



**HAL**  
open science

# Bipotential et adaptation élastoplastique. Application aux structures de type coques minces avec règle d'écroûissage cinématique non linéaire

Céline Bouby, Géry de Saxcé, Jean-Bernard Tritsch

## ► To cite this version:

Céline Bouby, Géry de Saxcé, Jean-Bernard Tritsch. Bipotentiel et adaptation élastoplastique. Application aux structures de type coques minces avec règle d'écroûissage cinématique non linéaire. 7e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2005, Giens, France. hal-01812886

**HAL Id: hal-01812886**

**<https://hal.science/hal-01812886>**

Submitted on 11 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Bipotentiel et adaptation élastoplastique

## Application aux structures de type coques minces avec règle d'écroissage cinématique non linéaire

Céline Bouby — Géry de Saxcé — Jean-Bernard Tritsch

Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR 8107  
Université des Sciences et Technologies de Lille  
Boulevard Langevin, Cité Scientifique  
59 655 Villeneuve d'Ascq  
celine.bouby@ed.univ-lille1.fr, gery.desaxce@univ-lille1.fr,  
jean-bernard.tritsch@polytech-lille.fr

---

*RÉSUMÉ.* Un certain nombre de matériaux auxquels l'ingénieur est confronté en pratique ne s'intègrent pas dans le cadre des matériaux standards généralisés introduit par Halphen et al. ([HAL 75]). Une approche alternative pour la plasticité non associée provient du modèle des matériaux standards implicites. Dans cette communication, nous nous intéressons aux structures de type coques minces. La théorie du bipotentiel pour l'adaptation élastoplastique nous permet d'introduire l'écroissage cinématique non linéaire. En utilisant la surface d'écoulement d'Hüber-Mises, nous construisons une règle d'écroissage basée sur celle de Mròz et un bipotentiel pour ce modèle. La formulation variationnelle du problème d'adaptation conduit alors à un problème de maximisation sous contraintes pour le calcul du facteur d'adaptation

*ABSTRACT.* Some materials used in engineering applications do not integrate within the framework of generalized standard materials introduced by Halphen and al. ([HAL 75]). An alternative approach in non associated plasticity comes from the implicit standard material model. In this communication, we are interested in the thin shells structures. The bipotential theory for the shakedown enables us to introduce a non linear kinematic hardening rule. By using Hüber-Mises flow rule, we build an hardening rule based on Mròz's one and a bipotential for this model. The variational formulation of the shakedown problem then leads to a maximization problem under constraints for the computation of shakedown factor.

*MOTS-CLÉS :* adaptation élastoplastique, écroissage cinématique non linéaire, matériaux standards implicites, bipotentiel

*KEYWORDS:* shakedown, non linear kinematic hardening rule, implicit standard materials, bipotential

---

## 1. Introduction

Dans cete communication, nous nous intéressons aux structures de type coques minces. Jusqu'à présent, les études d'adaptation élastoplastique de ces structures ont été essentiellement effectuées sous des hypothèses simplificatrices pour la prise en compte de l'érouissage. La théorie du bipotentiel pour l'adaptation élastoplastique nous permet d'introduire l'érouissage cinématique non linéaire. Dans un premier temps, nous rappellerons les fondements théoriques des matériaux standards implicites. Nous présenterons ensuite, pour l'application aux structures de type coques minces, la construction d'une règle d'érouissage cinématique non linéaire, d'un bipotentiel et finalement la formulation du problème d'optimisation par borne supérieure pour la détermination du facteur de charge.

## 2. Approche du bipotentiel pour l'adaptation élastoplastique

Soit un milieu matériel dont l'évolution est décrite à l'aide d'un ensemble de variables internes rangées dans un vecteur  $\kappa$ . Soient  $\dot{\kappa} = (\dot{\epsilon}^p, \dot{\kappa}') \in V$  le vecteur des vitesses généralisées, incluant les vitesses  $\dot{\kappa}'$  des variables internes additionnelles (érouissage,...) et le vecteur des variables associées correspondantes  $\pi = (\sigma, \pi') \in F$ . Les espaces  $V$  et  $F$  sont munis de topologies localement convexes compatibles avec la dualité exprimée par la forme bilinéaire  $(\dot{\kappa}, \pi) \in V \times F \mapsto \dot{\kappa} \cdot \pi \in \mathbb{R}$ . Un bipotentiel est une fonction  $b$  de  $V \times F$  dans  $]-\infty, \infty]$ , séparément convexe, qui satisfait l'inégalité fondamentale généralisant l'inégalité de Legendre-Fenchel ([FEN 49]) :

$$\forall (\dot{\kappa}^*, \pi^*) \in V \times F, b(\dot{\kappa}^*, \pi^*) \geq \dot{\kappa}^* \cdot \pi^* \quad (1)$$

Les couples  $(\dot{\kappa}, \pi)$  pour lesquels les variables sont reliées par la loi dissipative sont qualifiés d'extrémaux au sens où l'égalité est réalisée dans la relation précédente :

$$b(\dot{\kappa}, \pi) = \dot{\kappa} \cdot \pi \quad (2)$$

Combinant les relations (1) et (2) et tenant compte des propriétés de convexité du bipotentiel, on peut déduire que les lois d'évolution sont de la forme :  $\dot{\kappa} \in \partial_\pi b(\dot{\kappa}, \pi)$ ,  $\pi \in \partial_{\dot{\kappa}} b(\dot{\kappa}, \pi)$  où  $\partial_\pi$  (resp.  $\partial_{\dot{\kappa}}$ ) désigne le sous-différentiel lorsqu'on dérive partiellement par rapport à  $\pi$  (resp.  $\dot{\kappa}$ ). Les matériaux dont le comportement peut être décrit à l'aide d'un bipotentiel sont appelés matériaux standards implicites. Physiquement, le bipotentiel tient lieu de puissance plastique de dissipation, et ainsi est supposé positif. Sous la condition d'existence d'un champ de contrainte résiduelle indépendant du temps, une généralisation des théorèmes de bornes de Koiter aux matériaux standards implicites a été proposée par de Saxcé dans [DAN 00]. L'existence de ce champ de contrainte résiduelle a été rigoureusement prouvée par Melan dans [MEL 38] pour les matériaux standards élastiques parfaitement plastiques, mais malheureusement, aucune généralisation de ce théorème n'a pu être énoncée et prouvée pour la classe des matériaux standards implicites. En dépit de cela, les exemples traités nous laisse penser que le fait d'admettre l'existence d'un champ de contrainte résiduelle est acceptable. Soient  $\Omega$  est un corps solide constitué de matériaux élasto-plastiques admettant

des bipotentiels,  $K$  le domaine élastique,  $\sigma^{E_0}$  le champ de contraintes de référence dans le corps élastique fictif,  $\bar{\pi} = (\bar{\rho}, \bar{\pi}')$  un champ de contraintes admissible,  $(\dot{\varepsilon}^p, \dot{\kappa}')$  un champ de vitesses généralisées admissibles et  $\lambda$  le facteur de charge. Le problème de borne supérieure pour le problème d'adaptation s'écrit alors :

$$\text{Sup}_{\lambda, \bar{\pi}} \oint \int_{\Omega} \{ \lambda(\sigma^{E_0} : \dot{\varepsilon}^p) - b[(\bar{\rho} + \lambda\sigma^{E_0}, \bar{\pi}'), (\dot{\varepsilon}^p, \dot{\kappa}')] + \bar{\pi}' \cdot \dot{\kappa}' \} d\Omega dt \quad (3)$$

sous les contraintes :

- $\bar{\rho}$  est un champ de contrainte résiduel
- $\bar{\rho}$  et  $\bar{\pi}'$  sont indépendants du temps et plastiquement admissibles quand on ajoute la réponse en contrainte  $\sigma^E = \lambda\sigma^{E_0}$  dans le corps élastique fictif :

$$\forall x \in \Omega, \forall t, (\sigma^E(x, t) + \bar{\rho}(x), \bar{\pi}'(x)) = (\lambda\sigma^{E_0}(x, t) + \bar{\rho}(x), \bar{\pi}'(x)) \in K$$

### 3. Application aux structures de type coques minces

On se restreint à l'étude des coques minces de révolution chargées de façon axisymétrique et on utilise la théorie simplifiée de modélisation d'une coque ([MOR 83]). Nous supposons l'existence d'un domaine élastique convexe  $K$  limité par la fonction d'écoulement dans l'espace des variables généralisées  $Q = (n \ m)^T$  définie par

$$F_{\pm}(Q) = \sqrt{\left( \frac{3}{2}a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta} \right) \left( n^{\alpha\beta} \pm \frac{3}{2}m^{\alpha\beta} \right) \left( n^{\gamma\delta} \pm \frac{3}{2}m^{\gamma\delta} \right)} - R = 0$$

où les indices grecs varient de 1 à 2,  $R$  est le seuil de plasticité variable et  $a$  le tenseur métrique. Posons  $Q_{\pm} = n \pm \frac{3}{2}m$ . Soit  $A$  la matrice définie positive construite à partir du tenseur métrique telle que :

$$F_{\pm}(Q) = \sqrt{Q_{\pm}^T A Q_{\pm}} - R = f_{\pm}(Q) - R$$

En posant  $B_{\pm} = \begin{pmatrix} A & \pm \frac{3}{2}A \\ \pm \frac{3}{2}A & \frac{9}{4}A \end{pmatrix}$ , on peut encore écrire :  $f_{\pm}(Q) = \sqrt{Q^T B_{\pm} Q}$

#### 3.1. Règle d'écrouissage cinématique non linéaire

Pour modéliser l'écrouissage cinématique, introduisons le centre du domaine élastique (back-stress)  $X = (X_n \ X_m)^T$  avec  $X_{\pm} = X_n \pm \frac{3}{2}X_m$ . Alors, le domaine élastique prend la forme :

$$K_E = \{ (Q - X) \text{ tel que } f_+(Q - X) - R \leq 0 \text{ et } f_-(Q - X) - R \leq 0 \}.$$

Pour représenter l'écrouissage cinématique non linéaire, nous utilisons à présent un modèle avec un domaine limite, homothétique du domaine élastique initial, défini dans l'espace des points  $Q^{\infty} = (n^{\infty} \ m^{\infty})^T$  par :

$$K_{\infty} = \{ Q^{\infty} \text{ tel que } f_+(Q^{\infty}) - R_{\infty} \leq 0 \text{ et } f_-(Q^{\infty}) - R_{\infty} \leq 0 \}.$$

Dans un tel modèle de coque, la surface d'écoulement est composée de deux surfaces régulières  $S_{\pm}$  d'équations  $f_{\pm}(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) = R$  sur lesquelles la normale est bien définie. Si une seule de ces deux surfaces est active, soit  $S_+$  pour fixer les idées, la loi d'écoulement plastique est parfaitement définie par la règle de normalité :

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix} = \dot{p}_+ \frac{\partial f_+}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) = \dot{p}_+ \mathbf{B}_+ \frac{\mathbf{Q} - \mathbf{X}}{f_+(\mathbf{Q} - \mathbf{X})} = \dot{p}_+ \mathbf{B}_+ \frac{\mathbf{Q} - \mathbf{X}}{R}$$

La règle d'érouissage de Mròz est construite comme suit. Soit  $\mathbf{Q}^{\infty}$  le point de la surface limite  $\partial K_{\infty}$  de même normale que la normale à  $S_+$  en  $\mathbf{Q}$ , donc tel que :

$$\mathbf{Q}^{\infty} = \frac{R_{\infty}}{R}(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) \quad (4)$$

Suivant Mròz, la variation infinitésimale de  $\mathbf{X}$  se produira dans la direction joignant  $\mathbf{Q}$  à  $\mathbf{Q}^{\infty}$ , soit, en introduisant  $X_{\infty} = R_{\infty} - R$  :

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mu}_+(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\infty}) = \dot{\mu}_+ \left( \mathbf{Q} - \frac{R_{\infty}}{R}(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) \right) = \dot{\mu}_+ \left( X_{\infty} \frac{\mathbf{Q} - \mathbf{X}}{R} - \mathbf{X} \right).$$

Ceci suggère de poser pour le taux de la variable d'érouissage cinématique  $\dot{\alpha}$  duale de  $\mathbf{X}$  :

$$\dot{\alpha} = \mathbf{B}_+ \dot{\mathbf{X}} = \dot{\mu}_+ \mathbf{B}_+(\mathbf{Q}^{\infty} - \mathbf{Q}) = \dot{\mu}_+ X_{\infty} \mathbf{B}_+ \frac{\mathbf{Q} - \mathbf{X}}{R} - \dot{\mu}_+ \mathbf{B}_+ \mathbf{X}. \quad (5)$$

En identifiant  $\dot{p}_{\pm}$  à  $\dot{\mu}_{\pm} X_{\infty}$ , on obtient alors :

$$\dot{\alpha} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{p}_+ \mathbf{B}_+ \frac{\mathbf{X}}{X_{\infty}}. \quad (6)$$

Lorsque  $X_{\infty}$  tend vers l'infini, on retrouve en cas particulier la règle linéaire de Prager  $\dot{\alpha} = \dot{\mathbf{q}}$ . Dans le modèle de coque, le problème est de généraliser cette règle quand les deux surfaces  $S_+$  et  $S_-$  sont simultanément actives. La normale n'est alors plus définie et doit être remplacée par une sous normale. La loi d'écoulement peut s'écrire sous la forme généralisée de Koiter :

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{p}_+ \frac{\partial f_+}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) + \dot{p}_- \frac{\partial f_-}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) = (\dot{p}_- \mathbf{B}_- + \dot{p}_+ \mathbf{B}_+) \frac{\mathbf{Q} - \mathbf{X}}{R}. \quad (7)$$

Lorsque les deux surfaces sont actives, nous considérons, pour des raisons de continuité, que le point  $\mathbf{Q}^{\infty}$  associé à  $\mathbf{Q}$  est toujours donné par (4) et, par analogie avec (7), nous remplaçons (5) par :

$$\dot{\alpha} = (\dot{\mu}_+ \mathbf{B}_+ + \dot{\mu}_- \mathbf{B}_-)(\mathbf{Q}^{\infty} - \mathbf{Q}).$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient la règle d'érouissage :

$$\dot{\alpha} = \dot{\mathbf{q}} - (\dot{p}_+ \mathbf{B}_+ + \dot{p}_- \mathbf{B}_-) \frac{\mathbf{X}}{X_{\infty}}, \quad (8)$$

qui contient le cas particulier où seule une surface est active (par exemple (6)) et généralise la règle de Mròz lorsque plusieurs surfaces sont actives.

### 3.2. Bipotentiel et théorème de borne supérieure

Nous voudrions à présent construire le bipotentiel correspondant à la loi de comportement donnée par (7) et (8). Pour garantir la convexité séparée, nous dédoublons la variable  $R$  en définissant des seuils de plasticité  $R_+$  et  $R_-$  distincts pour chacune des surfaces  $S_+$  et  $S_-$  (quitte à égaliser leur valeur plus tard), et nous introduisons le cône convexe :

$$K = \{(\mathbf{Q} - \mathbf{X}, R_+, R_-) \text{ tel que } f_+(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) - R_+ \leq 0 \text{ et } f_-(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) - R_- \leq 0\}. \quad (9)$$

Les variables d'érouissage isotrope correspondantes seront identifiées à  $p_+$  et  $p_-$ . Introduisant  $\dot{\mathbf{q}}_{\pm} = \frac{1}{2}\dot{\gamma} \pm \frac{1}{3}\dot{\chi}$  et les déformations équivalentes :  $g_{\pm}(\dot{\mathbf{q}}) = \sqrt{\dot{\mathbf{q}}_{\pm}^T \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{q}}_{\pm}}$ , le cône polaire de (9) est donné par :

$$K^* = \{(\dot{\mathbf{q}}, -\dot{p}_+, -\dot{p}_-) \text{ tel que } g_+(\dot{\mathbf{q}}) \leq \dot{p}_+ \text{ et } g_-(\dot{\mathbf{q}}) \leq \dot{p}_-\}.$$

La loi d'écoulement plastique est alors équivalente à l'inclusion différentielle :

$$(\dot{\mathbf{q}}, -\dot{p}_+, -\dot{p}_-) \in \partial \prod_K (\mathbf{Q} - \mathbf{X}, R_+, R_-) = K^*$$

où  $\prod_K$  désigne la fonction indicatrice du domaine élastique  $K$ . On introduit les vitesses  $\dot{\boldsymbol{\kappa}} = (\dot{\mathbf{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p}_+, -\dot{p}_-)$ , les variables associées  $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{Q}, \mathbf{X}, R_+, R_-)$  et la fonction séparément convexe :

$$\begin{aligned} b(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi}) &= \frac{(f_+(\mathbf{X}))^2}{X_{\infty}} \dot{p}_+ + \frac{(f_-(\mathbf{X}))^2}{X_{\infty}} \dot{p}_- + \prod_K (\mathbf{Q} - \mathbf{X}, R_+, R_-) \quad (10) \\ &+ \prod_{K^*} (\dot{\mathbf{q}}, -\dot{p}_+, -\dot{p}_-) + \prod_{\{0\}} \left( \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\mathbf{q}} + (\dot{p}_+ \mathbf{B}_+ + \dot{p}_- \mathbf{B}_-) \frac{\mathbf{X}}{X_{\infty}} \right) \end{aligned}$$

PROPOSITION. — La fonction (10) est un bipotentiel.

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que pour tout couple  $(\dot{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\pi})$  tel que  $(\mathbf{Q}, \mathbf{X}, R_+, R_-) \in K$ ,  $(\dot{\mathbf{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p}_+, -\dot{p}_-) \in K^*$  et (8) vérifiée, on a :

$$(\dot{p}_+ \mathbf{B}_+ + \dot{p}_- \mathbf{B}_-) \frac{\mathbf{X}}{X_{\infty}} \geq \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{X}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R_+ \dot{p}_+ - R_- \dot{p}_-. \quad (11)$$

Comme  $(\dot{\mathbf{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p}_+, -\dot{p}_-) \in K^*$  et  $(\mathbf{Q}, \mathbf{X}, R_+, R_-) \in K$ , il vient :

$$R_+ \dot{p}_+ + R_- \dot{p}_- \geq R_+ g_+(\dot{\mathbf{q}}) + R_- g_-(\dot{\mathbf{q}}) \geq f_+(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) g_+(\dot{\mathbf{q}}) + f_-(\mathbf{Q} - \mathbf{X}) g_-(\dot{\mathbf{q}}).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz généralisée et en remarquant que  $(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{X}_+)^T \dot{\mathbf{q}}_+ + (\mathbf{Q}_- - \mathbf{X}_-)^T \dot{\mathbf{q}}_- = (\mathbf{Q} - \mathbf{X})^T \dot{\mathbf{q}}$ , on obtient  $R_+ \dot{p}_+ + R_- \dot{p}_- \geq \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{X}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}}$ . L'usage de la règle d'érouissage (8) conduit alors (11).

PROPOSITION. — Les couples extrémaux pour (10) vérifient la loi de comportement (7) et (8), et réciproquement.

*Démonstration.* — Se reporter à [DAN 00] pour trouver une démonstration similaire.

Notons que l'on peut considérer à l'état limite que le cycle de ruine est stabilisé, ce qui permet d'égaliser  $R_+$  et  $R_-$  à la limite élastique stabilisée  $\bar{R}$ . En adaptant la formulation (3) au modèle construit, on peut établir le problème d'optimisation à résoudre pour obtenir le facteur d'adaptation :

$$\underset{\lambda, (\bar{Q}, \bar{X})}{Sup} \iint_{\Omega} \left( \lambda (\mathbf{Q}^{E_0})^T \dot{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{X}}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \bar{R}(\dot{p}_+ + \dot{p}_-) - \frac{(f_+(\bar{\mathbf{X}}))^2}{X_{\infty}} \dot{p}_+ - \frac{(f_-(\bar{\mathbf{X}}))^2}{X_{\infty}} \dot{p}_- \right) d\Omega dt$$

sous les contraintes :

- $(\lambda \mathbf{Q}^{E_0} + \bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{X}}, \bar{R}) \in K$
- $\bar{\mathbf{Q}}$  est un champ de contrainte résiduel.

Lors de l'implémentation, après chaque optimisation du problème ci-dessus, une réactualisation des vitesses  $(\dot{\mathbf{q}}, -\dot{\boldsymbol{\alpha}}, -\dot{p}_+, -\dot{p}_-)$  sera effectuée et ceci jusqu'à convergence.

#### 4. Conclusion

Le modèle des matériaux standards implicites nous a permis ici de prendre en compte l'écroutissage cinématique non linéaire pour la modélisation de coques minces. Cela nous a conduit à la formulation du problème de borne supérieure pour le problème d'adaptation. Ce problème d'optimisation est ensuite inséré dans un code de calcul basé sur l'utilisation des éléments finis d'équilibre développés par Morelle et al. ([MOR 83]) et comparé avec le modèle à deux surfaces de Weichert et al. ([WEI 88]).

#### Bibliographie

- [DAN 00] DANG VAN K., DE SAXCÉ G., MAIER G., POLIZZOTTO C., PONTER A., SIEMASZKO A., WEICHERT D. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads* Editions D. Weichert & G. Maier, CISM Courses and Lectures, vol. 432, Springer Wien, New-York.
- [FEN 49] FENCHEL W., « On conjugate convex functions », *Canad. J. Math.*, 1949, p. 73-77.
- [HAL 75] HALPHEN B., NGUYEN QUOC SON, « Sur les matériaux standards généralisés », *J. de Mécanique*, vol. 14, 1975, p. 39-63.
- [HIR 98] HIRIART-URRUTY J.-B., *Optimisation et analyse convexe*, Presses Universitaires de France, Paris, 1998.
- [MEL 38] MELAN E., « Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums », *Ing. Arch.*, vol. 9, 1938, p. 116-126.
- [MOR 83] MORELLE P., NGUYEN DANG HUNG, « Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et coques de révolution par les éléments finis d'équilibre », *J. de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 2, 1983, p. 567-599.
- [WEI 88] WEICHERT D., GROSS-WEEGE J., « The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition », *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 30, 1988, p. 757-767.