



HAL
open science

Identification de modèles probabilistes non paramétriques. Application en interaction dynamique sol-structure

Maarten Arnst, Didier Clouteau, Marc Bonnet, Geert Degrande

► **To cite this version:**

Maarten Arnst, Didier Clouteau, Marc Bonnet, Geert Degrande. Identification de modèles probabilistes non paramétriques. Application en interaction dynamique sol-structure. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812904

HAL Id: hal-01812904

<https://hal.science/hal-01812904v1>

Submitted on 11 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Identification de modèles probabilistes non paramétriques

Application en interaction dynamique sol-structure

M. Arnst* — D. Clouteau* — M. Bonnet** — G. Degrande***

* *Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, École Centrale Paris
Grande Voie des Vignes, F-92295 Châtenay-Malabry Cedex*

{arnst,clouteau}@mssmat.ecp.fr

** *Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex*

marc.bonnet@polytechnique.fr

*** *Department of Civil Engineering, K.U.Leuven
Kasteelpark Arenberg 40, B-3001 Heverlee*

geert.degrande@bwk.kuleuven.ac.be

RÉSUMÉ. Une méthode est proposée pour l'identification du modèle probabiliste non paramétrique, introduit par Soize, à partir d'un ensemble bruité de fonctions de réponse en fréquence expérimentales. Deux estimateurs fondés sur la formulation probabiliste des problèmes inverses sont proposés. Le premier est un estimateur de maximum de log-vraisemblance et le deuxième est fondé sur la minimisation de l'entropie relative. L'application à un cas réel en interaction dynamique sol-structure montre la pertinence des estimateurs pour l'identification des paramètres de dispersion du modèle probabiliste non paramétrique.

ABSTRACT. A methodology is proposed for the identification of the parameters of the non parametric probabilistic model, introduced by Soize, from a noisy set of experimental frequency response functions. Two estimators are proposed based on the probabilistic formulation of inverse problems. The first is a maximum log-likelihood estimator and the second is based on the minimisation of the relative entropy. A case history in dynamic soil-structure interaction demonstrates the relevance of the estimators for the estimation of the dispersion parameters of the non parametric probabilistic model.

MOTS-CLÉS : modèle non paramétrique, identification, inférence Bayésienne, maximum de vraisemblance, entropie relative, divergence de Kullback-Leibler

KEYWORDS: non parametric model, identification, Bayesian inference, maximum likelihood, relative entropy, Kullback-Leibler divergence

1. Introduction

La modélisation mécanique d'une structure complexe est généralement soumise à deux types d'incertitude. Le premier type correspond aux incertitudes sur les valeurs des paramètres qui définissent le modèle, qu'il s'agisse de la géométrie, des caractéristiques mécaniques des matériaux constituant ou encore des forces ou des déplacements imposés comme conditions aux limites. Elles proviennent d'une méconnaissance du problème considéré. Le second type regroupe l'ensemble des erreurs de modélisation (inhérentes au modèle). Toutes ces incertitudes ont pour conséquence une incertitude sur la réponse qu'il est essentiel de quantifier.

Les incertitudes sont ici prises en compte dans l'analyse en utilisant le modèle probabiliste non paramétrique développé par Soize [SOI 01]. La réponse d'un tel modèle correspond à un processus stochastique dont le système de lois marginales permet de mesurer la propagation des incertitudes sur la réponse. Ce modèle est décrit à l'aide de matrices réduites d'un modèle moyen et d'un petit nombre de paramètres scalaires de dispersion.

Dans le cadre de cette communication, une méthode est développée pour identifier la valeur de ces paramètres à partir de données expérimentales bruitées, notamment à partir d'un ensemble de fonctions de réponse en fréquence (FRFs) mesurées. Deux estimateurs sont proposés et leur pertinence est étudiée au travers de l'application à un cas réel en interaction dynamique sol-structure.

2. Le modèle probabiliste non paramétrique

Dans cette section, la construction du modèle probabiliste non paramétrique est brièvement rappelée. Ce modèle est élaboré à partir d'un modèle déterministe réduit, écrit ici sous la forme suivante :

$$[Z(A, \omega)] \mathbf{q}(\omega) = \mathbf{f}(\omega), \mathbf{u}(\omega) = [S] \mathbf{q}(\omega), \omega \in B \quad (1)$$

La pulsation est notée ω et appartient à l'intervalle B . $Z(A, \omega)$ désigne la matrice de raideur dynamique réduite où A représente génériquement les matrices réduites (usuellement de masse, de raideur et d'amortissement). \mathbf{f} et \mathbf{q} sont les vecteurs des \tilde{m} forces et coordonnées généralisées, respectivement, à valeurs dans $\mathbb{C}^{\tilde{m}}$. \mathbf{u} est le vecteur des m degrés de liberté (DDLs) à valeurs dans \mathbb{C}^m . S est la matrice de passage associée à la base de réduction. Ce modèle permet de définir l'ensemble des FRFs $\{H_{jk}(A, \omega)\}$ d'une excitation appliquée au DDL j à la réponse au DDL k .

Le modèle probabiliste non paramétrique est obtenu en remplaçant les matrices réduites A par des matrices aléatoires \mathbf{A} :

$$[Z(\mathbf{A}, \omega)] \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{f}(\omega), \mathbf{U}(\omega) = [S] \mathbf{Q}(\omega), \omega \in B \quad (2)$$

où $\mathbf{Q}(\omega)$ et $\mathbf{U}(\omega)$ sont des processus stochastiques du second ordre indexés sur B à valeurs dans $\mathbb{C}^{\tilde{m}}$ et \mathbb{C}^m , respectivement.

La mesure de probabilité des matrices aléatoires est dérivée par Soize [SOI 01] du principe du maximum d'entropie et est paramétrée par les valeurs des matrices réduites moyennes \underline{A} et les paramètres δ qui contrôlent la dispersion.

Le modèle probabiliste définit l'ensemble des FRFs aléatoires $\{\mathbf{H}_{jk}(\mathbf{A}, \omega)\}$. Ce sont des processus stochastiques définies sur B à valeurs dans \mathbb{C} . Pour toute pulsation ω_ℓ fixée dans B , $\mathbf{H}_{jk}(\mathbf{A}, \omega_\ell)$ est une variable aléatoire du second ordre à valeurs dans \mathbb{C} . Sa loi de probabilité admet une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} , notée $\theta^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell | \underline{A}, \delta)$.

3. L'information expérimentale

On considère le cas où les données expérimentales concernent les valeurs d'un ensemble de FRFs de la structure, indexées par les couples $\{(j, k)\}$, échantillonnées sur l'ensemble de pulsations discrètes $\{\omega_\ell\} \subset B$. Les valeurs de ces FRFs ne sont pas directement accessibles aux expériences. L'inévitable bruit expérimental ajoute une composante aléatoire aux mesures. Afin de réduire l'influence du bruit, n réalisations de chaque FRF sont mesurées.

On suppose le bruit additif, aléatoire, gaussien et centré. Les réalisations des FRFs expérimentales sont alors des trajectoires des processus stochastiques $\{\mathbf{Y}_{jk}(\omega)\}$ telles que :

$$\mathbf{Y}_{jk}(\omega) = \tilde{\mathbf{H}}_{jk}(\omega) + \mathbf{E}_{jk}(\omega), \omega \in B \quad (3)$$

où le processus stochastique $\mathbf{Y}_{jk}(\omega)$ est la FRF expérimentale aléatoire d'une excitation au DDL j à la réponse au DDL k , la fonction $\tilde{\mathbf{H}}_{jk}(\omega)$ est la FRF de la structure correspondante et le processus stochastique $\mathbf{E}_{jk}(\omega)$ représente le bruit.

Les valeurs moyennes, notées $\{\hat{m}_Y^{jk}(\omega_\ell)\}$, et les écarts types, notés $\{\hat{\sigma}_Y^{jk}(\omega_\ell)\}$, des variables aléatoires $\{\mathbf{Y}_{jk}(\omega_\ell)\}$ du second ordre à valeurs dans \mathbb{C} sont estimés des données.

L'estimateur de la moyenne $\hat{m}_Y^{jk}(\omega_\ell)$ est un estimateur de la valeur de la FRF de la structure $\tilde{\mathbf{H}}_{jk}(\omega_\ell)$ et $\hat{\sigma}_Y^{jk}(\omega_\ell)/\sqrt{n}$ est une estimation de son écart type. On ne considère que l'information contenue dans ces moments d'ordre 1 et 2 et on suppose que l'information expérimentale sur les valeurs des FRFs de la structure peut être représentée par les densités de probabilité $\{\rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell)\}$, définies par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} , telles que :

$$\rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell) = N(H_{jk} | \hat{m}_Y^{jk}(\omega_\ell), \frac{\hat{\sigma}_Y^{jk}(\omega_\ell)}{\sqrt{n}}) \quad (4)$$

où $N(\cdot | a, b)$ est la densité de probabilité gaussienne correspondante à la moyenne a et à l'écart type b .

4. Identification

Deux estimateurs sont proposés afin d'estimer les paramètres \underline{A} et δ du modèle probabiliste non paramétrique à partir de l'information expérimentale contenue dans les densités de probabilités $\{\rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell)\}$.

4.1. Estimateur de maximum de log-vraisemblance

Le premier estimateur est un estimateur de maximum de log-vraisemblance fondé sur la formulation probabiliste des problèmes inverses proposée par Tarantola [TAR 04]. Il maximise la fonction coût $L(\underline{A}, \delta)$:

$$L(\underline{A}, \delta) = \sum_{\ell} \sum_{(j,k)} \ln \int_{\Omega_H^{jk\ell}} \rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell) \theta^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell | \underline{A}, \delta) d\eta_H^{jk\ell}(H_{jk}) \quad (5)$$

où $\Omega_H^{jk\ell} \subset \mathbb{C}$ est l'image de Ω_A , l'espace des valeurs possible des matrices réduites A , par la fonction $A \mapsto H_{jk}(A, \omega_\ell)$ et $\eta_H^{jk\ell}(H_{jk})$ est l'équivalent de la mesure de Lebesgue sur $\Omega_H^{jk\ell}$.

Cet estimateur identifie le modèle le plus probable, défini comme le modèle probabiliste qui maximise la probabilité des données expérimentales, c'est-à-dire celui dont les densités de probabilités $\{\rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell)\}$ accordent des probabilités importantes aux éléments des espaces $\{\Omega_H^{jk\ell}\}$ où les densités de probabilités $\{\theta^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell | \underline{A}, \delta)\}$ sont maximales.

Cet estimateur est robuste par rapport au bruit au sens où il est moins sensible à la présence de valeurs expérimentales de FRFs entachées d'un bruit excédant nettement le bruit expérimental moyen.

4.2. Estimateur de minimum d'entropie relative

Le second estimateur est fondé sur la minimisation d'entropie relative. Il minimise la fonction coût $D(\underline{A}, \delta)$:

$$D(\underline{A}, \delta) = \sum_{\ell} \sum_{(j,k)} \int_{\Omega_H^{jk\ell}} C_{jkl} \rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell) \ln \frac{C_{jkl} \rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell)}{C'_{jkl} \varphi^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell | \underline{A}, \delta)} d\eta_H^{jk\ell}(H_{jk}) \quad (6)$$

où $\varphi^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell | \underline{A}, \delta)$ est donnée par :

$$\varphi^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell | \underline{A}, \delta) = \int_{\Omega_H^{jk\ell}} \theta^{jk}(h, \omega_\ell | \underline{A}, \delta) N(h - H_{jk} | 0, \frac{\hat{\sigma}_Y^{jk}(\omega_\ell)}{\sqrt{n}}) d\eta_H^{jk\ell}(h) \quad (7)$$

et où $\{C_{jkl}\}$ et $\{C'_{jkl}\}$ sont des constantes de normalisation.

Chaque terme de l'équation (6) est l'entropie relative entre les densités de probabilité $C_{jkl}\rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell)$ et $C'_{jkl}\varphi^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell | \underline{A}, \delta)$ indexées par (j, k) et est une mesure de la distance (orientée) entre ces densités de probabilité. Cet estimateur identifie le modèle probabiliste minimisant la distance entre les densités de probabilités $\{C_{jkl}\rho^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell)\}$ et les densités de probabilité $\{C'_{jkl}\varphi^{jk}(H_{jk}, \omega_\ell | \underline{A}, \delta)\}$, représentant la combinaison de l'incertitude sur la réponse du modèle probabiliste et le même type d'incertitude que celle sur les meilleures estimations des valeurs des FRFs de la structure due au bruit.

Il est robuste par rapport au bruit dans le même sens que le premier estimateur.

5. Application en interaction dynamique sol-structure

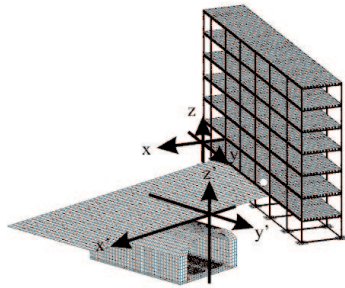


Figure 1. Schéma du site de la "Cité Universitaire".

On considère un modèle de prévision pour la transmission des vibrations du tunnel de la ligne RER B de la RATP à la "Maison du Mexique", un bâtiment d'appartements proche de la ligne situé sur le site de la "Cité Universitaire" à Paris. Il s'agit d'un modèle matriciel réduit construit dans le cadre du projet Européen CONVURT et fondé sur un couplage éléments finis-éléments finis de frontière (EF-EFF) périodique pour l'interaction tunnel-sol et EF-EFF classique pour l'interaction sol-bâtiment. La figure 1 montre un schéma de ce site.

Les réponses à différents points dans le bâtiment dues à une force verticale appliquée au rail dans le tunnel ont été observées *in situ*. Pour le DDL vertical dans le point FOPL au milieu d'une plaque au rez-de-chaussée, indiqué sur la figure 1, la figure 2a compare la réponse prédite par le modèle avec le domaine de confiance associé à la densité de probabilité de l'information expérimentale.

Afin de quantifier l'incertitude sur les prévisions liée aux erreurs de modélisations associées au modèle du bâtiment, un modèle non paramétrique est construit associé au modèle de prévision en substituant des matrices aléatoires aux matrices réduites de rigidité et de masse du bâtiment [ARN 04]. Leurs valeurs moyennes sont choisies égales à celles du modèle déterministe et leur dispersion est contrôlée par un unique paramètre δ . La figure 2b montre les enveloppes du domaine de confiance pour les FRFs aléatoires déterminé par ce modèle probabiliste en fonction de δ .

Le paramètre δ est ensuite identifié par la méthode proposée en ne considérant ici que ce DDL. Les figures 3a et 3b montrent les fonctions coût des deux estimateurs. La même valeur $\delta = 0.3$ est identifiée par les deux estimateurs.

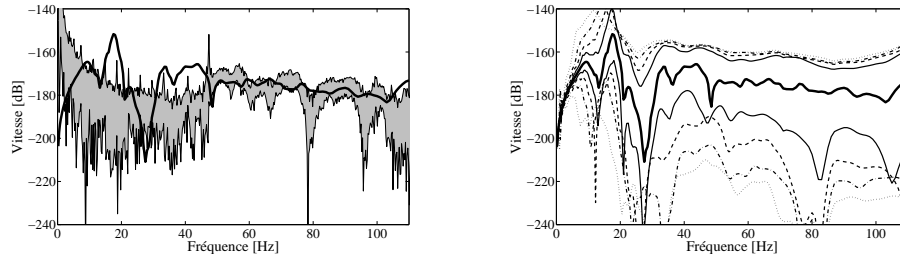


Figure 2. (A gauche) le domaine de confiance ($P_c = 0.95$) de l'information expérimentale (zone grise, traits maigres) et FRF déterministe (trait épais) et (à droite) les domaines de confiance ($P_c = 0.95$) des FRFs aléatoires pour $\delta = 0$ (trait très épais), $\delta = 0.2$ (traits), $\delta = 0.4$ (tirets), $\delta = 0.6$ (points et tirets) et $\delta = 0.8$ (pointillé).



Figure 3. (A gauche) Log-vraisemblance et (à droite) divergence en fonction de δ .

6. Conclusions

Dans cette communication, il a été montré comment les paramètres du modèle probabiliste non paramétrique peuvent être identifiés à partir d'un ensemble de FRFs expérimentales, en prenant en compte les incertitudes expérimentales dues au bruit. L'application à un cas réel a montré la pertinence de la méthode pour l'identification des paramètres de dispersion de modèles probabilistes non paramétriques.

7. Bibliographie

- [ARN 04] ARNST M., CLOUTEAU D., CHEBLI H., OTHMAN R., DEGRANDE G., « A non-parametric probabilistic model for ground-borne structural vibration due to excitations in a tunnel. », *ISMA2004 International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Leuven, September 2004.
- [SOI 01] SOIZE C., « Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics », *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, n° 5, 2001, p. 1979-1996.
- [TAR 04] TARANTOLA A., *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, SIAM, 2004.