



**HAL**  
open science

# Une approche lagrangienne stabilisée pour les problèmes de contact

Hachmi Ben Dhia, Chokri Zammali

► **To cite this version:**

Hachmi Ben Dhia, Chokri Zammali. Une approche lagrangienne stabilisée pour les problèmes de contact. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812912

**HAL Id: hal-01812912**

**<https://hal.science/hal-01812912v1>**

Submitted on 11 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Une approche lagrangienne stabilisée pour les problèmes de contact

**Hachmi Ben Dhia — Chokri Zammali**

*Laboratoire MSS-Mat (CNRS UMR 8579)*

*Ecole Centrale Paris*

*Grande voie des vignes*

*F-92295 Châtenay-Malabry Cedex*

*{bendhia,zammali}@mssmat.ecp.fr*

---

*RÉSUMÉ. En introduisant un champ de Signe (de type Level-Set), défini sur la zone potentielle de contact, les lois de contact sont écrites sous forme d'équations de type conditions aux limites. Cette nouvelle écriture permet de dériver une formulation lagrangienne faible-forte du problème de contact que l'on peut stabiliser aisément. La formulation stabilisée généralise celles lagrangienne et lagrangienne augmentée. Nous discutons l'intérêt de la stabilisation en statique et en dynamique et éclairons cette discussion par des exemples numériques.*

*ABSTRACT. By using Sign fields, of Level-Set type, contact laws are written merely as classical equalities boundary conditions. This allows us to derive easily weak Lagrangian formulations of contact problems based on weak equalities and to stabilize these formulations by using rather classical techniques. As a matter of fact, the stabilized formulation is shown to be a generalization of both the Lagrangian and (popular) augmented Lagrangian ones. Moreover, the consistency of the stabilization term is analyzed. The main practical endeavors of our developments are exemplified by numerical tests.*

*MOTS-CLÉS : Contact, Champs de Signe, Formulations lagrangiennes augmentées, Stabilisées*

*KEYWORDS: Contact, Level-Sets, Augmented Lagrangian formulations, Stabilisation*

---

## 1. Introduction

L'utilisation de la méthode lagrangienne augmentée pour le traitement des problèmes de contact unilatéral est très répandue [ALA 91, WRI 02]. Dans la littérature, ce choix est justifié par le fait que cette méthode :

- i) assure de manière (macroscopiquement) exacte les conditions de contact unilatéral,
- ii) est fondée sur l'optimisation sans contraintes d'un Lagrangien régulier ( $C^1$ ), contrairement au formalisme lagrangien classique [ALA 91, PIE 99],
- iii) ne perturbe pas, en discret, le conditionnement des systèmes à résoudre comme le font les méthodes de pénalisation/compliance (eg. [WRI 02]).

Le Lagrangien augmenté introduit un paramètre (dit d'augmentation) dont le choix optimal n'est pas simple ; de mauvais choix pouvant donner lieu à de mauvais conditionnements, à l'instar des méthodes de pénalisation. En outre, la formulation lagrangienne augmentée d'un problème de contact est équivalente à celle lagrangienne ; elle ne permet pas de retrouver cette dernière ; l'annulation du paramètre d'augmentation y étant impossible.

Dans ce papier, en partant d'une écriture en équations locales des lois de contact utilisant un champ de *Signe* (voir [BEN 88, BEN 00, BEN 04]), nous proposons une formulation lagrangienne stabilisée généralisant celle augmentée. La nouvelle approche permet de clarifier l'intérêt de l'augmentation et de dériver (par un simple choix de paramètres) soit la méthode lagrangienne classique ou celle augmentée. La pertinence du terme de stabilisation est discutée, puis illustrée par des exemples numériques.

## 2. Signorini en équations

Classiquement, les lois de contact de Signorini sont définies, sur la zone potentielle de contact  $\Gamma_c$  connue, comme suit :

$$d_n \leq 0 \quad , \quad \lambda \leq 0 \quad \text{et} \quad \lambda d_n = 0 \quad [1]$$

où  $d_n$  est la distance signée et  $\lambda$  est la pression de contact.

En introduisant le champ de *Signe*  $S$ , caractérisant la zone de contact effectif et défini par :

$$S = 1_{R^-}(\lambda - \rho d_n) \quad \text{sur} \quad \Gamma_c \quad [2]$$

où  $\rho$  est un réel strictement positif et  $1_{R^-}$  est l'indicatrice de  $R^-$ , les conditions [1] s'écrivent d'une manière équivalente comme suit :

$$S d_n = 0 \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma_c \quad [3]$$

$$(1 - S)\lambda = 0 \quad , \quad \text{sur} \quad \Gamma_c \quad [4]$$

Les équations [3] et [4], de type conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, respectivement, peuvent être regroupées en une seule, moyennant une homogénéisation par un paramètre  $h \neq 0$ . Ainsi, nous écrivons les conditions [1] sous forme d'équations :

$$Sd_n + \frac{1-S}{h}\lambda = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad [5]$$

$$S - 1_{R^-}(\lambda - \rho d_n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad [6]$$

### 3. Formulation lagrangienne stabilisée

La formulation du problème de contact (sans frottement et en quasi-statique) adossée à l'écriture [5-6] des lois de Signorini, consiste à trouver  $(u, \lambda, S)$  tel que, pour tout champ  $(w, \lambda^*)$  admissible,

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) - \int_{\Gamma_c} S\lambda[[w_n]]d\Gamma = 0 \quad [7]$$

$$-\frac{1}{h} \int_{\Gamma_c} [\lambda - S(\lambda - hd_n)]\lambda^*d\Gamma = 0 \quad [8]$$

$$S - 1_{R^-}(\lambda - \rho d_n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad [9]$$

où  $\mathbf{G}_{int}^i$  est le travail des efforts internes dans le solide  $S^i$  et où on n'a considéré que les seuls efforts de contact unilatéral.

La formulation précédente est purement lagrangienne, sans contraintes, continue, hybride et de nature faible-forte car le champ de *Signe* est défini localement sur la zone potentielle de contact.

Etant donné que, dans le cas d'un contact effectif ( $S = 1$ ), [8] assure de manière faible que  $d_n = 0$ , nous pouvons ajouter à [7] le terme :

$$\int_{\Gamma_c} S\kappa d_n[[w_n]]d\Gamma \quad [10]$$

Ce terme permet, pour  $\kappa > 0$ , de renforcer l'ellipticité du problème et d'éviter la singularité de la matrice de rigidité tangente en cas de présence de mouvements de corps rigides.

La formulation lagrangienne que nous qualifions de stabilisée est la suivante :

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i - \int_{\Gamma_c} S\lambda[[w_n]]d\Gamma + \int_{\Gamma_c} S\kappa d_n[[w_n]]d\Gamma = 0 \quad [11]$$

$$-\frac{1}{h} \int_{\Gamma_c} [\lambda - S(\lambda - hd_n)]\lambda^*d\Gamma = 0 \quad [12]$$

$$S - 1_{R^-}(\lambda - \rho d_n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad [13]$$

La différence, mince en apparence, mais néanmoins essentielle, entre cette formulation et celle lagrangienne augmentée classique se trouve dans la séparation entre le paramètre de stabilisation  $\kappa$  et celui d'homogénéisation  $h$ . Dans le cas où  $h = \rho = \kappa$ , on retrouve la formulation lagrangienne augmentée. Si  $\kappa = 0$  on obtient une formulation purement lagrangienne. La formulation [11-13] permet ainsi d'unifier en les étendant les deux méthodes ce qui est très pratique pour la mise en oeuvre dans un code de calcul.

REMARQUE. — La formulation lagrangienne augmentée au sens de Simo et Laursen [SIM 92] (voir aussi [SAX 91]) n'est pas exactement celle à laquelle nous référons dans ce travail [ALA 91, BEN 00, PIE 99]. Toutefois, nos conclusions restent valables.

REMARQUE. — Les lois de frottement peuvent être traitées de manière analogue, moyennant l'introduction d'un nouveau champ de Signe dont l'*iso-1* du produit avec le champ de Signe de contact caractérise la zone adhérente. En outre, la formulation lagrangienne du problème de contact frottant peut être stabilisée par la même procédure.

#### 4. Discrétisation

La formulation [11-13] est une formulation mixte (hybride). Sa discrétisation éléments finis doit respecter la condition *Inf-Sup* (condition de compatibilité entre espaces d'approximations des champs des déplacements et des pressions de contact). Pour certains choix compatibles, le degré d'espace d'interpolation EF des pressions de contact est inférieur à celui des traces sur  $\Gamma_c$  des déplacements. Il arrive même que l'on n'ait pas les mêmes maillages supports de discrétisations. Dans ces cas, le terme de stabilisation peut perturber la solution du problème non stabilisé. Par exemple, si le déplacement est approché par des éléments  $P_1$  et le multiplicateur de contact par des éléments  $P_0$ , le contact établi sur un élément  $e_{c_\lambda}$  du maillage supportant l'approximation des pressions, s'écrit :

$$\int_{e_{c_\lambda}} d_n^{h_u} \lambda^{*h_\lambda} = 0 \quad [14]$$

où  $h_u$  et  $h_\lambda$  réfèrent aux discrétisations en espace de  $u$  et  $\lambda$ , respectivement.

On note que l'équation [14] permet d'assurer seulement la nullité de  $d_n$  en moyenne sur l'élément  $e_{c_\lambda}$ . L'usage de l'équivalent discret du terme de stabilisation, défini par [10], perturberait alors la formulation discrète. Pour corriger ces perturbations incontrôlées, on propose de stabiliser le problème discret non pas par [10], mais plutôt par :

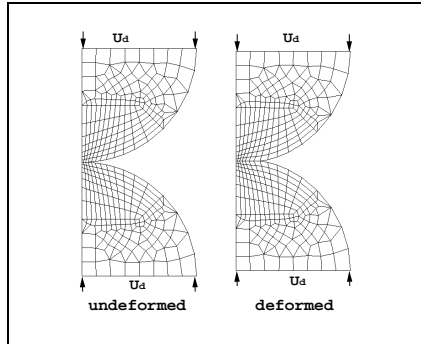
$$\int_{\Gamma_c} S\kappa P(d_n^{h_u})[[w_n^{h_u}]]d\Gamma \quad [15]$$

où  $P$  est un opérateur, permettant la restauration de la consistance du terme discret de stabilisation avec [14].

## 5. Exemples numériques

### 5.1. Influence de la stabilisation

Nous considérons le contact de Hertz entre deux sphères en axisymétrie (figure 1). Cet exemple est utilisé pour tester l'influence des différents paramètres de l'approche proposée sur la résolution du problème numérique.



**Figure 1.** Contact de Hertz

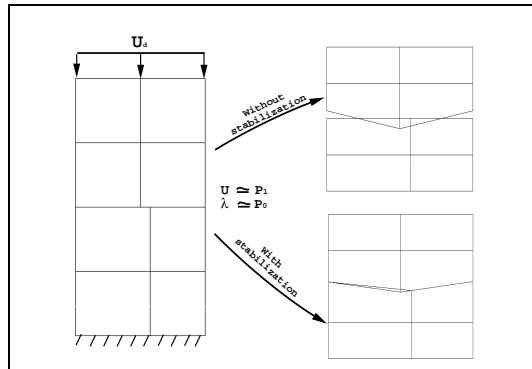
Dans le tableau 1, nous étudions l'influence du paramètre  $\kappa$  sur le nombre d'itérations supplémentaires par rapport à celui obtenu pour une approche purement lagrangienne. Nous remarquons que pour ce problème (ne nécessitant aucune stabilisation), l'ajout d'une stabilisation ( $\kappa > 0$ ) ne peut que détériorer les performances du cas sans stabilisation ( $\kappa = 0$ ). Les paramètres  $h$  et  $\rho$  n'ont pas d'influence dans ce cas.

$\kappa$	$[0 - 10^{11}]$	$5 \cdot 10^{11}$	$6 \cdot 10^{11}$	$10^{12}$
it. supp.	0	5	8	11

**Tableau 1.** Variation du nombre d'itérations en fonction de  $\kappa$ .

### 5.2. Maillages incompatibles

Le deuxième exemple étudie la consistance du terme de stabilisation. Nous considérons le patch-test dit de Taylor, avec maillages incompatibles (figure 2) où les déplacements sont approchés par des éléments  $P_1$  et le multiplicateur de contact par des éléments  $P_0$ . Nous avons calculé la solution avec et sans stabilisation. Nous constatons (figure 2) que le terme de stabilisation perturbe la solution numérique du problème sans stabilisation. Nous avons également mené des tests en dynamique. La stabilisation ne semble pas avoir un intérêt particulier dans ce régime.



**Figure 2.** *Patch-test avec ou sans stabilisation*

## 6. Conclusion

Nous avons introduit une formulation lagrangienne stabilisée pour les problèmes de contact. Cette formulation généralise celles lagrangienne et lagrangienne augmentée, unifiant ainsi les implémentations numériques. Nous avons en outre montré que les termes de stabilisation peuvent nécessiter une projection.

## 7. Bibliographie

- [ALA 91] ALART P., CURNIER A., « A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods », *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 92, 1991, p. 353-375.
- [BEN 88] BENDHIA H., « Modelling and solution by penalty duality method of unilateral contact problems », *Calcul des structures et intelligence artificielle*, vol. 2, 1988, p. 1-18.
- [BEN 00] BENDHIA H., VAUTIER I., ZARROUG M., « Problemes de contact frottant en grandes transformations : du continu au discret », *Revue europeenne des elements finis*, vol. 9, 2000, p. 243-261.
- [BEN 04] BENDHIA H., ZAMMALI C., « Level-Sets and Arlequin framework for dynamic contact problems », *Revue europeenne des elements finis*, vol. 13, 2004, p. 403-414.
- [PIE 99] PIETRZAK G., CURNIER A., « Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment », *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 177, 1999, p. 351-381.
- [SAX 91] SAXCÉ G. D., FENG Z.-Q., « New inequality and functional for contact and friction : the implicit standard material approach », *Int. J. Mech. Strc. Eng.*, vol. 9, 1991, p. 301-325.
- [SIM 92] SIMO J., LAURSEN T., « An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction », *Comp. Strc.*, vol. 42, 1992, p. 97-116.
- [WRI 02] WRIGGERS P., *Computational contact mechanics*, Wiley, 2002.