



HAL
open science

Homogénéisation d'ordre supérieur de composites élastiques

Patrice Cartraud, Stéphane Bourgeois, M. Sharafaty-Zangeneh

► **To cite this version:**

Patrice Cartraud, Stéphane Bourgeois, M. Sharafaty-Zangeneh. Homogénéisation d'ordre supérieur de composites élastiques. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812898

HAL Id: hal-01812898

<https://hal.science/hal-01812898>

Submitted on 11 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Homogénéisation d'ordre supérieur de composites élastiques

P. Cartraud* — **S. Bourgeois**** — **M. Sharafaty-Zangeneh***

**GeM (Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique), UMR CNRS 6183
Ecole Centrale de Nantes, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 3*

patrice.cartraud@ec-nantes.fr

***EGIM et LMA (CNRS-UPR7051),*

Technopole de Chateau-Gombert, 38, rue Joliot Curie, 13451 Marseille Cedex 20

stephane.bourgeois@egim-mrs.fr

RÉSUMÉ. Cet article présente la mise en oeuvre d'une méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur. L'approche est fondée sur la méthode des développements asymptotiques, et la prise en compte des termes d'ordre supérieur du développement a pour objectif d'améliorer la précision du modèle homogénéisé. Ceci conduit à la résolution de plusieurs problèmes, microscopiques et macroscopiques, et cet article est plus particulièrement consacré à la résolution numérique des problèmes microscopiques d'ordre supérieur.

ABSTRACT. A higher-order homogenization method is presented in this paper. The approach is based on the asymptotic expansion method, and the accuracy of the homogenized model is improved through the computation of the higher-order terms of the expansion. This leads to the solution of several microscopic and macroscopic problems, and this paper is focused on the numerical solution of the higher-order microscopic problems.

MOTS-CLÉS : homogénéisation, développement asymptotique, modèle d'ordre supérieur.

KEYWORDS: homogenization, asymptotic expansion, higher-order model

1. Introduction

Les méthodes standards d'homogénéisation sont appropriées lorsque la taille des hétérogénéités est petite devant les dimensions de la structure, et que les gradients de contraintes macroscopiques sont faibles (il existe en outre le problème des effets de bords). Si on veut étendre leur domaine de validité, il convient d'enrichir le modèle homogénéisé, et pour un milieu périodique, la démarche consiste à prendre en compte les termes d'ordre supérieur du développement asymptotique. Ceci amène à considérer de nouveaux problèmes microscopiques et macroscopiques, les premiers d'entre eux permettant de caractériser plus finement le comportement macroscopique.

Des travaux dans ce domaine existent [BOU 96], [TRI 96], [SMY 00], mais les contributions sont essentiellement théoriques. Notre propos est ici la mise en oeuvre numérique de cette méthode, en considérant le cas d'un milieu élastique, en 2D.

2. Problèmes Microscopiques

2.1. Formulation

La structure hétérogène est formée par la répétition périodique d'une cellule de base (ou période) Y^ε . Le point de départ de la méthode est le problème d'élasticité 3D. Une échelle locale est introduite en posant $\mathbf{y} := \mathbf{x}/\varepsilon$, et le déplacement est recherché sous la forme d'un développement asymptotique : $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \dots$ où chaque fonction $\mathbf{u}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $k \geq 1$, est périodique par rapport à la variable \mathbf{y} . La coexistence des deux échelles transforme le problème initial 3D hétérogène en une série de problèmes 3D *microscopiques ou cellulaires*, posés sur la période de la structure et de problèmes *macroscopiques*, portant sur la structure avec un milieu homogène équivalent. Les comportements macroscopiques intervenant à ce niveau sont issus de la résolution des problèmes microscopiques.

Au premier ordre, les problèmes cellulaires sur la cellule 3D mise à l'échelle Y s'écrivent (\mathbf{a} est le tenseur de rigidité, \mathbf{div}_y et \mathbf{e}_y les opérateurs divergence et de déformation sur la variable \mathbf{y} , et \mathbf{E} la déformation macroscopique, égale à $\mathbf{e}_x(\mathbf{U}^0(\mathbf{x}))$) :

$$\begin{cases} \mathbf{div}_y \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{e} & \text{dans } Y \\ \mathbf{e} = \mathbf{e}_y(\mathbf{u}^1) + \mathbf{E}(\mathbf{x}) & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial Y_b \\ \mathbf{u}^1 \text{ périodique et } \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique} & \text{sur } \partial Y_a \end{cases} \quad (1)$$

où $\partial Y = \partial Y_a \cup \partial Y_b$, avec ∂Y_a qui représente le contour de la cellule concerné par la périodicité, et ∂Y_b sa partie complémentaire, libre d'efforts. La solution du problème (1) est définie à une translation d'ensemble près et est notée :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^1 = \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^{1ij}(\mathbf{y}) E_{ij}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{y}) : \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}^{0ij}(\mathbf{y}) E_{ij}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2)$$

où \mathbf{X}^{1ij} et τ^{0ij} sont les solutions de (1) avec comme donnée une seule déformation non nulle et unitaire $E_{ij} = 1$. La loi de comportement homogénéisée est donnée par (la moyenne spatiale sur la période est notée $\langle \cdot \rangle$) :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle = \langle \boldsymbol{\tau}^0 \rangle : \mathbf{e}_x(\mathbf{U}^0(\mathbf{x})) \quad (3)$$

A l'ordre supérieur, le problème est plus délicat. La formulation des problèmes microscopiques est donnée dans [DUM 90] et [BOU 96]. Par linéarité, la solution des problèmes cellulaires se décompose en une solution à déformation macroscopique imposée (provenant du terme $\mathbf{U}^1(\mathbf{x})$ de (2)), et une solution à gradient de déformation macroscopique imposée. C'est à cette dernière solution que nous nous intéressons ici. Elle vérifie (\mathbf{X}^1 est la solution du problème (1) avec $\langle \mathbf{X}^1 \rangle = \mathbf{0}$) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \mathbf{s} + \operatorname{div}_x ((\boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{y}) - \langle \boldsymbol{\tau}^0 \rangle) : \mathbf{E}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \mathbf{s} = \mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{e} & \text{dans } Y \\ \mathbf{e} = \mathbf{e}_y(\mathbf{v}^{per}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{X}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}) & \text{dans } Y \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial Y_b \\ \mathbf{v}^{per} & \text{périodique et } \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique} \end{cases} \quad (4)$$

Il apparaît ainsi que la solution de ce problème est fonction du gradient de la déformation macroscopique $\mathbf{grad}_x \mathbf{E}$, et a pour expression (le symbole $\dot{\cdot}$ désignant une contraction triple) :

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{per} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^2(\mathbf{y}) : \mathbf{grad}_x \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^{2jkh}(\mathbf{y})(\mathbf{grad}_x \mathbf{E}(\mathbf{x}))_{jkh} \\ \mathbf{s} = \boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{grad}_x \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}^{1jkh}(\mathbf{y})(\mathbf{grad}_x \mathbf{E}(\mathbf{x}))_{jkh} \end{cases} \quad (5)$$

Comme à l'ordre précédent, les champs \mathbf{X}^{2jkh} , $\boldsymbol{\tau}^{1jkh}$ correspondent à la solution du problème (5) avec un gradient de déformation macroscopique unitaire.

A cet ordre, la loi de comportement homogénéisée s'écrit :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^1 \rangle = \langle \boldsymbol{\tau}^0 \rangle : \mathbf{e}_x(\mathbf{U}^1(\mathbf{x})) + \langle \boldsymbol{\tau}^1 \rangle : \mathbf{grad}_x (\mathbf{e}_x(\mathbf{U}^0(\mathbf{x}))) \quad (6)$$

Le processus peut être si nécessaire poursuivi aux ordres supérieurs.

Si la formulation de ces problèmes cellulaires d'ordre supérieur n'est pas récente, les références avec des résultats provenant de leur résolution numérique sont, à notre connaissance, peu nombreuses. On peut citer [LAH 98] [PEE 02] dans le cas des matériaux 2D et 3D respectivement, et [BUA 00], [BOU 00] pour les poutres périodiques.

2.2. Résolution numérique

Au premier ordre, plusieurs approches existent pour la résolution des problèmes microscopiques cf. [MIC 99], et dans le cas présent, la déformation macroscopique est prise en compte par l'intermédiaire d'une contrainte initiale $\mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{E}$.

Au deuxième ordre, d'après (4), les problèmes à résoudre font apparaître des efforts volumiques et une contrainte initiale. Pour le problème dont la solution est $(\mathbf{Y}^{jkh}, \boldsymbol{\tau}^{1jkh})$, ils ont pour expression : $f_i^{jkh}(\mathbf{y}) = (\boldsymbol{\tau}^{0kh}(\mathbf{y}) - \langle \boldsymbol{\tau}^{0kh} \rangle)_{ij}$ et $(s_{ini}^{jkh})_{lm} = \mathbf{a}_{lmpj}(\mathbf{y}) \mathbf{X}_p^{kh}(\mathbf{y})$ respectivement. Ces problèmes sont résolus avec le logiciel Abaqus : l'effort $f_i^{jkh}(\mathbf{y})$ se calcule sans difficulté à partir des contraintes du premier ordre, alors que la contrainte initiale $(s_{ini}^{jkh})_{lm}$ est évaluée aux points d'intégration à partir des déplacements.

Pour valider la mise en oeuvre de la méthode, le cas test d'un bi-matériau périodique en contraintes planes est étudié. On dispose en effet sur ce problème d'une solution analytique pour le problème du deuxième ordre [LAH 98], qui est approchée avec une excellente précision avec le résultat éléments finis. Une mousse à cellule carrée est ensuite traitée en contraintes planes. La déformée sur le champ périodique obtenue pour les problèmes cellulaires est donnée figure 1. La figure 1(a) correspond à la solution au premier ordre pour une déformation macroscopique de glissement imposée, alors que la figure 1(b) représente la solution du problème cellulaire du deuxième ordre lorsque la donnée est un gradient de déformation macroscopique de glissement.

3. Problèmes Macroscopiques

3.1. Formulation

Par récurrence, le développement asymptotique du déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = & \mathbf{U}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{U}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{e}_x(\mathbf{U}^0(\mathbf{x}))) \\ & + \varepsilon^2(\mathbf{U}^2(\mathbf{x}) + \mathbf{X}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{e}_x(\mathbf{U}^1(\mathbf{x})) + \mathbf{X}^2(\mathbf{y}) : \mathbf{grad}_x \mathbf{e}_x(\mathbf{U}^0(\mathbf{x}))) \dots \end{aligned} \quad (7)$$

La résolution successive des problèmes microscopiques fournit les solutions $(\mathbf{X}^1(\mathbf{y}), \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{y}))$, $(\mathbf{X}^2(\mathbf{y}), \boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y}))$..., alors que les problèmes macroscopiques permettent le calcul de $\mathbf{U}^0(\mathbf{x})$, $\mathbf{U}^1(\mathbf{x})$... Ces problèmes macroscopiques sont posés sur le domaine 3D homogénéisé.

Les équations d'équilibre s'écrivent (δ est le symbole de Kronecker, et $k \geq 0$) :

$$\mathbf{div}_x \langle \boldsymbol{\sigma}^k \rangle + \delta_{k0} \langle \mathbf{f} \rangle = \mathbf{0} \quad (8)$$

avec les efforts volumiques \mathbf{f} qui interviennent sur le problème de plus bas ordre.

La loi de comportement macroscopique est donnée aux premiers ordres par (3) et (6), et aux ordres suivants, les gradients de déformation d'ordre supérieur apparaissent. Ces expressions montrent que le calcul des termes d'ordre supérieur du développement asymptotique permet de prendre en compte les variations des champs macroscopiques à l'échelle de la cellule.

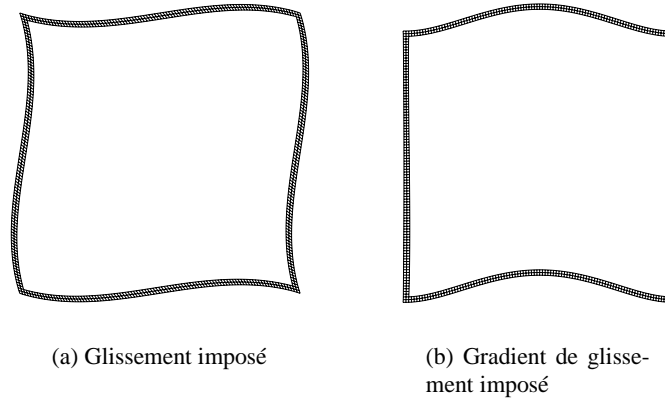


Figure 1. Déformées microscopiques pour un matériau cellulaire

3.2. Résolution numérique

La résolution à chaque ordre du problème macroscopique peut paraître pénalisante. C'est pourquoi plusieurs auteurs proposent de se ramener à un seul problème macroscopique, en utilisant différentes approches [BAK 89], [FIS 01], [SMY 00]. Dans tous ces cas, le problème macroscopique ainsi obtenu est un problème d'élasticité non classique. Il s'ensuit qu'il faut définir plus de trois conditions aux limites en tout point du contour. Il s'agit là d'un problème encore largement ouvert, qui relativise par conséquent l'intérêt de ces approches.

La méthode adoptée ici consiste à résoudre successivement (ordre après ordre) les problèmes macroscopiques. Considérons à titre d'exemple le problème macroscopique d'ordre 1. Quand la solution $\mathbf{U}^1(\mathbf{x})$ de ce problème est recherchée, la solution $\mathbf{U}^0(\mathbf{x})$ du problème macroscopique d'ordre 0 est connue, si bien que les équations d'équilibre peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\langle \boldsymbol{\tau}^0 \rangle : \mathbf{e}_{\mathbf{x}}(\mathbf{U}^1(\mathbf{x})) + \sigma_{ini}) = \mathbf{0} \\ \sigma_{ini} = \langle \boldsymbol{\tau}^1 \rangle : \mathbf{grad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_{\mathbf{x}})(\mathbf{U}^0(\mathbf{x})) \end{cases} \quad (9)$$

On est ainsi ramené à un problème d'élasticité classique, avec une contrainte initiale. Le calcul de cette contrainte initiale passe par le calcul des gradients de déformation de la solution macroscopique d'ordre 0, ce qui nécessite l'utilisation d'éléments finis avec des fonctions d'interpolation polynômiales de degré 2 au moins. Au final, les solutions microscopiques et macroscopiques à chaque ordre sont combinées pour reconstituer la série (7) du développement asymptotique.

4. Conclusion

Nous proposons ici une implémentation numérique d'une méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur pour des applications de type milieux continus. Dans un premier temps, l'accent est mis sur l'amélioration de la loi de comportement homogénéisée, grâce à la prise en compte des termes d'ordre supérieur du développement asymptotique. Il est aussi montré que même si ces termes se traduisent par des gradients de déformation, ils peuvent être traités en restant dans le cadre de l'élasticité classique (milieu de Cauchy). Des travaux sont actuellement en cours pour démontrer la précision de cette méthode sur divers exemples.

A plus long terme, le problème des effets de bords sera également abordé.

5. Bibliographie

- [BAK 89] BAKHVALOV N., PANASENKO G., *Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media*, Kluwer, 1989.
- [BOU 96] BOUTIN C., « Microstructural Effects in Elastic Composites », *Int. J. Solids Structures*, vol. 33, n° 7, 1996, p. 1023-1051.
- [BOU 00] BOURGEOIS S., « Homogénéisation d'une poutre périodique : limite des développements asymptotiques », *C.R.Acad.Sci. Ser. II*, vol. 328, 2000, p. 719-725.
- [BUA 00] BUANNIC N., « Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes », Thèse, Ecole Centrale de Nantes, 2000.
- [DUM 90] DUMONTET H., « Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites », Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1990.
- [FIS 01] FISH J., CHEN W., « Higher-Order Homogenization of Initial/Boundary-Value Problem », *J. Eng. Mech.*, vol. 127, n° 12, 2001, p. 1223-1230.
- [LAH 98] LAHELLEC N., « Limite de validité d'une approche par homogénéisation périodique, étude de cas », D.E.A. de Mécanique, Université Aix-Marseille II, 1998.
- [MIC 99] MICHEL J., MOULINEC H., SUQUET P., « Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach », *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 172, n° 1-4, 1999, p. 109-143.
- [PEE 02] PEERLINGS R., FLECK N., « A numerical framework for homogenisation towards higher-order media », MANG H.A. RAMMERSTORFER F.G E. J., Ed., *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, <http://wccm.tuwien.ac.at>, 2002.
- [SMY 00] SMYSHLYAEV V., CHEREDNICHENKO K., « On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, n° 6-7, 2000, p. 1325-1357.
- [TRI 96] TRIANTAFYLIDIS N., BARDENHAGEN S., « The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 44, n° 11, 1996, p. 1891-1928.