



**HAL**  
open science

## Transfert de champs par approximation diffuse avec conservation de l'énergie

Delphine Brancherie, Pierre Villon, Adna Ibrahimbegovic, Alain Rassineux,  
Piotr Breitkopf

► **To cite this version:**

Delphine Brancherie, Pierre Villon, Adna Ibrahimbegovic, Alain Rassineux, Piotr Breitkopf. Transfert de champs par approximation diffuse avec conservation de l'énergie. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812899

**HAL Id: hal-01812899**

**<https://hal.science/hal-01812899>**

Submitted on 11 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Transfert de champs par approximation diffuse avec conservation de l'énergie

**Delphine Brancherie\*** — **Pierre Villon\*** — **Adnan Ibrahimbegović\*\***  
— **Alain Rassineux\*** — **Piotr Breilkopf\*\***

\* *Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne  
BP 60319 60203 Compiègne Cedex, France  
delphine.brancherie@utc.fr*

\*\* *Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS de Cachan  
CNRS/Université Pierre et Marie Curie  
61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex*

---

*RÉSUMÉ. Dans ce travail nous proposons un opérateur de transfert de champs construit à partir des techniques d'approximation diffuse. L'opérateur est développé pour des matériaux élasto-endommageables en petites perturbations. Le point clé de l'opérateur proposé est d'assurer la conservation de l'énergie entre l'ancienne et la nouvelle discrétisation.*

*ABSTRACT. In this work, we present a field transfer operator based on diffuse approximation. The operator is developed for damage materials in small deformations. The key point of the proposed operator is to ensure the conservation of energy between the old and the new discretization.*

*MOTS-CLÉS : technique de remaillage, opérateur de transfert de champs, approximation diffuse, matériau endommageable*

*KEYWORDS: remeshing technique, field transfer operator, diffuse approximation, damage material*

---

## 1. Introduction

Pour une large classe de problèmes (mise en forme, localisation des déformations, propagation de fissures, ...), la prédictivité de la simulation numérique impose des remaillages du domaine de calcul de façon à rendre la discrétisation EF optimale vis-à-vis de la description de la solution. La mise en œuvre de telles techniques de calcul adaptatif nécessite le développement d'opérateurs de transfert de champs permettant la reprise de la simulation sur un nouveau maillage. La qualité du transfert de champs repose sur plusieurs points [PER 96] dont, en particulier, la conservation de l'équilibre et l'admissibilité des contraintes. Il peut également être important de conserver des quantités énergétiques. C'est notamment le cas pour l'utilisation de critères en énergie pour la propagation de fissure ou encore pour le suivi de la dissipation dans une structure jusqu'à sa ruine. Ainsi, le travail présenté ici propose un opérateur de transfert permettant d'imposer l'admissibilité des contraintes, l'équilibre local et la conservation de grandeurs énergétiques relatives à l'état de la structure telles que l'énergie de déformation et l'énergie dissipée au cours du chargement. Cet opérateur est construit à partir de l'approximation diffuse [BRE 02] et est mis en œuvre pour un matériau élasto-endommageable dans le cadre des petites perturbations.

## 2. Modèle continu élasto-endommageable

Afin de présenter et d'illustrer la démarche de transfert, nous nous appuyons sur un modèle d'endommagement isotrope [MAZ 84]. Les points clés de l'écriture d'un tel modèle sont consignés dans le tableau 1. Le modèle est écrit de façon parfaitement parallèle aux modèles de plasticité classique [BRA 04]. Les variables internes du modèle sont le tenseur de compliance du matériau  $\bar{\mathbf{D}}$  ( $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{C}^{-1}$  où  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité éventuellement endommagé) et la variable d'écrouissage  $\bar{\xi}$ .

Modèle constitutif	
Variables d'état/associées	$(\bar{\varepsilon}, \sigma), (\bar{\mathbf{D}}, \mathbf{Y}), (\bar{\xi}, \bar{q})$
Énergie libre de Helmholtz	$\bar{\psi}(\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} : \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\varepsilon} + \bar{\Xi}(\bar{\xi})$
Fonction seuil	$\bar{\phi}(\sigma, \bar{q}) = \underbrace{\sqrt{\sigma : \mathbf{D}^e : \sigma}}_{\ \sigma\ _{\mathbf{D}^e}} - \frac{1}{\sqrt{E}} (\bar{\sigma}_f - \bar{q}) \leq 0$
Équations d'état	$\sigma = \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \bar{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \bar{q} = -\frac{d}{d\bar{\xi}} \bar{\Xi}(\bar{\xi})$
Equations d'évolution	
Dissipation	$0 < \mathcal{D} = \frac{1}{2} \dot{\bar{\varepsilon}} : \bar{\mathbf{D}}^{-1} : \dot{\bar{\varepsilon}} + \dot{\bar{q}} \bar{\xi}$
Évolution des variables internes	$\dot{\bar{\mathbf{D}}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} \frac{1}{\ \sigma\ _{\mathbf{D}^e}} ; \quad \dot{\bar{\xi}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{q}}$

**Tableau 1.** *Modèle élasto-endommageable*

$\bar{\mathbf{Y}}$  note ici la force thermodynamique associée à  $\bar{\mathbf{D}}$ . On a dans le cas traité ici :  $\bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2} \sigma \otimes \sigma$ .  $\dot{\gamma}$  note ici le multiplicateur de Lagrange. Vu la fonction seuil utili-

sée, l'expression de la compliance peut s'obtenir directement à partir de la valeur de la variable d'écroutissage  $\bar{\xi}$ .

### 3. Opérateur de transfert de champs

L'opérateur de transfert de champs proposé ici se décompose en trois étapes qui découlent du cahier des charges de conservation de l'énergie :

- une première étape consiste à reconstruire l'état d'endommagement de la structure en transférant les variables internes ;
- une deuxième étape consiste à reconstruire le champ de contrainte en imposant l'admissibilité ( $\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}) \leq 0$ ) ;
- enfin, la troisième étape consiste à reconstruire le champ de déplacement en respectant les conditions aux limites.

Le point clé de l'opérateur proposé ici est de conserver l'énergie dissipée. Par ailleurs, l'équilibre local et l'admissibilité des contraintes sont également imposés. Dans la suite, nous présentons plus précisément les trois étapes du transfert.

#### 3.1. Transfert des variables internes

La première étape du transfert de champs consiste à transférer, par approximation diffuse, la variable d'endommagement  $\xi$  et son incrément  $\Delta\xi$ . Le problème posé ici est de reconstruire un champ de variable scalaire - que nous noterons de façon générique  $v$  - sur la nouvelle discrétisation à partir du champ discret disponible sur l'ancien maillage. Le champ scalaire  $v$  est décomposé sur une base polynomiale (de degré a priori quelconque, ici de degré 1) :

$$v = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T \mathbf{a} \quad (1)$$

Le champ reconstruit sur la nouvelle discrétisation est obtenu comme la solution d'un problème d'optimisation sous la forme :

$$\min_{\mathbf{a}} J_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) \quad \text{avec} \quad J_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in V} W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \|v^{\text{new}}(\mathbf{x}_i) - v^{\text{old}}(\mathbf{x}_i)\|^2 \quad (2)$$

$V$  désigne ici un voisinage du point  $\mathbf{x}$  où est réalisée l'approximation.  $v^{\text{old}}$  et  $v^{\text{new}}$  désignent respectivement les champs sur l'ancien et le nouveau maillage. Les  $\mathbf{x}_i$  correspondent aux points de l'ancien maillage où  $v^{\text{old}}$  est connu. Enfin, la fonction  $W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$  correspond à une fonction poids valant 1 en  $\mathbf{x}$  et 0 en dehors de  $V$ .

Afin de limiter la diffusion numérique, les valeurs transférées de  $\bar{\xi}$  et  $\Delta\bar{\xi}$  sont considérées comme nulles lorsqu'elles sont inférieures à un seuil défini à partir des

valeurs moyennes sur l'ancien maillage. Les valeurs de  $\bar{\xi}$  et  $\Delta\bar{\xi}$  peuvent alors être re-normalisées de façon à assurer la conservation des énergies dissipées totale et instantanée. A l'issue de cette première étape du transfert, les champs de variables internes  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$  ainsi que l'incrément  $\Delta\bar{\xi}$  sont connus sur tous les points de Gauss de la nouvelle discrétisation.

### 3.2. Transfert des contraintes

À partir de  $\Delta\bar{\xi}$ , deux zones de la structure peuvent être définies, les zones pour lesquelles :

- l'état d'endommagement n'évolue pas :  $\Delta\bar{\xi} = 0$  et  $\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}) \leq 0$  ;
- l'état d'endommagement évolue :  $\Delta\bar{\xi} \neq 0$  et  $\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}) = 0$ .

Le transfert des contraintes sera traité différemment sur chacune des deux zones.

#### 3.2.1. Transfert dans la zone s'endommageant

Le transfert des contraintes est ici réalisé de façon à respecter l'équilibre local et l'admissibilité des contraintes. Le champ de contrainte est approximé par des polynômes linéaires et s'écrit, en tenant compte de l'équation d'équilibre local  $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ , sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{new}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -y & 0 & 0 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\theta} \quad (3)$$

où  $\boldsymbol{\theta}$  est un vecteur réel de dimension 7.  $x$  et  $y$  notent ici les coordonnées dans le repère centré sur  $\mathbf{x}$ . L'admissibilité des contraintes  $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^e} = \frac{1}{\sqrt{E}}(\bar{\sigma}_f + \bar{K}\bar{\xi})$  peut alors être réécrite sous la forme  $\boldsymbol{\theta}^T \mathcal{C} \boldsymbol{\theta} = 1$ . Le champ de contrainte reconstruit sur le nouveau maillage est alors obtenu comme solution du problème d'optimisation quadratique sous contrainte quadratique (voir [VIL 02]) :

$$\min_{\boldsymbol{\theta}^T \mathcal{C} \boldsymbol{\theta} = 1} J_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\theta}) \text{ avec } J_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbf{V}} W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \|\boldsymbol{\sigma}^{\text{new}}(\mathbf{x}_i) - \boldsymbol{\sigma}^{\text{old}}(\mathbf{x}_i)\|_{L^2}^2 \quad (4)$$

#### 3.2.2. Transfert dans la zone ne s'endommageant pas

Dans cette zone, la reconstruction du champ de contrainte se décompose en trois étapes. La première étape consiste à reconstruire par projection approximation diffuse un champ de contrainte vérifiant l'équation d'équilibre local. Après renormalisation du champ ainsi obtenu afin d'assurer la conservation de l'énergie de déformation, le

critère d'admissibilité est testé. Rien ne garantissant que ce dernier soit effectivement vérifié, une correction peut être nécessaire de façon à assurer en tout point  $\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}) \leq 0$ . Ceci est réalisé par la mise en place d'un automate cellulaire. L'automate permet, par une série de charges/décharges élastiques à énergie de déformation constante sur un patch d'éléments, d'assurer l'admissibilité.

### 3.3. Transfert du champ de déplacement

Afin d'assurer la poursuite du calcul, le champ de déplacement doit également être reconstruit sur la nouvelle discrétisation. Le champ transféré doit être compatible avec le champ de déformation reconstruit à partir du champ de contrainte, des variables internes et de la loi d'état. Par ailleurs, il doit également vérifier les conditions aux limites essentielles. Le champ de déplacement sur la nouvelle discrétisation est alors déterminé par la résolution du problème d'optimisation sous contrainte :

$$\min_{\mathbf{u}|_{\Gamma}=\bar{\mathbf{u}}} \frac{1}{2} \left( w_1 \|\mathbf{u}^{\text{new}} - p_{AD}(\mathbf{u}^{\text{old}})\|_{L^2(\Omega)}^2 + w_2 h^2 \|\nabla^s \mathbf{u}^{\text{new}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{new}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (5)$$

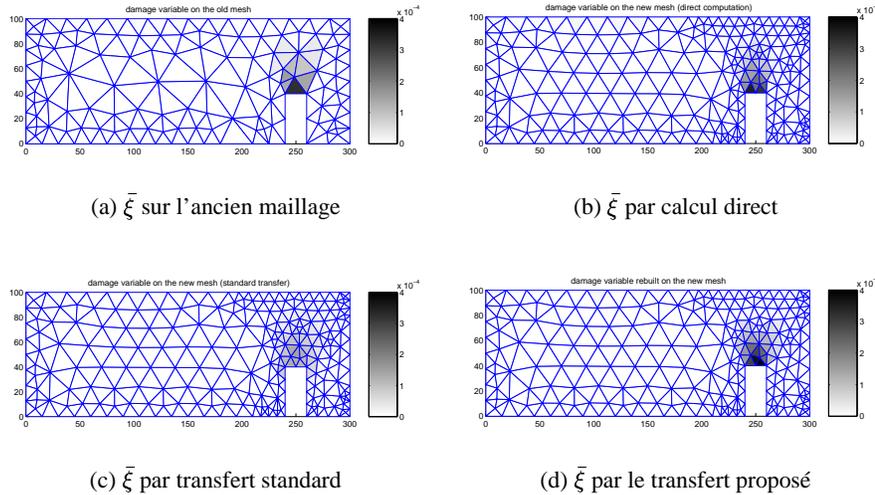
$p_{AD}(\mathbf{u}^{\text{old}})$  note la projection approximation diffuse du champ de déplacement sur le nouveau maillage.  $w_1$  et  $w_2$  sont des poids permettant de définir la qualité avec laquelle le champ de déplacement doit vérifier la compatibilité ou s'approcher du champ projeté.  $h$  correspond à la taille des éléments et  $\bar{\mathbf{u}}$  désigne le champ de déplacement imposé sur la frontière  $\Gamma$  du domaine.

## 4. Résultats numériques

Nous présentons ici les résultats du transfert de champ présenté précédemment. Le test considéré est un test de traction sur un barreau entaillé. Deux discrétisations sont considérées : une première grossière et une deuxième raffinée dans la zone de l'entaille. Le calcul est réalisé à l'aide du code EF *FEAP* développé par le Professeur R.L. TAYLOR à Berkeley. Afin de quantifier la qualité du transfert, les résultats obtenus par l'application de l'opérateur proposé ici sont comparés aux résultats obtenus par transfert classique [PER 96] ainsi qu'aux résultats obtenus par un calcul direct sur le maillage raffiné. Les résultats sont donnés à la figure 1 sous la forme de carte d'endommagement (carte de la variable  $\xi$ ). On peut constater que l'opérateur de transfert présenté permet de limiter la diffusion numérique 1(d) (contrairement à l'opérateur classique 1(c)). La carte d'endommagement transférée est relativement proche de la carte obtenue par calcul direct 1(b).

## 5. Conclusion

L'opérateur de transfert de champ proposé dans ce travail est basé sur les techniques d'approximation diffuse. Il permet de projeter des champs d'une ancienne discrétisation sur une nouvelle discrétisation en respectant l'équation d'équilibre local,



**Figure 1.** Cartes d'endommagement sur l'ancien et le nouveau maillage

l'admissibilité des contraintes et la conservation de quantités énergétiques définissant l'état d'endommagement de la structure (l'énergie de déformation et l'énergie dissipée). Une procédure de raffinement, en particulier une procédure permettant de définir la carte de taille sur le nouveau maillage à partir de la distribution de l'endommagement sur l'ancien maillage, est en cours de développement.

## 6. Bibliographie

- [BRA 04] BRANCHERIE D., IBRAHIMBEGOVIĆ A., « Modélisation "macro" de phénomènes dissipatifs localisés à l'échelle "micro" : formulation et implantation numérique », *Revue Européenne des Éléments Finis, numéro spécial Giens 2003*, vol. 13, n° 5-6-7, 2004.
- [BRE 02] BREITKOPF P., RASSINEUX A., VILLON P., « Diffuse approximation technology : fundamentals and implementation », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 11, 2002, p. 825–867.
- [MAZ 84] MAZARS J., « Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire du béton de structure », PhD thesis, Thèse de doctorat de l'université de Paris 6, LMT, 1984.
- [PER 96] PERIĆ D., HOCHARD C., DUTKO M., OWEN D., « Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity », *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 137, 1996, p. 331–344.
- [VIL 02] VILLON P., BOUROUCHAKI H., SAANOUNI K., « Transfert de champs plastique-admissibles », *C.R. Mécanique*, vol. 330, 2002, p. 313–318.