



HAL
open science

Utilisation des éléments bandes splines pour l'analyse des plaques composites épaisses

Georges Akhras, Wencheng Li

► **To cite this version:**

Georges Akhras, Wencheng Li. Utilisation des éléments bandes splines pour l'analyse des plaques composites épaisses. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812907

HAL Id: hal-01812907

<https://hal.science/hal-01812907v1>

Submitted on 11 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Utilisation des éléments bandes splines pour l'analyse des plaques composites épaisses

Georges Akhras et Wencheng Li

*Département de génie civil
Royal Military College of Canada
P.O. Box 17000, Stn Forces
Kingston, Ontario, Canada K7K 7B4
Tel (613)-541-6000 x 6388*

Akhras@rmc.ca

RESUME. Des éléments bandes avec splines sont développés pour analyser des plaques épaisses composites. Cette approche utilise une fonction cubique spline pour l'interpolation longitudinale et réussit à produire des résultats plus efficaces que la méthode des éléments finis. Elle a aussi l'avantage d'être plus flexible que la méthode classique d'éléments bandes pour l'analyse des plaques épaisses. L'élément bande proposé utilise trois nœuds par ligne longitudinale avec six degrés de liberté pour les nœuds aux extrémités et quatre pour le nœud du milieu. Pour la direction latérale, les déplacements dans le plan ainsi que les rotations normales sont représentées par une fonction d'interpolation quadratique, par contre les déflexions par une fonction hermitienne. Dans cette communication, nous nous proposons de présenter une étude comparative pour deux problèmes types linéaires statiques.

ABSTRACT. A spline finite strip method is developed for the analysis of thick composite plates. In using a cubic spline function for the longitudinal interpolation, this technique provides a more flexible approach than the classical finite band method and produces improved results over the finite element method. The proposed strip has three nodal lines with six degrees of freedom for the side nodal lines and four for the middle nodal line. In the lateral direction, a quadratic interpolation is adopted for the in plane displacements and normal rotations while a hermitian interpolation is employed for the deflection. In this paper, a comparative study of two typical linear static problems is presented.

Mots-clés: Plaques composites épaisses, élément de bande spline, interpolation cubique.

Keywords: Thick composite plates, spline band element, cubic interpolation.

1. Introduction

Pour les matériaux renforcés de fibres composites, la théorie classique des plaques minces et celle du premier ordre de la déformation de cisaillement engendrent souvent des erreurs inacceptables pour le calcul des déflexions et des contraintes des plaques épaisses ou modérément épaisses. Ceci est principalement dû à une description inadéquate du cisaillement en jeu. Développer des théories d'ordre supérieur pour mieux décrire le cisaillement et des approches numériques plus efficaces pour le calculer est devenu tout récemment un domaine très actif de recherche.

Parmi toutes ces théories, celle d'ordre supérieur de Reddy a eu beaucoup de succès grâce à sa simplicité et à son efficacité [1]. Cette théorie utilise le même nombre d'inconnues que la théorie du premier ordre mais produit des résultats satisfaisants pour plusieurs types de plaques laminées épaisses. Elle suppose que la distribution du cisaillement transversal de la plaque est parabolique. Cependant, elle n'assure pas la continuité des contraintes de cisaillement aux interfaces des différentes couches dans la direction de l'épaisseur de la plaque. Ceci peut parfois produire des résultats inadéquats particulièrement pour les laminés asymétriques. De plus, pour avoir des valeurs acceptables, les contraintes transversales sont souvent obtenues en intégrant les équations d'équilibre en élasticité. Ce processus est complexe et le calcul par éléments finis est laborieux dû au fait que les dérivées des contraintes devront aussi être calculées.

Ces difficultés peuvent être évitées en superposant une fonction linéaire en zigzag au champ cubique des déplacements tel que proposé par Cho et Parmentier dans la théorie des laminées zigzag d'ordre supérieur [2]. La variation cubique tient compte de la distribution parabolique de Reddy pour les déformations transversales de cisaillement tandis que la fonction zigzag représente la non-continuité des déformations due à la condition de continuité des contraintes. Les inconnues des différents plans sont exprimées en fonction de celles du plan médian après avoir imposé les conditions de continuités des contraintes de cisaillements inter-laminaires tout en s'assurant que le cisaillement est nul aux surfaces libres.

Ainsi, le nombre d'inconnues ne change pas mais une distribution continue des contraintes de cisaillement est garantie et les contraintes transversales de cisaillement peuvent être obtenues directement à partir des équations constitutives. De plus, la variation choisie des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque est exprimée explicitement en fonction des propriétés des matériaux et de l'épaisseur de la plaque tel que proposé par Shu et Sun [3]. En conséquences, un effort supplémentaire minimal de calcul est requis pour obtenir la solution.

Dans cette étude, une méthode de bande spline, basée sur l'approche zigzag d'ordre supérieur de Cho et Parmentier [2], est développée pour l'analyse statique des plaques composites.

2. Élément de bande spline

Les bandes proposées ont trois lignes nodales avec un nombre identique de nœuds (Figure 1). Le nœud sur la ligne nodale du bord a six degrés de liberté; quant au nœud de la ligne du centre, il a seulement quatre degrés de liberté. Cet arrangement a le même nombre de degrés de liberté que la méthode de bande spline basée sur la théorie du premier ordre [4]. Une interpolation quadratique est adoptée pour les déplacements et les rotations en plan tandis qu'une interpolation hermitienne est adoptée pour les déflexions. Avec cet arrangement consistant des fonctions d'interpolation pour les déformations de cisaillement transversale, on peut simuler efficacement une variation linéaire du moment fléchissant transversal en plan pour tous les types de laminés et par ce fait améliorer la convergence

La figure 1 montre la bande spline proposée. Elle est composée de trois lignes nodales équidistantes et définies par $i = 1, 2, 3$ respectivement. Dans la direction longitudinale, la bande est divisée en plusieurs sections de longueur identique H . Dans une section, les composantes des déplacements peuvent être interpolées à partir des paramètres de déplacements des 12 nœuds localisés sur les trois lignes nodales aux coordonnées $y = j H$ avec j égale à $-1, 0, 1, 2$ respectivement.

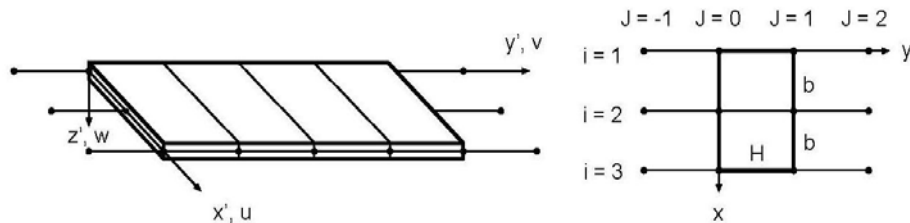


Figure 1 – Un élément de bande spline (à gauche) et une section (à droite)

La dérivation complète est présentée dans [5]. Dès que les fonctions des déplacements sont choisies, l'analyse se poursuit en suivant le processus standard généralement utilisé pour l'analyse des éléments bandes splines.

3. Exemples numériques

Dans les deux exemples suivants, les propriétés des laminés sont définies par $E_1 = 25.0E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$ et $\nu_{12} = 0.25$. Les indices 1 et 2 dénotent respectivement la direction de la fibre du plan médian et celle transversale à la fibre tandis que l'indice 3 réfère à la direction normale au plan médian. De plus, toutes les couches ont la même épaisseur.

3.1 Rectangle simplement supporté laminé (0/90/0 degré) soumis à une charge sinusoidale

Un rectangle laminé ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) de dimensions a dans la direction x et $b=3a$ dans la direction y , est simplement supporté sur les quatre côtés et soumis à une pression verticale sinusoidale, $p_z = P \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$. L'origine du système de coordonnées se trouve au coin inférieur gauche du plan médian. Seul le quart du rectangle est analysé à cause de la double symétrie. Pour chaque cas, une à quatre bandes spline proposées ont été utilisées avec un nombre de sections égal au nombre de bandes. Les déflexions et contraintes non dimensionnelles maximales sont listées dans la Table I en utilisant les abréviations suivantes:

$\bar{w} = 10^2 wh^3 E_2 / Pa^4$	à $(a/2, b/2, 0)$;	$\bar{\sigma}_4 = \tau_{yz} h / Pa$	à $(a/2, 0, 0)$
$\bar{\sigma}_1 = \sigma_x h^2 / Pa^2$	à $(a/2, b/2, h/2)$;	$\bar{\sigma}_5 = \tau_{zx} h / Pa$	à $(0, b/2, 0)$
$\bar{\sigma}_2 = \sigma_y h^2 / Pa^2$	à $(a/2, b/2, h/6)$;	$\bar{\sigma}_6 = \tau_{xy} h^2 / Pa^2$	à $(0, 0, h/2)$

Les résultats montrent que la convergence des solutions proposées par rapport à la théorie zigzag d'ordre supérieure est assez bonne (Théorie) [3]. On peut voir que la méthode proposée présente de meilleurs résultats que la théorie de cisaillement du premier ordre (Mindlin, avec des facteurs de corrections de $k_1^2 = k_2^2 = 5/6$).

a/h	MÉTHODE	\bar{w}	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}_4$	$\bar{\sigma}_5$	$\bar{\sigma}_6$
4	1×1 Section	2.781	1.399	0.117	0.0341	0.383	0.0281
	2×2 Sections	2.760	1.264	0.113	0.0286	0.377	0.0277
	3×3 Sections	2.757	1.232	0.111	0.0284	0.377	0.0277
	4×4 Sections	2.757	1.220	0.109	0.0285	0.377	0.0277
	Théorie	2.762	1.135	-	-	0.377	0.0277
	Élasticité	2.82	1.10	0.119	0.0334	0.387	0.0281
	Reddy	2.641	1.036	0.1028	0.0348	0.272	0.0263
	Mindlin	2.363	0.613	0.0934	0.0308	0.188	0.0205
10	1×1 Section	0.926	0.848	0.0469	0.0186	0.426	0.0126
	2×2 Sections	0.920	0.766	0.0442	0.0142	0.436	0.0122
	3×3 Sections	0.920	0.747	0.0429	0.0142	0.434	0.0122
	4×4 Sections	0.920	0.740	0.0425	0.0142	0.436	0.0122
	Théorie	0.920	0.730	-	-	0.435	0.0122
	Élasticité	0.919	0.725	0.0299	0.0152	0.420	0.0123
	Reddy	0.862	0.692	0.0289	0.0170	0.286	0.0115
	Mindlin	0.803	0.621	0.0283	0.0159	0.189	0.0105
100	1×1 Section	0.510	0.726	0.0287	0.0141	0.463	0.0086
	2×2 Sections	0.508	0.655	0.0267	0.0107	0.450	0.0083
	3×3 Sections	0.508	0.638	0.0259	0.0107	0.449	0.0083

4 × 4 Sections	0.508	0.632	0.0256	0.0106	0.449	0.0083
Théorie	0.508	0.624	-	-	0.448	0.0083
Élasticité	0.508	0.624	0.0253	0.0108	0.439	0.0083
Reddy	0.507	0.624	0.0253	0.0129	0.289	0.0083
Mindlin	0.506	0.623	0.0253	0.0127	0.190	0.0083
Théorie plaque mince	0.503	0.623	0.0252	-	-	0.0083

Table 1 – *Déflexions & contraintes non dimensionnelles pour laminés simplement supportés (0/90/0)*

Notre solution présente aussi de meilleurs résultats que la théorie de déformation d'ordre supérieur de Reddy [1] en comparaison avec la solution de la théorie d'élasticité tridimensionnelle (Élasticité) obtenue par Pagano [6], particulièrement pour les déflexions et les contraintes de cisaillement transversal pour plaques épaisses ($a/h = 4$) et modérément épaisses ($a/h = 10$).

3.2 Carré laminé simplement supporté soumis à une charge sinusoïdale

Un carré laminé simplement supporté de côté a avec couches orientées à 45° et -45° alternativement, est soumis à une charge sinusoïdale appliquée comme dans l'exemple 1. Les rotations normales sur les côtés sont libres. La déflexion et seuls les déplacements dans la direction normale en plan sont fixes sur chaque côté des laminés antisymétriques (avec un nombre pair de couche) tandis que la déflexion et tous les déplacements en plan sont fixes sur chaque côté du laminé symétrique (avec un nombre impair de couches). Ces conditions aux limites sont similaires à celles imposées par Pagano dans son analyse élastique des couches laminés [7].

Dans cette étude, le laminé entier est modélisé par huit des bandes proposées et huit sections splines. Nous avons trouvé que des modèles plus raffinés ne représentent que des améliorations mineures à la solution. Les déflexions non dimensionnelles du centre sont listées dans la Table II ainsi que les solutions obtenues en utilisant la méthode des éléments finis basée sur la théorie tridimensionnelle de l'élasticité (3D FEM) et celles de la déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin (Mindlin FSM) [8] et d'ordre supérieur de Reddy (Reddy FSM) [9].

4. Bibliographie

- [1] REDDY, J. N., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Volume 51, 1984, 745-752
- [2] CHO M. and PARMENTIER, R.R. "Efficient Higher Order Composite Plate Theory for General Lamination Configurations", *AIAA Journal*, Volume 31, 1993, 1299-1306
- [3] SHU X. and SUN L., "An Improved Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", *Computers & Structures*, Volume 50, 1994, 231-236

- [4] DAWE D. J., "Use of the Finite Strip Method in Predicting the Behaviors of Composite Laminated Structures", *Composite Structures*, Vol. 57, 2002, 11-36.
- [5] AKHRAS G. and LI W., "Spline finite strip analysis of composite plates based on higher-order zigzag composite plate theory", à paraître.
- [6] PAGANO N.J., "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates", *Journal of Composite Materials*, Volume 4, 1970; 20-34.
- [7] PAGANO N. J., "Influence of Shear Coupling in Cylindrical Bending of Anisotropic Laminates", *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, 1970, 330-343.
- [8] AKHRAS G., CHEUNG M. S. and LI W., "Static and Vibration Analysis of Anisotropic Composite Laminates by Finite Strip Method", *International Journal of Solids and Structures*, Volume 30, 1993, 3129-3137.
- [9] AKHRAS G., CHEUNG M. S. and LI W., "Finite Strip Analysis of Anisotropic Laminated Composite Plates using Higher-Order Shear Deformation Theory", *Computers & Structures*, Volume 52, 1994, 471-477.

a/h	MÉTHODE	$\bar{w} = 10^2 wh^3 E_2 / Pa^4$				
		Couches symétrique			Couches antisymétrique	
		3 Couches	5 Couches	7 Couches	4 Couches	8 Couches
4	Proposée	1.8242	1.8158	1.7612	1.7509	1.7117
	3D FEM	1.9735	1.8651	1.7910	1.8509	1.7100
	Reddy FSM	1.8980	1.5945	1.5125	1.5282	1.4481
	Mindlin FSM	1.8085	1.5650	1.5267	1.5369	1.5028
10	Proposée	0.7383	0.6268	0.5938	0.6284	0.5765
	3D FEM	0.7515	0.6345	0.5974	0.6318	0.5513
	Reddy FSM	0.7204	0.5673	0.5385	0.5690	0.5245
	Mindlin FSM	0.6883	0.5558	0.5344	0.5610	0.5254
20	Proposée	0.5086	0.3984	0.3751	0.4077	0.3655
	3D FEM	0.5116	0.4009	0.3751	0.4043	0.3537
	Reddy FSM	0.5023	0.3779	0.3564	0.3873	0.3481
	Mindlin FSM	0.4933	0.3739	0.3548	0.3844	0.3481
100	Proposée	0.3972	0.2845	0.2654	0.2950	0.2585
	3D FEM	0.3908	0.2829	0.2612	0.2958	0.2585
	Reddy FSM	0.3970	0.2820	0.2631	0.2918	0.2563
	Mindlin FSM	0.3995	0.2837	0.2649	0.2936	0.2581

Table II - Déflexions non dimensionnelles au centre d'un laminé (45/-45...) simplement supporté