



**HAL**  
open science

## Hybridation primale-duale pour la mise en œuvre du contrôle actif de structures

Frédéric Bourquin, Bérengère Branchet, Manuel Collet

► **To cite this version:**

Frédéric Bourquin, Bérengère Branchet, Manuel Collet. Hybridation primale-duale pour la mise en œuvre du contrôle actif de structures. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812893

**HAL Id: hal-01812893**

**<https://hal.science/hal-01812893>**

Submitted on 11 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Hybridation primale-duale pour la mise en œuvre du contrôle actif de structures

**F. Bourquin\*** — **B. Branchet\*\*** — **M. Collet\*\*\***

\* *Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, et Laboratoire Lagrange  
58 bd Lefebvre  
75015 Paris*

*bourquin@lcpc.fr*

\*\* *Ecole Supérieure d'Ingénieurs Léonard de Vinci  
Pôle Universitaire Léonard de Vinci  
92916 La Défense Cedex*

*berengere.branchet@devinci.fr*

\*\*\* *FEMTO - ST, département LMA  
24 rue de l'Épitaphe  
25030 Besançon Cedex*

*manuel.collet@univ-fcomte.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cet article se propose de montrer l'importance, en termes de stabilité et d'efficacité, de la formulation mécanique adoptée pour le calcul de la loi de contrôle. Il s'agit ici d'étudier différentes approches pour stabiliser une structure simple, et de les comparer. La formulation mécanique apparaît comme un paramètre de conception de la loi de contrôle à implanter, en agissant sur la robustesse et l'efficacité de la stabilisation. Cette approche permet de construire des lois de contrôle plus robustes, et facilite ainsi la mise en œuvre expérimentale.*

*ABSTRACT. This paper aims to show the impact of mechanical formulation on the compute of the control law. Various approaches are studied and compared in order to stabilize a simple structure. The mechanical formulation turns out to be a conception parameter of the control law, and has an effect on the robustness and the efficiency of the stabilization. More robust control laws can also be built, and the experimental implementation becomes easier.*

*MOTS-CLÉS : Contrôle actif, contrôle optimal, loi LQ, formulation primale, formulation duale, formulation hybride, stabilisation rapide, amortissement, robustesse.*

*KEYWORDS: Active control, optimal control, LQ law, primal formulation, dual formulation, hybrid formulation, fast stabilization, damping, robustness.*

---

## 1. Introduction

La construction de ponts de grande envergure nécessite l'utilisation de stabilisateurs afin d'amortir les vibrations des piles au cours de leur élévation. Depuis une vingtaine d'années, l'utilisation de contrôles passifs (*Tuned Mass Damper* ou *Tuned Liquid Damper*) s'est largement développée au Japon. Or, la variation des caractéristiques physiques des structures au cours de leur élaboration rend inefficace l'utilisation d'un contrôle passif ; cela a orienté les recherches vers l'utilisation d'un contrôle actif, s'adaptant aux modifications de la structure [TAN 01]. Malgré ses avantages certains, le contrôle actif nécessite aussi des adaptations afin d'être le plus efficace possible. En effet, il est nécessaire de supprimer le spill-over, par exemple grâce à des combinaisons linéaires des mesures des capteurs. Certains industriels mènent aussi des études sur les stratégies de contrôle à adopter afin d'obtenir des lois de contrôle les plus robustes possible.

En fait, on distingue deux grandes catégories dans les méthodes de contrôle actif : d'une part les stratégies d'amortissement colocalisées, d'autre part les stratégies de contrôle optimal non nécessairement colocalisées. Le principal défaut des stratégies optimales est d'utiliser pour le calcul du contrôle un modèle mathématique du système à contrôler. Malgré les problèmes de stabilité et de robustesse pouvant en découler, elles semblent néanmoins très efficaces pour la stabilisation des structures mécaniques.

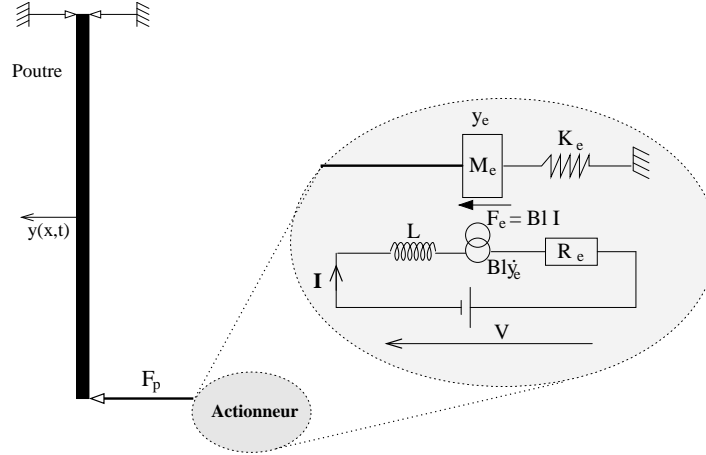
À l'origine d'un problème de stabilisation, on connaît les caractéristiques mécaniques et physiques de la structure à contrôler. Or, il existe plusieurs formulations mécaniques permettant de décrire le comportement d'une structure, et chacune engendre un système d'EDP sur lequel on peut construire un contrôle optimal. Nous nous proposons de montrer qu'en fonction de la formulation choisie, le contrôle obtenu ne possède pas les mêmes propriétés de stabilité et de robustesse. La formulation mécanique apparaît donc comme un paramètre important dans la conception du contrôle, et il est alors possible d'agir sur ce "paramètre" afin d'augmenter les marges de stabilité, et donc l'efficacité du contrôle. Nous distinguons dans notre approche numérique le modèle mathématique retenu pour la synthèse du contrôle de celui utilisé pour les simulations. Ce dernier traduit réellement les caractéristiques multiphysiques du modèle : il permet effectivement d'interpréter les résultats expérimentaux [BOU 04].

Nous décrivons la modélisation du système dans le paragraphe 2, puis la construction de deux lois de contrôles obtenues à partir de formulations duales dans le paragraphe 3, enfin nous présenterons dans le paragraphe 4 quelques résultats et nous concluons.

## 2. Description du système mécanique

Considérons une poutre de longueur  $L$  ;  $\rho$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $I$  désignent respectivement sa densité, son module de Young, l'aire de la section, et le moment d'inertie. Son amortissement propre est négligé [BOU 04]. Cette structure (figure 1) est contrôlée à son

extrémité par un déplacement imposé par un actionneur électromécanique dont les caractéristiques ont été identifiées expérimentalement [RAT 00].  $M$  capteurs positionnés sur les nœuds du mode  $(M + 1)$  permettent de mesurer le déplacement transverse de la poutre  $y(x, t)$ .



**Figure 1.** Schéma électromécanique du système global.

Le système couple les équations décrivant la dynamique de la poutre [1], et les équations électromécaniques [2] et [3] décrivant le comportement de l'actionneur.  $y_e$  représente le déplacement à l'extrémité de la poutre,  $I$  est l'intensité du courant,  $T$  désigne l'horizon de stabilisation.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \partial_{tt} y(x, t) + EI \partial_{xxxx} y(x, t) = 0 \quad [0, L] \times [0, T] \\ y(0, t) = y_e(t), \quad EI \partial_{xxx} y(0, t) = F_p(t) \quad [0, T] \\ y(L, t) = \partial_{xx} y(0, t) = \partial_{xx} y(L, t) = 0 \quad [0, T] \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \partial_t y(x, 0) = y^1(x) \quad [0, L] \end{array} \right. \quad [1]$$

$$\begin{array}{l} M_e \ddot{y}_e(t) + K_e y_e(t) = F_e(t) + F_p(t) \quad [2] \\ L_e \dot{I}(t) + R_e I(t) + Bl \dot{y}_e(t) = V(t) \quad [3] \end{array}$$

Ce modèle de *simulation*, recalé expérimentalement, est fidèle au système physique que nous étudions, quelle que soit la loi de contrôle utilisée. Notons que ce n'est pas ce système que nous utiliserons pour déterminer la loi de contrôle à appliquer, nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

**Approximation numérique**

Nous introduisons l'espace

$$W = \{(y(x, t), y_e(t), I(t)) \text{ tel que } y(\cdot, t) \in H^2(0, L), \\ y_e(t) \in \mathbb{R}, I(t) \in \mathbb{R}, \text{ et } y(0, t) = y_e(t), y(L, t) = 0\} \quad [4]$$

et nous obtenons alors la formulation variationnelle vérifiée par la solution  $(y(x, t), y_e(t), I(t))$  du problème [1,2,3] :

$$\begin{aligned} \forall (\hat{y}(x), \hat{y}_e(t), \hat{I}(t)) \in W, \\ \rho A \int_0^L \partial_{tt} y(x, t) \hat{y}(x) dx + M_e \ddot{y}_e(t) \hat{y}_e(t) \\ + L_e \dot{I}(t) \hat{I}(t) + Bl \dot{y}_e(t) \hat{I}(t) \\ + K_e y_e(t) \hat{y}_e(t) + EI \int_0^L \partial_{xx} y(x, t) \ddot{\hat{y}}(x) dx + R_e I(t) \hat{I}(t) - Bl I(t) \hat{y}_e(t) \\ = V(t) \hat{I}(t) \end{aligned} \quad [5]$$

Par analogie avec la simulation du système sans actionneur, on choisit d'approcher le déplacement  $y(x, t)$  sur une base de modes propres  $\{\lambda_i, \psi_i\}_{i=1}^{+\infty}$  associés à une poutre en appuis fixes à ses deux extrémités [RAT 00, BOU 04]. Ces modes sont calculés explicitement :

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho A L}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad \text{et} \quad \lambda_i = \frac{EI}{\rho A} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 \quad [6]$$

De plus, pour assurer la condition imposée par le contrôle au bord  $y(0, t) = y_e(t) \neq 0$ , nous considérons finalement le déplacement comme la somme d'un mouvement *quasi-statique* imposé par le contrôle et d'une somme des modes propres de flexion définis ci-dessus.

On introduit l'espace d'approximation suivant  $V_N \times (1 - \frac{x}{L})\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , en notant  $V_N$  l'espace engendré par les  $N$  premiers modes de flexion  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ , et l'approximation du déplacement  $y_N(x, t)$  est donné par :

$$y_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \psi_i(x) + (1 - \frac{x}{L}) y_e(t) \quad [7]$$

Le système discrétisé obtenu peut alors s'écrire sous la forme d'une équation d'état [RAT 00, BOU 04] :

$$\dot{X} = AX + Bv_N \quad [8]$$

où le vecteur d'état est défini par :  $X = (\alpha_i, y_e, \partial_t \alpha_i, \partial_t y_e, I)_{1 \leq i \leq N}^T$ , et  $v_N$  est le contrôle approché.

Nous allons maintenant développer la construction des lois de contrôle. Nous remarquons tout d'abord que le signal de contrôle est la tension  $V(t)$ , et que cette dernière est approximativement proportionnelle au déplacement  $y_e(t)$  induit en  $x = 0$ , sous réserve que l'on reste dans une gamme de fréquences inférieures au premier mode interne de l'actionneur. Cette remarque nous permet de ne pas prendre en compte l'actionneur dans le *modèle de synthèse* utilisé pour calculer les lois de contrôle.

### 3. Construction des lois de contrôle

Nous allons donc utiliser comme modèle de synthèse un modèle de poutre d'Euler-Navier-Bernoulli en appuis simples contrôlée en déplacement à l'un de ses bords. Il existe plusieurs formulations mécaniques d'un même système, nous allons considérer ici deux formulations, l'une en déplacement, l'autre en contrainte, et calculer pour chacune le contrôle optimal qui en découle.

#### 3.1. Formulation primale

Nous prenons comme modèle de *synthèse*, qui va nous permettre de construire le contrôle, un modèle de poutre en formulation primale, *i.e.* l'inconnue considérée est le déplacement transverse  $y(x, t)$  :

$$\begin{cases} \rho A \partial_{tt} y(x, t) + EI \partial_{xxxx} y(x, t) = 0 & [0, L] \times [0, T] \\ y(0, t) = v^p(t) & [0, T] \\ y(L, t) = \partial_{xx} y(0, t) = \partial_{xx} y(L, t) = 0 & [0, T] \\ y(x, 0) = y^0(x), \quad \partial_t y(x, 0) = y^1(x) & [0, L] \end{cases} \quad [9]$$

où  $y^0$  et  $y^1$  sont les conditions initiales, supposées suffisamment régulières. Nous allons construire sur cette formulation un *contrôle de Komornik primal en déplacement* [KOM 97, BOU 04].

Le principe de ce contrôle est de construire à chaque instant  $t$  un contrôle exact sur un temps fictif  $s$  pour un système auxiliaire dont les conditions initiales sont l'état du système à l'instant  $t$ , *i.e.*  $\{y(x, t), \partial_t y(x, t)\}$ . Nous introduisons pour ce faire à chaque instant  $t \geq 0$  le problème adjoint dans le temps fictif  $s$  suivant :

$$\begin{cases} \rho A \partial_{ss} \phi(x, s) + EI \partial_{xxxx} \phi(x, s) = 0 & [0, L] \times [0, S] \\ \phi(0, s) = \phi(L, s) = \partial_{xx} \phi(0, s) = \partial_{xx} \phi(L, s) = 0 & [0, S] \\ \phi(x, 0) = \phi^0(x), \quad \partial_s \phi(x, 0) = \phi^1(x) & [0, L] \end{cases} \quad [10]$$

où  $S$  désigne l'horizon de temps fictif.

Le champ de déplacement  $\phi$  dépend linéairement des conditions initiales  $\{\phi^0, \phi^1\}$  et on peut donc définir pour chaque valeur du paramètre  $\omega$  la forme bilinéaire  $a_{\omega, S}^p$ , appelée *pseudo-grammien* de contrôlabilité [ZAB 92] :

$$a_{\omega, S}^p(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1\}) = \int_0^S f_{\omega, S}(s) EI \partial_{xxx} \phi(0, s) EI \partial_{xxx} \hat{\phi}(0, s) ds \quad [11]$$

où  $\hat{\phi}$  est la solution de [10] avec  $\{\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1\}$  pour conditions initiales et où, pour  $\omega > 0$  et  $S > \frac{1}{2\omega}$ , en notant  $S_1 = S - \frac{1}{2\omega} > 0$ ,  $f_{\omega, S}$  est définie par :

$$f_{\omega,S} = \begin{cases} e^{-2\omega s} & s \in [0, S_1] \\ \frac{e^{-2\omega S_1}}{S-S_1}(S-s) & s \in [S_1, S] \end{cases}$$

Quels que soient les champs initiaux de déplacement  $z^0$  et de vitesse  $z^1$  suffisamment réguliers, il existe une unique solution [LEB 92]  $\{\phi^0, \phi^1\}$  de l'équation variationnelle

$$\alpha_{\omega,S}^p(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1\}) = \int_0^L (z^1 \hat{\phi}^0 - z^0 \hat{\phi}^1) dx \quad \forall \{\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1\} \quad [12]$$

On définit alors l'opérateur  $\mathcal{L}_{\omega,S}^p$  par  $\{\phi^0, \phi^1\} = \mathcal{L}_{\omega,S}^p\{z^0, z^1\}$  et on note  $P_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  la projection sur la première composante, (i.e.  $P_1(\{a, b\}) = a$ ).

Le contrôle de Komornik *primal en déplacement* est alors défini par

$$v^p(t) = EI \partial_{xxx}(P_1 \mathcal{L}_{\omega,S}^p\{y(t), \partial_t y(t)\})(x=0) \quad [13]$$

où  $\omega$  et  $S$  sont les paramètres de la loi de contrôle.

Ce contrôle par retour d'état assure une décroissance exponentielle de l'énergie à un taux prédéfini  $\omega$  (paramètre de la loi) [KOM 97].

Nous avons calculé ici la loi de contrôle de Komornik en définissant un grammien de contrôlabilité, mais cette loi n'est qu'un cas particulier des lois de contrôle optimal *Linéaires Quadratiques*. En effet, le contrôle défini en [13] minimise une fonctionnelle de coût particulière ([14]), et peut donc aussi être obtenu par minimisation de cette fonctionnelle.

$$\mathcal{J}(y, v) = \int_0^{+\infty} (2\omega \langle \mathcal{L}_{\omega,S}^p\{y(t), \partial_t y(t)\}, \{\partial_t y(t), -y(t)\} \rangle + v^2(t)) dt \quad [14]$$

où  $\langle \{\psi_0, \psi_1\}, \{\eta_0, \eta_1\} \rangle = \int_0^L (\psi_0(x)\eta_0(x) + \psi_1(x)\eta_1(x)) dx$

Néanmoins, cette approche nécessite l'utilisation d'une méthode de résolution de l'équation de Riccati algébrique, ce qui peut poser problème pour un nombre important d'états, ou lorsque ce nombre excède de beaucoup le nombre d'actionneurs. Au contraire, l'équation [12] se ramène à la résolution d'un système linéaire bien posé.

Numériquement, on utilise une décomposition modale du déplacement sur les  $M$  modes que l'on cherche à contrôler. En utilisant les notations introduites au paragraphe précédent, on projette le déplacement  $y(x, t)$  [15] ainsi que les opérateurs de la construction du contrôle de Komornik sur  $V_M$ .

$$y_M(x, t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \psi_i(x) \quad [15]$$

On obtient alors l'expression du contrôle de Komornik discrétisé, donnée sous forme matricielle [RAT 00] :

$$v_M^p(t) = -[T]_M [K^p]_{M \times 2M} [[\alpha]_M(t), [\dot{\alpha}]_M(t)]^T \quad [16]$$

où  $[T]_M = [t_1, \dots, t_M]$  avec  $t_i = EI \frac{d^3 \psi_i}{dx^3}(x=0)$  l'effort tranchant du mode  $i$  au niveau de l'actionneur, et  $K^p$  représente la matrice de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\omega, S}^p$  projeté sur l'espace  $V_M$ , et dépend de  $S$ ,  $\omega$  et  $[T]_M$ .

La fonctionnelle de coût minimisée par le contrôle [13] s'écrit sous forme matricielle, après discrétisation du déplacement :

$$\mathcal{J}(v) = \int_0^T \int_0^L [X]^T Q [X] dx + [v(t)]^T R [v(t)] dt \quad [17]$$

où  $Q$  et  $R$  sont les matrices de pondération : on retrouve bien la fonctionnelle classique du contrôle optimal Linéaire Quadratique.

Le contrôle  $v_M^p$  [16] sera appelé par la suite *contrôle primal*.

### 3.2. Formulation duale

Nous choisissons maintenant comme modèle de *synthèse*, un modèle de poutre en formulation duale, *i.e.* l'inconnue considérée est maintenant la force : le moment fléchissant  $M(x, t)$  vérifie le système [19]. Celui-ci est obtenu à partir du modèle en formulation primale [9] en utilisant la loi de comportement liant le moment et le déplacement

$$M(x, t) = EI \partial_{xx} y(x, t) \quad [18]$$

Ce système diffère du système [9] (vérifié par le déplacement  $y(x, t)$ ) par ses conditions aux limites. En effet, le système dual est contrôlé en effort tranchant alors que le système primal était contrôlé en déplacement transverse.

$$\begin{cases} \rho A \partial_{tt} M(x, t) + EI \partial_{xxxx} M(x, t) = 0 & [0, L] \times [0, T] \\ \partial_{xx} M(0, t) = -\rho A \ddot{v}^d(t) & [0, T] \\ \partial_{xx} M(L, t) = M(0, t) = M(L, t) = 0 & [0, T] \\ M(x, 0) = M^0(x), \quad \partial_t M(x, 0) = M^1(x) & [0, L] \end{cases} \quad [19]$$

En posant

$$u(t) = -\rho A EI \ddot{v}^d(t) \quad [20]$$

la 2<sup>e</sup> équation du système [19] devient

$$EI \partial_{xx} M(0, t) = u(t) \quad [21]$$

$u(t)$  désigne l'effort tranchant à imposer pour le système dual (*contrôle dual en accélération*), alors que  $v^d(t)$  est le déplacement à imposer au système réel. Nous allons



calculer  $u(t)$  de la même façon que dans le cas de la formulation primale [RAT 00], puis nous en déduisons  $v^d(t)$ .

Le problème adjoint introduit à chaque instant est identique à celui de la formulation primale. En revanche, le *pseudo-grammien* de contrôlabilité [ZAB 92] défini pour chaque valeur du paramètre  $\omega$  est donné par :

$$a_{\omega,S}^d(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1\}) = \int_0^S f_{\omega,S}(s) \partial_x \phi(0, s) \partial_x \hat{\phi}(0, s) ds \quad [22]$$

avec les mêmes notations que précédemment.

De même, quels que soient les champs initiaux  $z^0$  et  $z^1$  suffisamment réguliers, il existe une unique solution [LEB 92]  $\{\phi^0, \phi^1\}$  de l'équation variationnelle

$$a_{\omega,S}^d(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1\}) = \int_0^L \rho A (z^1(x) \hat{\phi}^0(x) - z^0(x) \hat{\phi}^1(x)) dx \quad \forall \{\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1\} \quad [23]$$

On définit ensuite de façon similaire les opérateurs  $\mathcal{L}_{\omega,S}^d$  et  $P_1$ , et le contrôle de Komornik dual en accélération est alors défini par

$$u(t) = \partial_x (P_1 \mathcal{L}_{\omega,S}^d \{M(x, t), \partial_t M(x, t)\})(x=0) \quad [24]$$

où  $\omega$  et  $S$  sont les paramètres de la loi de contrôle.

Numériquement, on utilise la même discrétisation modale, car les conditions aux limites du problème primal et du problème dual sont identiques lorsque le contrôle est nul.

Le moment estimé se projette donc sur les  $M$  premières formes propres suivant :

$$M_M(x, t) = \sum_{i=1}^M \gamma_i(t) \psi_i(x) \quad [25]$$

où  $\gamma_i(t)$  sont les contributions modales du moment, obtenues à partir de la projection du déplacement sur  $V_M$  [15] et en utilisant la relation [18]. On obtient alors  $M_M(x, t) = EI \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \psi_i(x) = \sum_{i=1}^M (-EI (\frac{i\pi x}{L})^2 \alpha_i(t)) \psi_i(x)$ .

On obtient ainsi, de la même façon que dans le cas de la formulation primale, un contrôle approché  $u_M$  en "projetant" l'équation du contrôleur [23] sur  $V_M$ . Le contrôle en effort tranchant pour le problème dual est donc approché par :

$$u_M(t) = -[R]_M [K^d]_{M \times 2M} [[\gamma]_M(t), [\dot{\gamma}]_M(t)]^T \quad [26]$$

où  $[R]_M = [r_1, \dots, r_M]$  avec  $r_i = -\frac{d\psi_i}{dx}(x=0)$  la rotation de la forme  $i$  au niveau de l'actionneur, et  $K^d$  représente la matrice de l'opérateur  $\mathcal{L}_{\omega,S}^d$  projeté sur l'espace  $V_M$ , et dépend de  $S$ ,  $\omega$  et  $[R]_M$ .

Le déplacement à imposer s'écrit alors en utilisant la relation [20] :

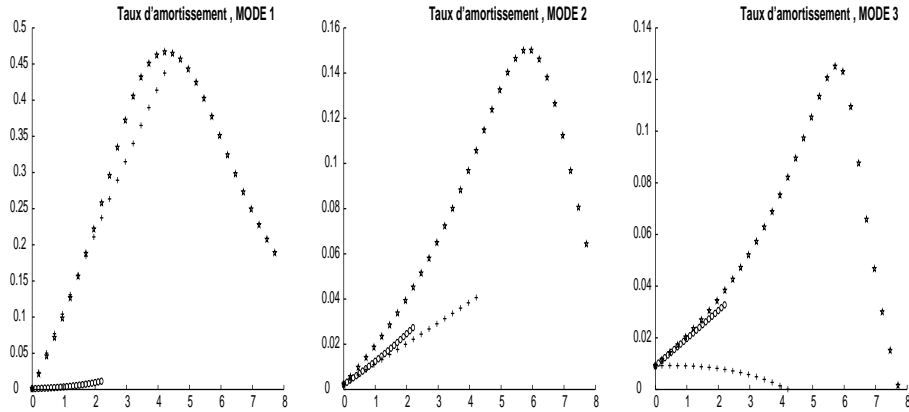
$$v_M^d(t) = -\frac{1}{\rho AEI} \int \int u_M(t) dt dt \quad [27]$$

On appellera ce déplacement *contrôle dual*.

#### 4. Résultats et analyses

Le contrôle dual apparaît plus performant que le contrôle primal pour contrôler les hautes fréquences, et inversement pour les basses fréquences (figure 2). Nous introduisons la loi de commande hybride  $v = \frac{1}{2}(G^p v_M^p + G^d v_M^d)$  où  $v_M^p$  et  $v_M^d$  désignent respectivement les contrôles primal et dual calculés précédemment et  $G^p$  et  $G^d$  sont des filtres passe-bas et passe-haut de fréquences de coupure respectives  $\nu^p = 10 \text{ Hz}$  et  $\nu^d = 20 \text{ Hz}$  [BOU 02].

Cette nouvelle loi *hybride* permet de contrôler le spill-over, et ainsi de robustifier le système : les plages de paramètres admissibles qui assurent la stabilité sont beaucoup plus grandes (figure 2 : les résultats ne sont donnés que dans le cas où le système est globalement stable). La mise en œuvre d'un tel contrôle est alors facilitée. L'efficacité

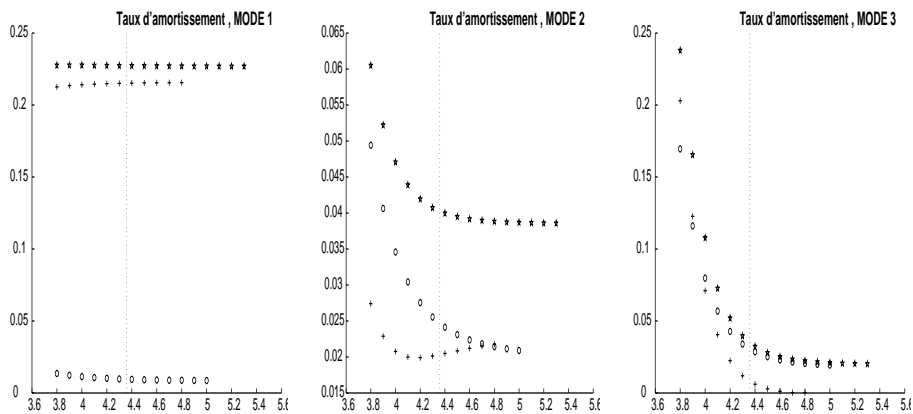


**Figure 2.** Taux d'amortissement pour chacun des trois premiers modes avec un contrôle primal (+), dual (o) ou hybride (★) en fonction du paramètre  $\omega$ .

de ces 3 contrôles dépend aussi de l'ajustement de paramètres [BOU 02]. En optimisant chacune des lois primale ou duale, on restreint la zone de stabilité, et on diminue donc la robustesse de la méthode. En revanche, une optimisation des paramètres pour la loi hybride permet d'augmenter cette zone de stabilité, tout en maintenant une efficacité supérieure aux lois primale ou duale prises séparément. Surtout, l'hybridation des lois permet de contrôler efficacement les *trois* modes ; pour le premier c'est essen-

tiellement le contrôle primal qui va agir, et au contraire pour le 3<sup>e</sup> ce sera le contrôle dual.

Le taux d'amortissement des 3 premiers modes ne dépend pas de la raideur de l'actionneur (figure 3), pour des actionneurs plus raides que celui choisi dans l'expérience (indiqué par des pointillés sur la figure). En revanche, nous remarquons que des actionneurs plus souples contrôlent plus efficacement les modes 2 et 3. Les contrôleurs primal, dual et hybride suivent la même évolution en fonction de la raideur, la stratégie hybride étant la plus efficace et la plus robuste.



**Figure 3.** Taux d'amortissement pour chacun des trois premiers modes avec un contrôle primal (+), dual (o) ou hybride (★) en fonction du logarithme de  $K_e$ .

## 5. Conclusion

La formulation mécanique choisie pour la construction de la loi a une grande importance sur la stabilisation obtenue, et nous pouvons améliorer significativement l'efficacité du contrôle en hybridant des lois issues de formulations privilégiant soit les modes hautes fréquences soit les modes basses fréquences. En prenant des lois hybrides, on augmente l'efficacité et la robustesse du contrôle, sans avoir besoin de modifier la conception du système physique. Ce type d'approche semble donc avoir un grand intérêt dans la recherche de stabilisation robuste de structure de grande envergure.

## 6. Bibliographie

[BOU 02] BOURQUIN F., BRANCHET B., COLLET M., RATIER L., « Primal-dual control synthesis for flexible structures », *3rd World Conference of Structures*, Como, Italy, 2002.

- [BOU 04] BOURQUIN F., JOLY M., COLLET M., RATIER L., « An efficient feedback control algorithm for beams : experimental investigations », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 278, 2004, p. 181-206.
- [KOM 97] KOMORNIK V., « Rapid boundary stabilization of linear distributed systems », *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 35(5), 1997, p. 1591-1613.
- [LEB 92] LEBEAU G., « Contrôle de l'équation de Schrödinger », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 71, 1992, p. 267-291.
- [RAT 00] RATIER L., « Stabilisation rapide des structures et Mise en œuvre expérimentale », Thèse de doctorat, ENS Cachan, France, 2000.
- [TAN 01] TANIDA K., KOIKE Y., « Progress on the application of active vibration control technologies to long span bridges in Japan », *7th International Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation and Active Control of Vibrations of Structures*, Assisi, Italy, October 2-5, 2001.
- [ZAB 92] ZABCZYK J., *Mathematical Control Theory : An Introduction*, Birkhauser, Boston, 1992.