



**HAL**  
open science

# Construction d'une loi de comportement isotrope transverse pour la simulation du thermoformage de thermoplastiques chargées de fibres

Nicolas Chevaugeon, Erwan Verron, Bernard Peseux

► **To cite this version:**

Nicolas Chevaugeon, Erwan Verron, Bernard Peseux. Construction d'une loi de comportement isotrope transverse pour la simulation du thermoformage de thermoplastiques chargées de fibres. 15e Congrès Français de Mécanique, Sep 2001, Nancy, France. hal-01805113

**HAL Id: hal-01805113**

**<https://hal.science/hal-01805113>**

Submitted on 1 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# CONSTRUCTION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT ISOTROPE TRANSVERSE POUR LA SIMULATION DU THERMOFORMAGE DE THERMOPLASTIQUES CHARGÉS DE FIBRES

Nicolas CHEVAUGEON, Erwan VERRON et Bernard PESEUX

*Laboratoire de Mécanique et Matériaux - Division Structures  
ÉCOLE CENTRALE DE NANTES 1, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 3, France*

## Résumé :

*Cet article traite de la construction d'un modèle de comportement hyperélastique isotrope transverse et de son application à la simulation par éléments finis du procédé de thermoformage de matériaux chargés de fibres. Dans un premier temps, nous développons l'expression générale de l'énergie de déformation en terme d'invariants tensoriels prenant en compte l'anisotropie induite par les fibres. Puis, pour illustrer notre approche, nous présentons la simulation par éléments finis d'un cas de thermoformage simple, mettant en évidence la perte de symétrie due aux fibres.*

## Abstract :

*The present paper deals with the construction of a hyperelastic, transversely isotropic constitutive behaviour and its application in a finite element simulation of the thermoforming process for fiber loaded materials. First, a general expression of the strain energy function in terms of tensorial invariants is developed taking into consideration fibers induced anisotropy. Then, in order to illustrate our approach, the finite element simulation of a simple thermoforming case which illustrate the loss of symmetry induced by fibers is presented.*

## Mots clés :

**Thermoformage, Hyperélasticité, Anisotropie induite par des fibres**

## Introduction

La simulation par éléments finis des problèmes liés au thermoformage et plus généralement au soufflage de membranes non-linéaires, a été analysée de manière intensive dans le cas de matériaux isotropes. En 1989, Zamani *et al.* (1) ont recensé et analysé les publications sur ces sujets. Depuis, deLorenzi et Nied (2) ont examiné les simulations du moulage par soufflage et du thermoformage. D'après leurs observations expérimentales, ils font l'hypothèse que les parois thermoplastiques portées au dessus de leur température de transition vitreuse peuvent être modélisées par des membranes hyperélastiques. Les différents auteurs utilisent une approche quasistatique du problème. Plus récemment, certains auteurs comme Marckmann *et al.* (3) préfèrent considérer les effets inertiels et utilisent une approche dynamique explicite pour résoudre le problème. Tous ces travaux s'intéressent aux matériaux isotropes. Il n'y a que peu d'études concernant le thermoformage ou le soufflage de thermoplastiques renforcés de fibres. Certains auteurs utilisent des approches développées pour le moulage par injection de matériaux chargés de fibres (4). Le matériau est alors décrit à l'échelle microscopique (cellule unitaire autour d'une fibre) et considéré comme un fluide visqueux contenant des solides rigides représentant les fibres. De ce point de vue microscopique et en utilisant des techniques d'homogénéisation, les auteurs construisent des lois de comportement macroscopiques de type fluide visqueux anisotrope, formulées en terme de vitesse de déformation (5).

L'objectif de notre travail est d'adapter les développements classiques relatifs au thermoformage des matériaux isotropes au cas plus général de matériaux anisotropes. En suivant les travaux de Spencer (6), nous avons choisi de décrire l'anisotropie induite par l'alignement des fibres dans les thermoplastiques portés au dessus de leur température de transition vitreuse à une échelle macroscopique en utilisant uniquement les propriétés de symétries matérielles. Cet article décrit donc la construction et l'utilisation d'un modèle de comportement hyperélastique isotrope transverse pour la simulation du thermoformage. Ce type de théorie a été utilisé avec succès par Kyriacou *et al.* (7) pour résoudre des problèmes de soufflage libre de membrane.

## 1 Loi de comportement hyperélastique anisotrope

Dans ce premier paragraphe, la loi de comportement est mise en place. Les fibres sont considérées alignées par le processus de fabrication de la paraison initiale (par exemple, l'injection). On suppose donc que le matériau suit une loi de comportement isotrope transverse.

### 1.1 Définitions des contraintes et des déformations

Au voisinage d'un point matériel  $\mathcal{P}$ , repéré par un vecteur  $\mathbf{X}$  dans une configuration initiale et  $\mathbf{x}$  dans une configuration actuelle. On note  $\mathbf{F}$  le tenseur gradient de la transformation,  $\mathbf{C}$  le tenseur des dilatations de Cauchy Green droit et  $\mathbf{E}$  le tenseur des déformations de Green-Lagrange, respectivement définis par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (1)$$

où  $\mathbf{I}$  désigne le tenseur identité et  $\cdot^T$  l'opérateur de transposition.

Soient  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{S}$ , respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, définis par:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \quad d\mathbf{F} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} dS \quad (2)$$

où  $d\mathbf{f}$  (resp.  $d\mathbf{F}$ ) est la force appliquée à la surface orientée élémentaire  $\mathbf{n} ds$  (resp.  $\mathbf{N} dS$ ) dans la configuration déformée (resp. initiale).

### 1.2 Construction de l'énergie de déformation

Les matériaux hyperélastiques sont caractérisés par l'existence d'une énergie de déformation  $W$  à partir de laquelle les contraintes peuvent être dérivées. En écrivant cette énergie comme une fonction de  $\mathbf{C}$ , on montre que  $W$  satisfait automatiquement le principe d'objectivité (8). En prenant en compte les symétries matérielles, on peut limiter la "façon" dont  $W$  dépend de  $\mathbf{C}$ . Toute transformation orthogonale membre du groupe de symétrie du matériau,  $g$ , doit conserver l'énergie de déformation et donc vérifier :

$$W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in g \quad (3)$$

Par exemple, le groupe de symétrie d'un matériau isotrope est le groupe de toutes les transformations orthogonales ( $g = \mathcal{O}(3)$ ).

Dans le cas des matériaux renforcés de fibres alignées, il faut déterminer le groupe de symétrie. On suppose l'orientation des fibres localement définie par un vecteur unitaire noté

$\mathbf{a}_0(\mathbf{X})$ . Le groupe de symétrie isotrope transverse caractérisant au mieux un milieu contenant des fibres alignées est généralement noté  $g_5$  et est donné par (9) :

$$g_5 = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) / \mathbf{Q}\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \text{ ou } -\mathbf{a}_0\} \quad (4)$$

Un tenseur d'anisotropie (ou un groupe de tenseurs) est défini comme étant le tenseur (ou le groupe) caractérisant le groupe de symétrie. Le groupe  $g_5$  est caractérisé par le tenseur d'ordre deux  $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ , noté  $\mathbf{A}$ . On a alors :

$$\mathbf{Q} \in g_5 \Leftrightarrow \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T = \mathbf{A} \quad (5)$$

On montre que :

$$W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in g_5 \Leftrightarrow W(\mathbf{C}) = \overline{W}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = \overline{W}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(3) \quad (6)$$

Ainsi,  $\overline{W}$  une fonction isotrope de deux tenseurs. On peut donc lui appliquer les théorèmes de représentation (10) et écrire  $W$  comme une fonction des invariants de  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}$  et de leurs produits. Compte tenu des particularités de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{A}$ , le jeu d'invariants nécessaires pour décrire  $W$  se limite à cinq (11) :

$$W(\mathbf{C}) = \widehat{W}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (7)$$

avec :

$$I_1 = \text{tr}\mathbf{C} \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}\mathbf{C})^2 - \text{tr}\mathbf{C}^2] \quad I_3 = \det\mathbf{C} \quad I_4 = \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \quad I_5 = \text{tr}(\mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{A}) \quad (8)$$

Dans le cas isotrope, le tenseur d'anisotropie est le tenseur identité et le jeu d'invariants est réduit au trois premiers (12).

En écrivant l'énergie de déformation comme une fonction de ce jeu d'invariants, l'objectivité de la loi de comportement et les relations de symétrie imposées par l'orientation des fibres alignées dans le matériau sont assurées. Pour les matériaux incompressibles, on peut de plus éliminer  $I_3$  ( $I_3 = 1$  pour une transformation à volume constant). Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff se calcule alors par différenciation de l'énergie de déformation par rapport à  $\mathbf{C}$  (8) (variante de la formule de Doyle-Ericksen) :

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = -p\mathbf{C}^{-1} + 2 \sum_{i=1,2,4,5} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \quad (9)$$

où  $p$  est une pression hydrostatique interdisant les variations de volume dans le cas incompressible. Les dérivées des invariants par rapport à  $\mathbf{C}$  sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{I} & \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} &= I_1 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{C} & \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} &= I_3 \cdot \mathbf{C}^{-1} \\ & & & & \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 & \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 \end{aligned} \quad (10)$$

Pour définir complètement un modèle de comportement pour un matériau hyperélastique isotrope transverse incompressible, il reste donc à choisir une fonction  $\widehat{W}$  des quatre invariants  $I_1, I_2, I_4, I_5$ . Comme proposé par Kyriacou (7), nous choisissons un modèle linéaire par rapport aux trois premiers invariants, généralisant le modèle de Mooney (12) :

$$\widehat{W} = \Phi(I_1 - 3) + \Psi(I_2 - 3) + \Theta I_4 \quad (11)$$

## 2 Application numérique

### 2.1 Description du code de calcul

La loi de comportement définie précédemment a été implantée dans un code de calcul par éléments finis dédié au thermoformage (3). La formulation et l'implémentation ont été validées sur des cas de soufflage libre comparés avec les résultats de Kyriacou (7).

La structure à thermoformer est modélisée par une membrane. Le schéma de résolution est de type dynamique explicite, prenant donc en compte les effets d'inertie. Le code de calcul est muni d'un module de remaillage qui permet de raffiner le modèle de la membrane en cours de calcul, notamment au voisinage des coins du moule. De plus, un module gère la détection du contact entre la membrane et le moule. Lorsque un noeud a touché le moule, il est bloqué, ce qui permet de simuler le contact collant entre le moule froid et la membrane chaude.

### 2.2 Simulation d'un cas de thermoformage

Dans l'exemple qui suit, quelques résultats concernant une application simple de thermoformage sont examinés.

La mise en forme d'une membrane carrée initialement plane dans un moule de section carrée est considéré. La répartition finale d'épaisseur sur la pièce moulée est un résultat important fourni par la simulation numérique. Dans le but d'évaluer l'influence des renforts de fibres sur la géométrie finale, nous comparons donc la distribution finale d'épaisseur avec un calcul isotrope (matériau de Mooney). Les constantes matérielles sont choisies comme suit :

$$\Phi = 1. \quad \Psi = 0. \quad \Theta = 3. \quad (12)$$

La figure 1 présente quatre étapes du soufflage de la membrane dans le moule, pour les cas isotrope et anisotrope. La prise en compte des symétries matérielles et géométriques du problème permet de ne modéliser qu'un quart de la membrane. L'épaisseur de la membrane est représentée par les niveaux de gris. Dans le cas anisotrope, la direction des fibres est schématisée par des lignes sur la surface de la membrane. Dans le cas isotrope, la distribution d'épaisseur respecte les symétries de la géométrie. Dans le cas anisotrope, cette symétrie est perdue.

La figure 2 montre l'évolution de l'épaisseur de la membrane le long des médianes repérées par le schéma dans le coin supérieur droit de la figure. Dans le cas isotrope, la même distribution d'épaisseur est obtenue le long des lignes  $XZ$  et  $YZ$ , et est représentée par la courbe continue sur la figure. Dans le cas isotrope transverse, les fibres sont orientées comme sur la figure 1. La distribution d'épaisseur est différente le long des deux lignes (en pointillés sur le graphique). Dans les deux cas, la plus grande épaisseur est observée près des bords bloqués et la plus faible dans les coins supérieurs du moule.

Une observation importante faite par deLorenzi et Nied (2) sur le thermoformage de matériaux isotropes concerne la distribution finale d'épaisseur. Celle-ci est en général peu dépendante de la loi de comportement du matériau, mais semble surtout imposée par la géométrie du moule. Notre exemple montre que le comportement anisotrope, dû à la présence des fibres, influence sensiblement la distribution finale d'épaisseur pour les pièces thermoformées.

## Conclusion

Dans cet article, une forme générale de l'énergie de déformation pour les matériaux isotropes transverses est développée. Cette fonction dépend d'un jeu d'invariants tensoriels assu-

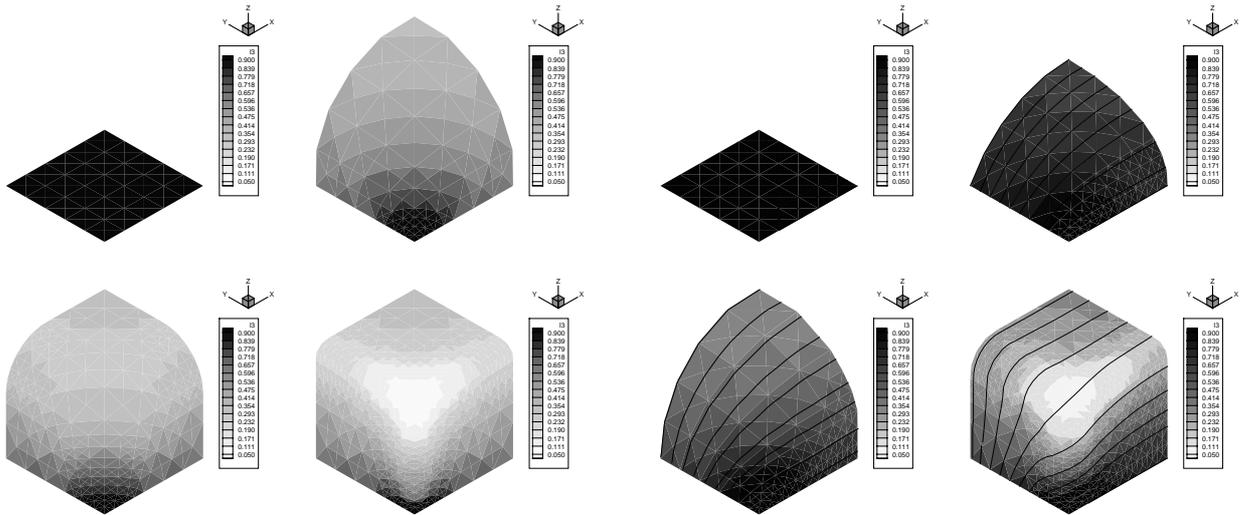


FIG. 1 – Quatre étapes de la simulation du thermoformage d'une membrane carrée initialement plane dans un moule de section carrée. A gauche: cas isotrope, à droite cas anisotrope.

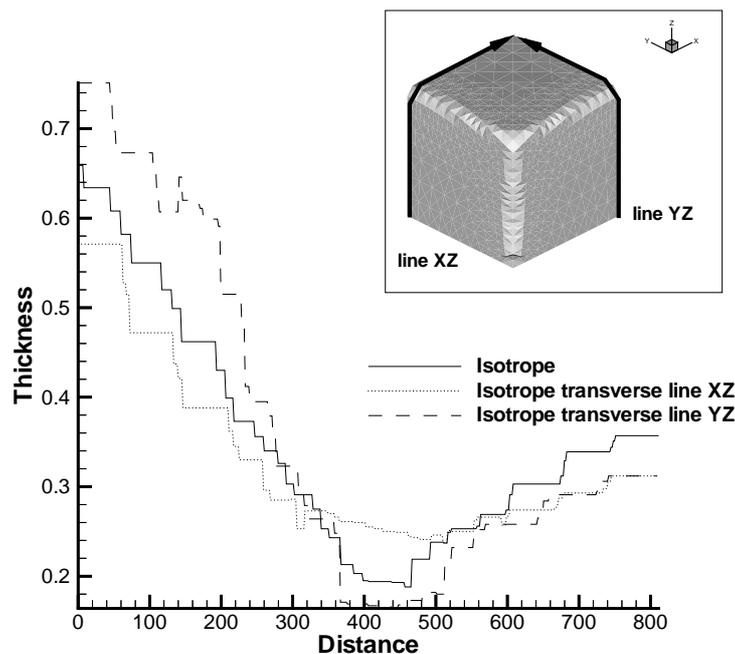


FIG. 2 – Distribution de l'épaisseur finale le long de la membrane.

rant le principe d'objectivité et les conditions de symétries matérielles. De plus, cette formulation a été implantée avec succès dans un code de calcul dédié à la simulation du thermoformage.

Les développements en cours de ces travaux concernent la mise en place d'une contrepartie viscoélastique fondée sur une approche hiérarchique permettant de prendre en compte les effets de mémoire parfois rencontrés pour ce type de matériaux. Parallèlement, dans le but de déterminer les paramètres de la loi de comportement, un rhéomètre biaxial est en développement.

## Références

- [1] Zamani, N. G., Watt, D. F., et Esteghamatian, M. 1989, Status of the finite element method in the thermoforming process, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 2681-2693.
- [2] deLorenzi, H. G., et Nied, H. F. 1991, Finite element simulation of thermoforming and blow molding, In A. I. Isayev, editor, *Progress in Polymer Processing*, 117-171, Hanser Verlag.
- [3] Marckmann, G., Verron, E., et Peseux, B. 2001 Finite element analysis of blow-molding and thermoforming using a dynamic explicit procedure, *Polym. Eng. Sci.*, à paraître.
- [4] Bhattacharyya, D. 1997 *Composite sheet forming*, Composite Materials Series, **11**, Elsevier.
- [5] Pickett, A. K., et Johnson, A. F. 1996 Numerical simulation of the forming process in long fibre reinforced thermoplastics, *Composite Mat. Tech.*, **V**, 233-242.
- [6] Spencer, A. J. M. 1984 *Continuum theory of the mechanics of fibre reinforced composite*, Springer-Verlag.
- [7] Kyriacou, S. K., Schwab, C., et Humphrey, J. D. 1996 Finite element analysis of nonlinear orthotropic hyperelastic membranes, *Comput. Mech.*, **18**, 269-278.
- [8] Beatty, M. F. 1987 Topics in finite elasticity: hyperelasticity of rubber, elastomers and biological tissues - with examples, *Appl. Mech. Rev.*, **40**, 1699-1734.
- [9] Liu, Shih I. 1982 On representation of anisotropic invariants, *Int. J. Engng Sci.*, **20**, 10, 1099-1109
- [10] Ball, J. M. 1977 Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **63**, 337-403.
- [11] Burton, A. J., et Bonet, J. 1998 A simple orthotropic, transversely isotropic hyperelastic constitutive equation for large strain computations, *Comput. Methods in Appl. Mech. Engng*, **162**, 151-164.
- [12] Treloar L. R. G. 1976 The mechanics of rubber elasticity, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A351**, 301-330.