalisations $\{\xi^{(k)}, k = 1, \dots, n\}$ parmi toutes ces combinaisons. Isukapalli choisit $n = P + 1$ et les $2(P + 1)$ réalisations qui maximisent $\varphi_n(\xi^{(k)}) = (2\pi)^{-M/2} \exp \left[-1/2 \|\xi^{(k)}\|^2 \right]$. Au delà de ces exemples, aucune investigation systématique du nombre de points n nécessaires n'a été menée : c'est l'objet de cette communication. En utilisant la méthode de sélection des points mentionnée ci-dessus, il est aisé d'augmenter de façon itérative la précision des résultats en prenant de plus en plus de points de collocation, le tout sans perdre les calculs précédents.

Application de la méthode non intrusive au cas des analyses paramétriques déterministes

La méthode *non intrusive* des éléments finis stochastiques permet de faire des analyses paramétriques en définissant chacun des paramètres comme étant une variable aléatoire uniforme. Les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de définition doivent être choisies comme étant légèrement inférieure et supérieure (environ 5%) aux valeurs limites du paramètre. En effet, cette méthode donne des résultats meilleurs au centre des domaines de définition qu'aux bords. Il faut cependant rester dans un domaine de valeurs physiquement possible pour les variables aléatoires.

3. Exemple d'application : tassement d'une fondation

3.1. Description

On considère un massif de sol linéairement élastique d'épaisseur t reposant sur un substratum rigide. Il est composé de deux couches horizontales d'épaisseur t_1 et t_2 . Une fondation reposant sur ce massif est modélisée par deux pressions P_1 et P_2 appliquées respectivement sur un segment de longueur $2B_1$ et $2B_2$ de sa surface libre. La figure 1 représente le schéma et le maillage de la fondation. Les éléments utilisés sont des quadrangles isoparamétriques linéaires QUAD4. Le maillage est constitué de 99 noeuds et 80 éléments. Le problème est traité en déformations planes. Les déplacements horizontaux des bords droit et gauche sont imposés nuls ainsi que les déplacements horizontaux et verticaux sur la ligne horizontale inférieure de la fondation. L'analyse paramétrique porte sur 6 paramètres, qui sont représentés par des variables aléatoires uniformes. Les paramètres de ces lois sont rassemblés dans le tableau 1. Le tassement maximal calculé aux valeurs moyennes des variables aléatoires est $u_{max} = -11,09$ cm, obtenu au noeud supérieur gauche du maillage.

3.2. Résultats

La méthode *non intrusive* des éléments finis stochastiques est utilisée à l'ordre 3 ($P = \frac{(6+3)!}{6!3!} = 84$) et à l'ordre 4 ($P = \frac{(6+4)!}{6!4!} = 210$) pour calculer le tassement

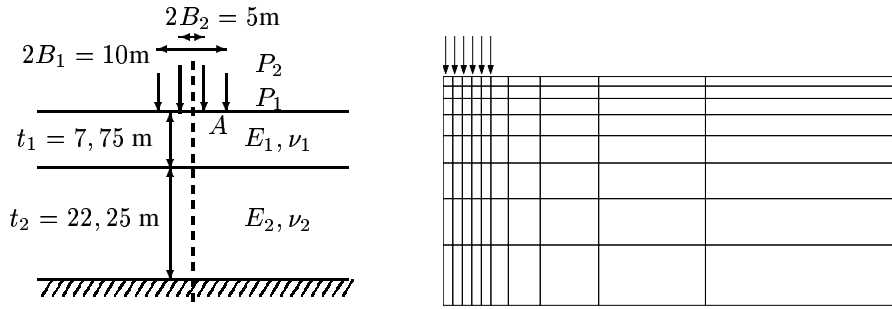


Figure 1. Gauche : Schéma de la fondation - Droite : Maillage de la fondation

Tableau 1. Définition des variables aléatoires de la fondation

Paramètre	Notation	Loi	Borne inf.	Borne sup.
Module d'Young couche sup.	E_1	Uniforme	50 MPa	70 MPa
Module d'Young couche inf.	E_2	Uniforme	70 MPa	90 MPa
Coefficient de Poisson couche sup.	ν_1	Uniforme	0,1	0,4
Coefficient de Poisson couche inf.	ν_2	Uniforme	0,1	0,4
Chargement 1	P_1	Uniforme	0,1 MPa	0,3 MPa
Chargement 2	P_2	Uniforme	0,1 MPa	0,3 MPa

maximal de la fondation. Les résultats de référence sont obtenus par des calculs aux éléments finis déterministes pour des valeurs données des six paramètres d'entrée. La figure 2 gauche montre l'erreur relative entre un calcul aux éléments finis déterministe et l'approximation par le chaos polynomial pour différents points du domaine régulièrement répartis sur le domaine de définition de chacun des paramètres. Les points sont classés du plus proche de l'origine (dans l'espace réduit des variables gaussiennes obtenues par transformation probabilisette (1) des paramètres d'entrée) au plus éloigné (l'origine de l'espace réduit correspondant le point aux valeurs moyennes des paramètres). La figure 2 droite montre la norme dans l'espace des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites des points de calculs de l'erreur relative. A partir du point 44, il y a au moins un paramètre qui prend une valeur limite (borne inférieure ou supérieure de l'intervalle de définition) : la norme du point augmente considérablement. On remarque que dans ce cas, l'erreur relative ne devient plus acceptable. Pour les autres points, l'erreur relative diminue en augmentant le nombre de points du plan d'expériences à degré constant ou en augmentant le degré du polynôme d'approximation. A l'ordre 4, les résultats ont convergé en prenant un nombre de points égal à 3 fois la taille du chaos polynomial (*i.e.* 630 points), alors qu'à l'ordre 3 ils n'ont toujours pas convergé avec un nombre de points égal à 5 fois la taille du chaos (*i.e.* 420 points).

Pour obtenir de bons résultats sur un intervalle souhaité, il faut définir un domaine de

définition légèrement supérieur à l'intervalle pour les variables aléatoires. Par exemple pour un paramètre compris entre 10 et 30, on définit une variable uniforme sur l'intervalle [9,4 ;31,8].

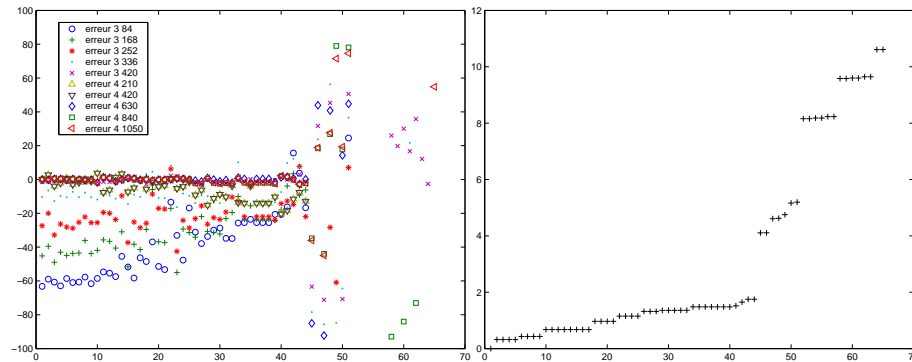


Figure 2. Gauche : Erreur relative (%) - Droite : Norme des points pour les points de calcul de l'erreur relative

4. Conclusion

Cette communication a permis de montrer que la méthode des éléments finis stochastiques permet de réaliser des analyses paramétriques déterministes en construisant une surface de réponse stochastique. Cette surface de réponse est construite à partir de calculs aux éléments finis déterministes et de calculs analytiques. Une méthode de choix des points pour le plan d'expérience est présentée. Cette méthode a été appliquée au tassement d'une fondation. Les résultats obtenus avec un développement d'ordre 4 sont encourageants en considérant un intervalle de définition pour les variables aléatoires légèrement supérieur au domaine de variation souhaité.

Références

- [BER 04] BERVEILLER M., SUDRET B., LEMAIRE M., « Presentation of two methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis », *Proc. 9th ASCE specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, Albuquerque, USA, 2004.*
- [GHA 91] GHANEM R.-G., SPANOS P.-D., *Stochastic finite elements - A spectral approach*, Springer Verlag, 1991.
- [ISU 99] ISUKAPALLI S. S., « Uncertainty Analysis of Transport-Transformation Models », PhD thesis, The State University of New Jersey, 1999.
- [Sud 04] SUDRET B., BERVEILLER M., LEMAIRE M., « Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire », *C. R. mécanique*, vol. 332, 2004, p. 531-537.