



**HAL**  
open science

## Contrôle des vibrations d'un oscillateur passif : stabilisation en temps fini et par remodelage d'énergie

Marc Wijnand, Brigitte d'Andréa-Novel, Thomas Hélie, David Roze

### ► To cite this version:

Marc Wijnand, Brigitte d'Andréa-Novel, Thomas Hélie, David Roze. Contrôle des vibrations d'un oscillateur passif: stabilisation en temps fini et par remodelage d'énergie. 14ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2018, Le Havre, France. hal-01795878

**HAL Id: hal-01795878**

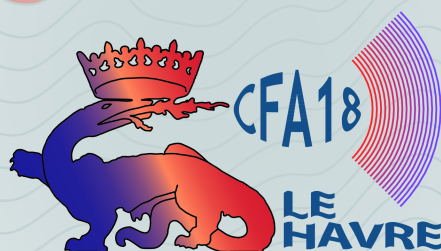
**<https://hal.science/hal-01795878v1>**

Submitted on 3 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CFA '18 LE HAVRE ■ 23-27 avril 2018**  
**14<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique**



**Contrôle des vibrations d'un oscillateur passif : stabilisation en temps fini et par remodelage d'énergie**

M. Wijnand, B. d'Andréa-Novel, T. Hélie et D. Roze

Equipe S3AM, IRCAM-CNRS-Sorbonne Université, UMR9912, 1, place Igor Stravinsky, 75004 Paris,  
France

marc.wijnand@ircam.fr

On s'intéresse au contrôle d'un oscillateur passif, avec pour objectif de le stabiliser sur un état d'équilibre cible. Dans cet article, deux approches de l'automatique sont examinées, comparées, puis associées.

La première approche repose sur le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (systèmes passifs admettant un bilan de puissance équilibré) et une méthode de contrôle s'appuyant sur la passivité, par remodelage d'énergie et réallocation d'amortissement (méthode dite IDA-PBC). Cette méthode s'appuie sur une fonction de Lyapunov, qui correspond à une énergie physique naturelle du système.

La seconde approche repose sur une représentation d'état standard du système et une méthode de contrôle non linéaire, permettant d'atteindre un point d'équilibre en un temps fini, propriété utile pour des applications avec des contraintes de temps. Cette méthode s'appuie sur une analyse par fonction de Lyapunov homogène.

On montre alors que cette méthode de contrôle en temps fini admet une reformulation passive de type SHP, à partir de la fonction de Lyapunov.

Enfin, l'association de ces approches est examinée sur des expériences numériques : on construit des simulations à passivité garantie du système original (linéaire) et du système bouclé (non linéaire); on étend cette étude au cas où le système original comporte des non-linéarités (par exemple de type raidissant). Les résultats permettent de commenter l'intérêt de ce type de contrôleur et d'apporter des interprétations énergétiques.

## 1 Organisation de l'article

Nous introduisons le modèle linéaire d'étude initiale dans la Section 2, un système masse-amortisseur-ressort, que nous réinterprétons dans le formalisme des SHP dans la Section 3. Nous appliquons deux classes de contrôle : des méthodes de contrôle basées sur l'énergie (Section 4) et une méthode de contrôle en temps fini (Section 5). Ensuite, nous mentionnons dans la Section 6 les méthodes de simulation que nous appliquons finalement à un système linéaire et un système avec une non-linéarité dans la Section 7.

### Notations et définitions

Nous notons une fonction définie positive  $f$  comme  $f(x) > 0$ , une matrice (semi)-définie positive  $A$  comme  $A \succeq 0$ , la matrice d'unité de taille  $n \times n$  comme  $I_n$ , la matrice nulle de taille  $n \times n$  comme  $O_n$ .

Une fonction continue  $\theta = [0, b[ \rightarrow [0, +\infty[$  appartient à la classe de fonctions de comparaison  $\mathcal{K}$  [1] si elle est strictement croissante et  $\theta(0) = 0$ .

## 2 Modèle linéaire d'étude initiale

Considérons un oscillateur mécanique linéaire amorti (masse-amortisseur-ressort) de masse  $m$ , d'amortissement  $c$  et de raideur  $k$ , excité par une force extérieure  $f_{ext}$  (Figure 1). Cet oscillateur est décrit par l'équation différentielle ordinaire

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{ext}$$

où la position de la masse est repérée par rapport à l'équilibre ( $x = 0$  au repos).

Ce système d'entrée  $u = f_{ext}$  admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (1)$$

dans laquelle l'état  $\mathbf{x} \triangleq [x_1 \quad x_2]^T$  est défini par  $x_1 \triangleq x$  (position),  $x_2 \triangleq p = m\dot{x}$  (quantité de mouvement) et initialisé par  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ .

En fonction des capteurs à disposition, nous définissons la sortie mesurée

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (2)$$

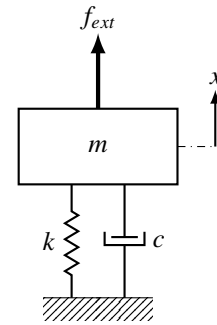


FIGURE 1 – Système masse-ressort-amortisseur

## 3 Formulation en Système Hamiltonien à Ports

Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP, [2]) se fonde sur une vision énergétique d'un système. Un système est composé de trois types de composants élémentaires : des composants stockant de l'énergie (ici : masse, ressort), des composants dissipant de la puissance (amortissement), et composants externes connectés au système (ici : une force extérieure qui travaille selon la vitesse produite par le système).

Une formulation classique d'un modèle sous forme SHP est introduite ci-dessous.

**Définition 1 (SHP (formulation classique)).** Une formulation classique d'un Système Hamiltonien à Ports (SHP) en dimension finie  $n \geq 1$ , d'état  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , est

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J} - \mathbf{R})\nabla H(\mathbf{x}) + \mathbf{G}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{G}^T \nabla H(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (3)$$

pour laquelle :

- (i)  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q$  est l'entrée de dimension  $q \geq 1$ ,
- (ii)  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  est la sortie associée à l'entrée (différente de la sortie mesurée  $\mathbf{y}_m$  (2)),
- (iii)  $H(\mathbf{x}) > 0$  est la fonction hamiltonienne qui fournit l'énergie totale  $E$  stockée dans le système en fonction de son état,
- (iv)  $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^T$  est une matrice antisymétrique ( $n \times n$ ) exprimant les échanges entre les composants stockants,
- (v)  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \geq 0$  est une matrice symétrique ( $n \times n$ ) dont la positivité traduit la dissipation,

(vi)  $G$  est une matrice ( $n \times q$ ).

Les matrices peuvent dépendre de l'état  $x$ , de l'entrée  $u$  ou de paramètres constants ou variant dans le temps.

La propriété fondamentale d'un SHP est de vérifier un bilan de puissance : la nullité de  $B \triangleq dE/dt + P_{dissip} - P_{ext}$  où la variation d'énergie est  $dE/dt = \nabla H(x)^\top \dot{x}$ , la puissance dissipée  $P_{dissip} = \nabla H(x)^\top R \nabla H(x) \geq 0$  est positive d'après (v) et la puissance extérieure est  $P_{ext} = y^\top u$ . En effet, d'après (3),

$$B = \underbrace{\nabla H(x)^\top J \nabla H(x)}_{= 0 \text{ d'après (iv)}} + \underbrace{\nabla H(x)^\top G u}_{y^\top u} - y^\top u = 0.$$

L'énergie de l'oscillateur considéré ici est composée de l'énergie potentielle du ressort ( $kx^2/2$ ) et de l'énergie inertielle de la masse ( $p^2/(2m)$ ). Le Hamiltonien est donné par

$$H(x) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2m}x_2^2. \quad (4)$$

À partir de l'équation dynamique (1), nous obtenons le modèle sous forme SHP :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} kx_1 \\ \frac{1}{m}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kx_1 \\ \frac{1}{m}x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (5)$$

On peut remarquer que  $\nabla H(x)$  isole les lois constitutives des composants stockants, que la première ligne décrit l'égalité des vitesses pour la masse et du ressort, et que la seconde exprime un bilan de forces : ces deux lignes expriment en fait une connexion rigide entre les composants.

La matrice  $J$  représente l'échange d'énergie entre le ressort et la masse, et la matrice  $R$  représente la dissipation d'énergie par l'amortisseur.

On remarque également que l'on ne peut pas choisir la signification physique de la sortie du modèle SHP : elle est impliquée par le choix de l'entrée. L'entrée étant la force extérieure, la sortie doit être la vitesse de son point de contact pour que leur produit exprime la puissance apportée au système par ce point de contact (port d'interconnexion).

## 4 Contrôle basé sur l'énergie

Le formalisme des SHP nous permet de construire des lois de commande basées sur l'énergie. Dans cet article, le but est de contrôler le système vers l'origine et vers un autre point d'équilibre non nul  $x^* \triangleq [x_1^* \ 0]^\top$ . Nous appliquons deux méthodes : le remodelage d'énergie (Sous-section 4.1) et l'IDA-PBC (Sous-section 4.2).

### 4.1 Remodelage d'énergie

Le Hamiltonien  $H(x)$  (Éq. 1) a un minimum au point d'équilibre  $[0 \ 0]^\top$ . C'est une fonction de Lyapunov du système sans contrôle, pour lequel l'état évolue vers ce point d'équilibre.

La méthode par remodelage d'énergie consiste à construire un nouveau Hamiltonien  $H_d(x)$  qui a un minimum à un autre point d'équilibre vers lequel on veut contrôler le système. La commande correspondante peut être trouvée par le théorème suivant.

**Théorème 1 (Condition de correspondance pour le contrôle par remodelage d'énergie [3]).** *Considérons un SHP en boucle ouverte de forme (3) avec un Hamiltonien  $H(x) > 0$ . Pour obtenir un SHP en boucle fermée avec un Hamiltonien  $H_d(x) > 0$ , la commande utilisée doit satisfaire la condition de correspondance*

$$\nabla H_a(x)^\top \dot{x} = -y^\top u, \quad (6)$$

où  $H_a(x) \triangleq H_d(x) - H(x) \geq 0$ , sous l'hypothèse que

$$R \nabla H_a(x) = 0.$$

La preuve est basée sur les bilans de puissance du système en boucle ouverte et en boucle fermée [3].

Ici, nous définissons un Hamiltonien cible d'équilibre  $x^* = [x_1^* \ 0]^\top$  :

$$H_d(x) = \frac{1}{2}(k+K)(x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2m}x_2^2 + \kappa, \quad (7)$$

avec  $K > 0$  une raideur positive au choix. La constante  $\kappa$  est choisie pour assurer la positivité de  $H_a$ . Les calculs conduisent à  $\kappa = x_1^{*2}k(k+K)/(2K)$ .

La condition de correspondance (6) et le modèle en SHP (5) conduisent à la loi de commande  $u = -K(x_1 - x_1^*) + kx_1^*$ . Ainsi, cette méthode génère des lois à partir d'une énergie cible, qui conduit ici à un simple régulateur proportionnel.

### 4.2 IDA-PBC

La méthode IDA-PBC (*Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control*, [4]) consiste à associer le remodelage d'énergie ( $H_d(x)$ ) à un changement des matrices d'interconnexion ( $J_d$ ) et de dissipation ( $R_d$ ). La méthode IDA-PBC répond à deux besoins :

- certains systèmes ne peuvent pas être contrôlés avec un remodelage d'énergie seul, par exemple lorsqu'il y a un transfert infini d'énergie au point d'équilibre (*dissipation obstacle*, cf. [5]),
- on veut améliorer la performance du contrôle.

Le système (3) est remplacé par le système cible

$$\dot{x} = (J_d - R_d) \nabla H_d(x) \quad (8)$$

par l'action du contrôle. Nous définissons les différences  $H_d(x)$  comme avant, et  $J_a \triangleq J_d - J$ ,  $R_a \triangleq R_d - R$ . L'entrée qui effectue ceci peut être obtenue par la condition de correspondance suivante.

**Théorème 2 (Condition de correspondance pour l'IDA-PBC [4]).** *Considérons un SHP en boucle ouverte de forme (3) avec un Hamiltonien  $H(x) > 0$  et matrices  $J$  et  $R$ . Par l'action du contrôle, nous voulons obtenir un SHP (8) avec un Hamiltonien  $H_d(x) > 0$  et matrices  $J_d$  et  $R_d$ . Les Hamiltoniens et matrices doivent satisfaire la condition de correspondance*

$$-g^\perp (J_a - R_a) \nabla H(x) = g^\perp [(J + J_a) - (R + R_a)] \nabla H_a(x),$$

où  $g^\perp$  est un annihilateur à gauche au choix (qui satisfait  $g^\perp g = 0$ ). La commande correspondante est

$$u = (g^\top g)^{-1} g^\top [(J_d - R_d) \nabla H_d(x) - (J - R) \nabla H(x)].$$

Cette condition de correspondance suit de l'égalité entre les équations dynamiques du système en boucle ouverte et en boucle fermée.

En fonction des éléments imposés dans cette équation, on a affaire à une méthode de résolution différente. La référence [4] offre plus d'informations à ce sujet et propose une version plus générale de la condition de correspondance. Nous imposons le Hamiltonien  $H_d(x)$  (Éq. 7) et calculons les conditions sur les matrices  $J_a$  et  $R_a$  (supposées constantes), issues de la condition de correspondance et du fait que  $J_a = -J_a^T$  et  $R_a = R_a^T \geq 0$ .

Nous obtenons les matrices

$$J_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

avec  $D \geq 0$ , et la commande  $u = -Kx_1 + (k + K)x_1^* - D\frac{x_2}{m}$ . On a affaire à la commande obtenue précédemment par le remodelage d'énergie à laquelle est ajoutée une injection d'amortissement  $D$ ; ou encore à un régulateur proportionnel-différentiel.

## 5 Contrôle en temps fini

Dans la section précédente, nous avons introduit un contrôle linéaire, pour lequel le système connaît une évolution exponentielle dans le temps. L'état se rapproche donc en permanence de l'état cible. Dans la présente section, nous voulons appliquer un contrôle en temps fini, où l'état atteint l'état cible dans un temps fini.

### 5.1 Construction du contrôle

Nous définissons la stabilité en temps fini de l'origine.

**Définition 2 (Stabilité en temps fini de l'origine [6,7]).** Soit un système  $\dot{x} = f(x)$ . Soit  $\Phi^t(x_0)$  l'évolution de l'état dans le temps étant donné un état initial  $x_0$  à  $(t = 0)$ .

L'origine dudit système est stable en temps fini sur un voisinage ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  si

1. Il existe une fonction  $T : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tout  $x_0 \in U \setminus \{0\}$ , l'évolution  $\Phi^t(x_0)$  est définie et unique sur  $[0, T(x_0)[$  et  $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} = 0$ . On appelle  $T$  la fonction de temps d'établissement (settling time) du système.
2. Il existe une fonction  $\delta \in \mathcal{K}$  telle que pour tout  $x_0 \in U$ ,  $\|\Phi^t(x_0)\| \leq \delta(\|x_0\|)$  pour tout  $t \geq 0$ .

Si  $U = \mathbb{R}^n$ , on appelle le système globalement stable en temps fini. Si seulement la propriété (1) est satisfaite, l'origine est appelée attractive en temps fini.

La stabilité d'un autre point d'équilibre est obtenue après un changement d'état.

Il existe un résultat pour le contrôle en temps fini vers l'origine du système double intégrateur.

**Théorème 3 (Contrôle en temps fini du double intégrateur [7, 8]).** La commande  $v = -k_1|z_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2|z_2|^\alpha$  avec  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  rend l'origine du double intégrateur

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases}$$

globalement stable en temps fini. Nous avons utilisé la notation  $|x|^\alpha \triangleq \text{sgn}(x)|x|^\alpha$ .

La preuve repose sur la fonction de Lyapunov

$$V(z) = k_1 \frac{2-\alpha}{2} |z_1|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{z_2^2}{2} > 0 \quad (9)$$

et sur le fait que le système soit homogène de degré négatif.

Afin de pouvoir utiliser cette commande, nous transformons le système masse-ressort-amortisseur (1) en un double intégrateur, à l'aide du théorème de Brunovský.

**Théorème 4 (Forme normale de Brunovský [9–11]).** Soit un système linéaire en représentation d'état  $\dot{x} = Ax + Bu$ , avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , qui est commandable, c'est-à-dire qui a une matrice de commandabilité

$$M_C \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

de rang  $n$ .

Il existe un changement d'état  $z = Tx$  ( $T$  inversible) et une entrée  $v$  satisfaisant le changement  $u = Ez + Fv$  ( $F$  inversible) tels que les équations du système dans les nouvelles variables  $(z, v)$  s'écrivent sous la forme de  $q$  chaînes d'intégrateurs d'ordre  $\rho_i \geq 1$ ,  $\sum_{i=1}^q \rho_i = n$  de la forme suivante :

$$z = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \dots & z_{1,\rho_1} & \dots & z_{q,\rho_q} \end{bmatrix}^T,$$

avec

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= z_{i,j+1} & \text{pour } 1 \leq j \leq \rho_i - 1, \\ z_{i,\rho_i} &= v_i & \text{pour } 1 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

Le système (1) est commandable. Le théorème de Brunovský nous permet de trouver le changement d'état entre  $z$  et  $x$  :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Tx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

et le bouclage

$$u = Ez + Fv = \begin{bmatrix} k & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + m \cdot v.$$

Après le changement d'état inverse, on trouve la commande

$$u = kx_1 + \frac{c}{m}x_2 - m \left( k_1 |x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right). \quad (10)$$

Le système (1), contrôlé en temps fini vers l'origine par (10), s'écrit comme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m} \\ \dot{x}_2 = -m \left( k_1 |x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right). \end{cases} \quad (11)$$

Après un changement d'état, on obtient la commande suivante pour la régulation en un point stationnaire non nul  $x^* = [x_1^* \ 0]^T$  :

$$u = kx_1 + \frac{c}{m}x_2 - m \left( k_1 |x_1 - x_1^*|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right).$$

### 5.2 Interprétation comme SHP

Avec un Hamiltonien défini comme suit :

$$H_d(x) \triangleq mk_1 \frac{2-\alpha}{2} |x_1|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{1}{2m} x_2^2 > 0,$$

par analogie avec la fonction de Lyapunov (9), le système contrôlé (11) peut être réécrit comme un SHP

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J_d - R_d) \nabla H_d(x) \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mk_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^{\alpha-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} mk_1 |x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \\ \frac{x_2}{m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

La matrice  $R_d$  dépend de l'état  $x$  et est singulière en  $x_2 = 0$ . Elle est semi-définie positive car ses valeurs propres  $0$  et  $mk_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^{\alpha-1}$  sont positives.

### 5.3 Lien avec la méthode IDA-PBC

Nous souhaitons réinterpréter le contrôle en temps fini sous la forme d'un asservissement de type IDA-PBC. D'après le calcul de ses quantités caractéristiques (cf. Théorème 2), le système d'asservissement n'est pas passif :  $R_a$  n'est pas sémi-définie positive et  $H_d(x)$  n'est pas borné inférieurement. Nous proposons de modifier le système d'asservissement de sorte qu'il réalise toujours un contrôle en temps fini et soit passif. Ce système est obtenu pour le système cible suivant :

$$R_d \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mk_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^{\alpha-1} + \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma > c,$$

$$H_d(x) \triangleq mk_1 \frac{2-\alpha}{2} |x_1 - x_1^*|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{\beta}{2} (x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2m} x_2^2, \quad \beta > k.$$

La commande pour ce contrôle passif en temps fini est

$$u = kx_1 - \beta(x_1 - x_1^*) + \frac{c - \gamma}{m} x_2 - m \left( k_1 [x_1 - x_1^*]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 \left[ \frac{x_2}{m} \right]^\alpha \right).$$

## 6 Méthode de simulation

En général, le système bouclé est non linéaire. Nous avons donc besoin d'une méthode numérique pour simuler sa trajectoire en temps discret : il s'agit de calculer l'état  $x(k+1)$  étant donné l'état  $x(k)$ . En fonction du modèle et de la commande, on a affaire à un calcul explicite (Sous-section 6.1) ou implicite (Sous-section 6.2).

Pour une méthode de simulation stable, on veut discrétiser les équations du système en préservant le bilan de puissance : on remplace la dérivée temporelle  $\dot{x}$  par  $\frac{\delta x}{\delta t}$ , et le gradient  $\nabla H(x)$  par le gradient discret  $\nabla^d H(x, \delta x)$  [12]. Dans le cas d'un Hamiltonien à variables séparées ( $H(x) = \sum_i^n H_i(x_i)$ ), le gradient discret  $\nabla^d H(x, \delta x)$  est défini par les composants

$$[\nabla^d H(x, \delta x)]_i = \begin{cases} \frac{H_i(x_i + \delta x_i) - H_i(x_i)}{\delta x_i} & \text{si } \delta x_i \neq 0 \\ H'_i(x_i) & \text{si } \delta x_i = 0. \end{cases}$$

### 6.1 Calcul explicite

Dans le cas de systèmes linéaires, il existe une méthode explicite [12] pour le calcul de la différence d'état  $\delta x(k) \triangleq x(k+1) - x(k)$ . On peut écrire le Hamiltonien comme la forme quadratique  $H(x) = 1/2 x^T W x$ , avec  $W = W^T > 0$ . Avec le gradient discret  $\nabla^d H(x(k), \delta x(k)) = W(x(k) + \delta x(k)/2)$ , et la notation  $M \triangleq (J - R)W$ , on peut retrouver l'expression suivante pour  $\delta x$  :

$$\delta x = (I_n - \delta t/2 \cdot M)^{-1} (M x_k + G_k u_k) \delta t.$$

### 6.2 Calcul implicite

Dans le cas de systèmes non linéaires, nous avons besoin d'une méthode de résolution itérative. Dans [13], on propose d'utiliser le schéma d'Euler explicite ou implicite. En revanche, dans cet article, nous proposons d'utiliser une méthode à passivité garantie [12].

Après la discrétisation en substituant  $\frac{\delta x}{\delta t}$  et  $\nabla^d H(x, \delta x)$  dans les équations du système (comme p.ex. l'Équation 11), nous obtenons un système de deux équations implicites et non linéaires en  $x_1(k+1)$  et  $x_2(k+1)$ . À chaque pas temporel, ce système est résolu itérativement par la méthode de Newton-Raphson (tolérance  $10^{-10}$ , max.  $10^6$  itérations).

## 7 Exemple

### 7.1 Système linéaire

Nous simulons le système masse-ressort-amortisseur avec  $m = 1\text{kg}$ ,  $c = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ ,  $k = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Pour une lecture facile, nous omettons les unités ici. Nous calculons l'évolution de l'état initial  $[-1 \ -1]^T$  vers l'origine sans contrôle, avec injection d'amortissement ( $u = -Dx_2/m$ ,  $D = 3$ ), avec un contrôle en temps fini ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\alpha = 0,6$ ) et avec un contrôle passif en temps fini ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\beta = 6$ ,  $\gamma = 2$ ). Ensuite le même état initial est contrôlé vers l'état  $[3 \ 0]^T$  par remodelage d'énergie ( $K = 2$ ), le contrôle IDA-PBC ( $K = 2$ ,  $D = 4$ ), le contrôle en temps fini ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\alpha = 0,6$ ) et le contrôle passif en temps fini ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\beta = 6$ ,  $\gamma = 2$ ).

Les simulations pour le contrôle (passif) en temps fini sont effectuées par calcul implicite ( $\delta t = 10^{-3}$ ). Les autres simulations sont effectuées par calcul explicite.

L'évolution de l'état est montrée dans les Figures 2-3. Pour le cas du contrôle vers le point  $[3 \ 0]$ , l'évolution de l'erreur logarithmique de la position par rapport à la position cible est montrée dans la Figure 4. Sans contrôle, le système est en régime pseudo-périodique, ce qui se traduit par un comportement oscillatoire. Avec une injection d'amortissement, l'état évolue selon une exponentielle, donc l'erreur logarithmique est une droite décroissante. Le contrôle (passif) en temps fini est caractérisé par une décroissance de l'erreur qui tend théoriquement vers  $-\infty$ , mais qui est bornée par la précision numérique dans ces simulations.

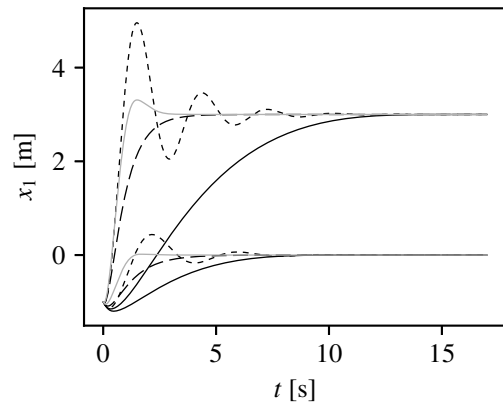


FIGURE 2 – Contrôle du système linéaire : évolution de la position dans le temps. Trajectoires vers l'origine sans contrôle (----), avec injection d'amortissement (---), en temps fini (—) et avec la méthode passive en temps fini (—). Trajectoires vers  $[3 \ 0]$  avec le contrôle par remodelage d'énergie (----), l'IDA-PBC (---), le contrôle en temps fini (—) et avec le contrôle passif en temps fini (—).

### 7.2 Système non linéaire

Le formalisme des SHP nous permet de faire une extension immédiate du contrôle à un système non linéaire. Nous considérons le cas d'un ressort raidissant, avec la loi constitutive

$$F_r = kL \sinh\left(\frac{x_1}{L}\right),$$

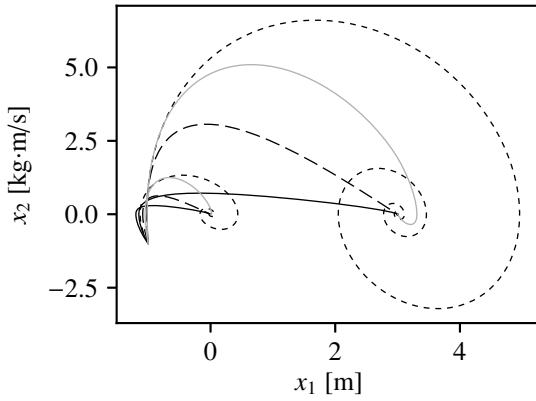


FIGURE 3 – Contrôle du système linéaire : évolution dans l'espace des états. Même légende que la Figure 2.

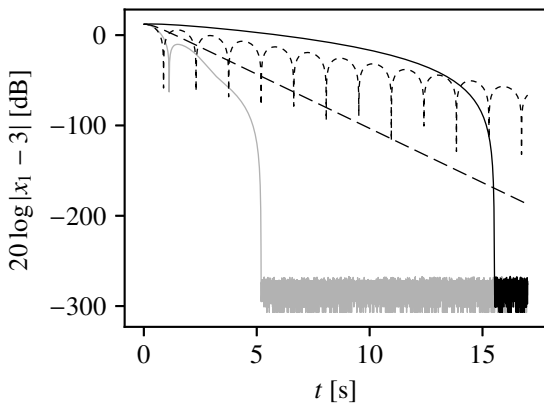


FIGURE 4 – Contrôle du système linéaire : évolution de l'erreur de position dans le temps, correspondant au contrôle vers 3 par remodelage d'énergie (-----), l'IDA-PBC (---), le contrôle en temps fini (—) et le contrôle passif en temps fini (—).

avec  $L$  l'élongation critique.

Cet oscillateur peut être modélisé comme un SHP de forme (3), avec les mêmes matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{R}$  que dans le cas d'un ressort linéaire, et avec le Hamiltonien

$$H(x) = kL^2 \left[ \cosh\left(\frac{x_1}{L}\right) - 1 \right] + \frac{1}{2m} x_2^2.$$

**Remodelage d'énergie** Nous définissons le Hamiltonien

$$H_d = (K + k)L^2 \cosh\left(\frac{x_1 - x_1^*}{L}\right) + \kappa + \frac{1}{2m} x_2^2. \quad (13)$$

Les valeurs de  $\kappa$  et  $K$  sont choisies telles que le Hamiltonien du contrôleur  $H_d$  soit définie positive.

De la condition de compatibilité (Théorème 1), nous obtenons

$$u = -(K + k)L \sinh\left(\frac{x_1 - x_1^*}{L}\right) + kL \sinh\left(\frac{x_1}{L}\right).$$

**IDA-PBC** Nous imposons le Hamiltonien  $H_d$  (Éq. 13) dans le Théorème 2 et obtenons les mêmes matrices  $\mathbf{J}_a$  et  $\mathbf{R}_a$  que dans le cas linéaire, ce qui correspond à la superposition

d'une injection d'amortissement et de la commande obtenue par remodelage d'énergie :

$$u = -(K + k)L \sinh\left(\frac{x_1 - x_1^*}{L}\right) + kL \sinh\left(\frac{x_1}{L}\right) - D \frac{x_2}{m}.$$

**Contrôle en temps fini** D'après les mêmes calculs que dans le cas linéaire (Sous-section 5.1), la commande pour le contrôle en temps fini est

$$u = kL \sinh\left(\frac{x_1}{L}\right) + \frac{c}{m} x_2 - m \left( k_1 |x_1|^{2-\alpha} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right).$$

Le système bouclé est égal au système (11).

**Contrôle passif en temps fini** De façon analogue au cas du système linéaire (Sous-section 5.3), nous construisons la commande

$$u = kL \sinh\left(\frac{x_1}{L}\right) - \beta L \sinh\left(\frac{x_1 - x_1^*}{L}\right) + \frac{c - \gamma}{m} x_2 - m \left( k_1 |x_1 - x_1^*|^{2-\alpha} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right), \text{ avec } \gamma > c, \beta > k.$$

**Simulation** Nous simulons le système masse-ressort-amortisseur avec  $m = 1\text{kg}$ ,  $c = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ , et un ressort raidissant avec  $k = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  et  $L = 1\text{m}$ . Nous calculons l'évolution de l'état initial  $[-1 \ -1]^T$  vers l'origine sans contrôle, avec injection d'amortissement ( $D = 3$ ), avec le contrôle en temps fini ( $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha = 0,6$ ) et avec le contrôle passif en temps fini ( $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha = 0,6, \beta = 6, \gamma = 2$ ). Ensuite le même état initial est contrôlé vers l'état  $[3 \ 0]^T$  avec le remodelage d'énergie ( $K = 58$ ), l'IDA-PBC ( $K = 58, D = 20$ ), le contrôle en temps fini ( $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha = 0,6$ ) et le contrôle passif en temps fini ( $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha = 0,6, \beta = 6, \gamma = 2$ ).

Toutes les simulations sont effectuées par calcul implicite ( $\delta t = 10^{-3}$ ).

L'évolution de l'état est montrée dans les Figures 5-6. Pour le cas du contrôle vers l'état cible  $[3 \ 0]^T$ , l'évolution de l'erreur logarithmique de la position est montrée dans la Figure 7. De nouveau, dans le cas du contrôle (passif) en temps fini, l'erreur tend théoriquement vers  $-\infty$  mais elle est bornée par la précision numérique dans ces simulations.

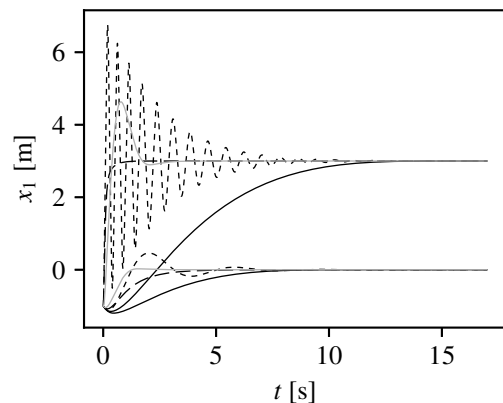


FIGURE 5 – Contrôle du système non linéaire : évolution de la position dans le temps. Même légende que la Figure 2.

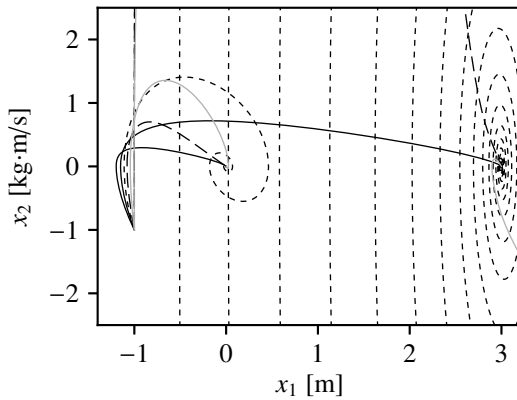


FIGURE 6 – Contrôle du système non linéaire : évolution dans l'espace des états. Même légende que la Figure 2.

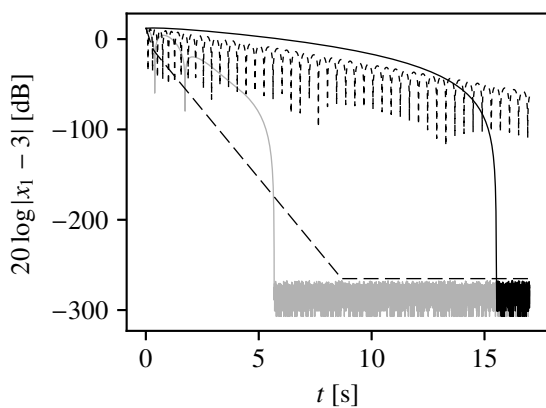


FIGURE 7 – Contrôle du système linéaire : évolution de l'erreur de position dans le temps, correspondant au contrôle vers 3. Même légende que la Figure 4. La ligne décroissante sature pour des raisons numériques.

## 8 Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié le contrôle d'un oscillateur, dans le but d'atteindre un point d'équilibre statique.

Dans le formalisme des SHP, nous nous sommes basés sur une vision énergétique du système pour la conception de lois de commande. Avec ces lois de commande, l'erreur par rapport à l'état cible décroît exponentiellement. Une méthode de contrôle alternative permet d'atteindre l'état cible en un temps fini. Cette dernière méthode est ensuite réinterprétée et rendue passive dans le formalisme des SHP.

Les deux classes de méthodes ont été appliquées à un système discret linéaire puis non linéaire. Les trajectoires ont été simulées avec une méthode à passivité garantie.

De prochains travaux porteront sur le contrôle de systèmes non linéaires et de dimension infinie.

## Remerciements

La thèse de Marc Wijnand est financée par le projet ANR Finite4SoS (*Finite time control and estimation for systems of systems*, ANR 15 CE23 0007).

## Références

- [1] Hassan K Khalil. Nonlinear systems, vol. 3. *Prentice Hall*, 2002.
- [2] Bernhard M. Maschke and Arjan J. van der Schaft. Port-controlled Hamiltonian systems : modelling origins and systemtheoretic properties. *IFAC Proceedings Volumes*, 25(13) :359–365, 1992.
- [3] Romeo Ortega, Arjan J. van der Schaft, and Bernhard M. Maschke. Stabilization of port-controlled Hamiltonian systems via energy balancing. In *Stability and stabilization of nonlinear systems*, pages 239–260. Springer, 1999.
- [4] Romeo Ortega, Arjan van der Schaft, Bernhard Maschke, and Gerardo Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4) :585–596, 2002.
- [5] Meng Zhang, Romeo Ortega, Dimitri Jeltsema, and Hongye Su. Dissipation obstacle hampers control-by-interconnection methodology. *IFAC-PapersOnLine*, 48(13) :123–128, 2015.
- [6] Sanjay P. Bhat and Dennis S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(3) :751–766, 2000.
- [7] Brigitte d'Andréa-Novel, Jean-Michel Coron, and Wilfrid Perruquetti. Finite-time control of nonholonomic or underactuated mechanical systems : the examples of the unicycle robot and the slider. Rapport interne, à paraître en 2018.
- [8] Emmanuel Bernuau, Wilfrid Perruquetti, Denis Efimov, and Emmanuel Moulay. Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator. *International Journal of Control*, 88(3) :451–460, 2015.
- [9] Pavol Brunovský. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 6(3) :173–188, 1970.
- [10] Thomas Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [11] Witold Respondek and Issa Amadou Tall. Feedback equivalence of nonlinear control systems : a survey on formal approach. *Chaos in Automatic Control*, pages 173–188, 2006.
- [12] Thomas Hélie, Antoine Falaize, et Nicolas Lopes. Systèmes Hamiltoniens à Ports avec approche par composants pour la simulation à passivité garantie de problèmes conservatifs et dissipatifs. In *Colloque National en Calcul des Structures*, volume 12, 2015.
- [13] Denis Efimov, Andrey Polyakov, Arie Levant, and Wilfrid Perruquetti. Realization and discretization of asymptotically stable homogeneous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11) :5962–5969, 2017.