



**HAL**  
open science

# Rafle par un convexe mobile dans un espace hilbertien

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Rafle par un convexe mobile dans un espace hilbertien. Colloque d'analyse non-linéaire, 1972, Pau, France. hal-01795265

**HAL Id: hal-01795265**

**<https://hal.science/hal-01795265>**

Submitted on 18 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RAFLE PAR UN CONVEXE MOBILE DANS UN ESPACE HILBERTIEN

J.J. MOREAU

*Institut de Mathématiques  
Université des Sciences et Techniques du Languedoc*

Montpellier

I. FORMULATION

Une certaine manière d'aborder la théorie des systèmes mécaniques élasto-plastiques (cf. J.J. MOREAU [2]) conduit, dans le cas le plus simple, au problème suivant :

Soit  $H$  un espace hilbertien réel et soit  $C(t)$  une famille de parties convexes fermées non vides de  $H$ , indexées par  $t \in [0, T]$ ; en langage de cinématique,  $t$  s'appelle le temps et  $C$  est un convexe mobile dans  $H$ . On note  $x \rightarrow \psi(t, x)$  la fonction indicatrice de  $C(t)$  (c'est-à-dire  $\psi(t, x) = 0$  si  $x \in C(t)$ ,  $\psi(t, x) = +\infty$  sinon). On cherche un mobile, c'est-à-dire une application  $u : [0, T] \rightarrow H$ , absolument continue, vérifiant, pour presque tout  $t \in [0, T]$ , l'équation différentielle à second membre multivoque :

$$(1) \quad - \frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u(t))$$

avec la condition initiale

$$(2) \quad u(0) = a, \text{ donné dans } C(0).$$

Rappelons que l'ensemble  $\partial\psi(t, x)$ , sous-différentiel de la fonction  $\psi(t, \cdot)$  au point  $x$  n'est autre que le cône des normales sortantes au point  $x$  pour le convexe  $C(t)$  : en particulier cet ensemble est réduit à  $\{0\}$  si  $x$  est un point intérieur de  $C(t)$ ; il est vide si  $x \notin C(t)$ .



Dans le cas où le convexe  $C$  possède pour tout  $t$  un intérieur non vide, on peut visualiser comme suit le processus évolutif régi par l'équation (1) (aucun rapport avec la motivation mécanique invoquée plus haut) : le mobile  $u$  reste enfermé dans le convexe mobile  $C$  ; tant qu'il est intérieur à  $C$ , ce mobile reste fixe ; lorsque la frontière de  $C$  l'atteint, le mobile  $u$  prend une vitesse de direction normale rentrante, comme poussé par ladite frontière. C'est ce que nous appelons un processus de rafle.

Une autre image utile est très claire lorsque la dimension de  $H$  se réduit à 2 : on considère l'espace produit  $H \times [0, T]$ , ici de dimension 3, en imaginant "l'axe des  $t$ " vertical descendant. Le graphe de la multiapplication  $t \rightarrow C(t)$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\Gamma = \{(x, t) \in H \times [0, T] : x \in C(t)\}$ , se visualise comme une cavité dont les sections horizontales sont les convexes  $C(t)$ . Le graphe d'une application  $t \rightarrow u(t)$  solution de (1) peut, grossièrement parlant, se caractériser comme suit : ce graphe est une ligne  $\gamma$  tracée dans  $\Gamma$  ; tout arc de  $\gamma$  contenu dans l'intérieur de  $\Gamma$  est un segment de droite vertical ; tout arc de  $\gamma$  tracé sur la frontière de la cavité  $\Gamma$  est orthogonal aux sections horizontales de cette frontière, donc en constitue une ligne de pente ; de plus, le fait que  $\frac{du}{dt}$  possède la direction entrante dans  $C(t)$  signifie que ces arcs tracés sur la paroi de la cavité  $\Gamma$  ne sauraient appartenir à des parties de ladite paroi qui se trouveraient "en surplomb". Bref,  $\gamma$  affecte la forme d'un filet d'eau tombant dans la cavité : tantôt en chute libre, tantôt ruisselant sur des parties non surplombantes de la paroi.

Ces divers modèles se placent dans le contexte des problèmes à contraintes unilatérales ; ces problèmes qui fournirent à l'auteur sa motivation initiale en analyse non linéaire, suscitent aujourd'hui l'intérêt d'un public de plus en plus large (pour une bibliographie récente cf. G. DUVAUT, J.L. LIONS [1]).

## 2.- SITUATION BIBLIOGRAPHIQUE

L'équation d'évolution (1) est un cas particulier de

$$(3) \quad - \frac{du}{dt} \in A(t, u(t))$$

où  $x \rightarrow A(t, x)$  représente, pour chaque  $t \in [0, T]$ , une multiapplication monotone maximale de  $H$  dans  $H$  ; on trouvera dans H. BREZIS [2] une bibliographie très complète des travaux consacrés à (3). Une conséquence banale de la



monotonie de  $A$  est que, en dépit du caractère multivoque du second membre de (3), il existe au plus une solution s'accordant à chaque donnée initiale  $u(0)$ . Les résultats les meilleurs concernent le cas particulier où  $A$  est indépendant de  $t$ , ce qui est intimement lié à la génération des semi-groupes de contractions dans  $H$ . A ce cas on peut rattacher celui d'une multiapplication variant par translation, c'est-à-dire de la forme

$$x \rightarrow A(x - b(t))$$

où  $b : [0, T] \rightarrow H$  est une application absolument continue donnée. On obtient d'ailleurs des propriétés plus précises dans le cas  $A = \partial\phi$ , sous-différentiel d'une fonction  $\phi : H \rightarrow ]-\infty, +\infty[$ , convexe, s.c.i. (cf. BREZIS [1]).

Jusqu'à ces derniers mois, le cas d'un  $A$  dépendant de  $t$  n'était étudié que sous des hypothèses assez restrictives, impliquant notamment que le domaine de  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\text{dom } A(t, \cdot) = \{x \in H : A(t, x) \neq \emptyset\}$ , est indépendant de  $t$  (cf. CRANDALL, M.G., LIGGETT, T.M. [1]). Tout au contraire, en (1) on voit que  $\text{dom } \partial\psi(t, \cdot) = C(t)$  dépend fondamentalement de  $t$  (sans quoi les solutions de (1) sont trivialement des constantes) : l'étude de l'opérateur très spécial  $\partial\psi(t, \cdot)$  donne donc l'occasion de se concentrer sur les difficultés provoquées par la variation du domaine et d'imaginer des méthodes nouvelles, susceptibles de généralisations ultérieures. C'est ainsi que la technique de régularisation, présentée en 3 ci-après, a pu être transposée par J.C. PERALBA [1] au cas plus général  $A(t, \cdot) = \partial\phi(t, \cdot)$  en faisant, quant à la dépendance de  $\phi$  vis à vis de  $t$ , des hypothèses apparemment très naturelles.

Indépendamment des travaux de l'auteur, une note toute récente de H. BREZIS [3] étudie le cas  $A(t, \cdot) = \partial\psi(t, \cdot) + \partial\phi(\cdot)$  où  $\psi$  et  $\phi$  ont les mêmes significations que plus haut,  $\phi$  indépendant de  $t$ . Les hypothèses de Brézis ne semblent pas directement comparables à celles de Peralba ; il y a là deux voies différentes de pénétration dans le sujet, qui convergeront peut-être un jour.

Terminons cette mise en place en faisant observer une particularité très spéciale de l'équation (1) : le second membre est un ensemble conique, c'est-à-dire stable par multiplication par tout  $\lambda \in [0, +\infty[$ . De là une propriété par ailleurs intuitive : le processus de rafle, c'est-à-dire la relation définie par (1) entre l'évolution du convexe  $C$  et celle du mobile  $u$ , est



indifférent à un changement d'indexage préservant l'ordre ; de façon précise, si  $\pi$  est une application absolument continue croissante (peut-être non strictement) d'un intervalle  $[0, T']$  sur  $[0, T]$  et qu'on pose  $C'(t') = C(\pi(t'))$ , la fonction  $t' \rightarrow u(\pi(t'))$  est solution du problème de rafle associé au convexe mobile  $t' \rightarrow C'(t')$ . Si donc on parvient à formuler des conditions concernant  $C$ , assurant l'existence d'une solution  $u$  à dérivée dans  $L_H^p[0, T]$ , pour un certain  $p \in ]1, +\infty]$ , on en déduira, par "changement de variable" des conditions concernant  $C'$ , a priori moins restrictives, qui suffiront pour que le problème de rafle associé à  $C'$  possède une solution  $u'$ , à dérivée dans  $L_H^1[0, T']$ .

### 3.- TECHNIQUE DE REGULARISATION

A une multiapplication monotone maximale  $A$ , de  $H$  dans  $H$ , il est classique d'associer sa régularisée de Yosida

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda} (I - (I + \lambda A)^{-1})$$

( $\lambda > 0$ ) qui est une application monotone univoque partout définie, lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{\lambda}$ .

Dans le cas  $A = \partial\psi$  qui nous occupe ici, cette idée rejoint une autre pratique classique : la représentation du convexe  $C$  par une fonction de pénalisation, ce qui consiste à remplacer la fonction indicatrice  $\psi$  par une fonction partout définie et différentiable, nulle sur  $C$ , rapidement croissante hors de cet ensemble. Nous notons  $q(t, x)$  le demi-carré de la distance du point  $x$  au convexe  $C(t)$  ; en notant  $\text{grad } q$  la différentielle de Fréchet de la fonction  $x \rightarrow q(t, x)$ , on trouve alors

$$A_\lambda(t, x) = \frac{1}{\lambda} \text{grad } q(t, x) = \frac{1}{\lambda} (x - \text{proj}(x, C(t))) .$$

Posant plutôt  $\rho = \frac{1}{\lambda}$  (ici indépendant de  $t$ ) on associe donc

à (1) l'équation régularisée

$$(4) \quad - \frac{du_\rho}{dt} = \rho \text{ grad } q(t, u_\rho(t)) ,$$

avec la même condition initiale

$$(5) \quad u_\rho(0) = a .$$



L'évolution d'un mobile  $u_\rho$  vérifiant (4) (s'il en existe) est claire : ce mobile possède une vitesse nulle tant qu'il est contenu dans  $C(t)$  ; s'il vient à sortir de cet ensemble, il prend une vitesse proportionnelle à son "vecteur projetant" sur  $C(t)$ .

Le problème est alors de formuler des conditions, concernant le convexe mobile  $C$ , assurant que :

- 1°/ Pour tout  $\rho > 0$  il existe  $u_\rho : [0, T] \rightarrow H$ , vérifiant (4) et (5).
- 2°/ Si  $\rho$  tend vers  $+\infty$ , les fonctions  $u_\rho$  convergent (uniformément sur  $[0, T]$ ) vers une fonction  $u$ , absolument continue.
- 3°/ La limite  $u$  vérifie (1) et (2).

Dans le contexte mentionné au début : application de la présente théorie à l'évolution des systèmes mécaniques élastoplastiques, il est frappant de constater que ce remplacement de l'équation (1) par l'équation (4) se trouve équivaloir à la prise en compte d'une résistance visqueuse, ajoutée à la résistance plastique ; c'est donc encore une technique classique que l'on rejoint : celle de la "viscosité artificielle".

Dans un rapport de séminaire (MOREAU [3]) les conditions souhaitées sont formulées en invoquant la notion classique de distance de Hausdorff entre deux parties non vides  $C$  et  $C'$  de  $H$  :

$$\delta(C, C') = \max \left\{ \sup_{x \in C} d(x, C'), \sup_{x' \in C'} d(x', C) \right\} .$$

D'ailleurs, il s'agira toujours de parties convexes fermées ; on peut les caractériser par leurs fonctions d'appui ; celle de  $C$  est, par définition ,

$$\gamma(y) = \sup_{x \in C} (x|y) ,$$

pouvant prendre la valeur  $+\infty$  si  $C$  n'est pas borné ; on note classiquement

$$\text{dom } \gamma = \{y \in H : \gamma(y) < +\infty\} .$$



Si  $\gamma'$  désigne, de même, la fonction d'appui de  $C'$  on trouve élémentairement que  $\delta(C,C')$  est fini, seulement si  $\text{dom } \gamma = \text{dom } \gamma'$ , ensemble noté  $D$ , et qu'alors

$$\delta(C,C') = \sup_{y \in B \cap D} |\gamma(y) - \gamma'(y)|$$

( $B$  : boule unité fermée de  $H$ ) .

Le convexe mobile, ou multiapplication,  $t \rightarrow C(t)$  prend ainsi l'aspect d'une application (univoque) de l'intervalle  $[0,T]$  dans un espace métrique (l'éventualité de valeurs infinies pour la distance de Hausdorff soulève peu de difficultés) ; on dispose alors de la notion traditionnelle de variation de  $C$  sur tout sous-intervalle  $[s,t]$  :

$$\text{var}(C ; s,t) = v(t) - v(s) ,$$

où on note  $v$  la variation à partir de l'origine :

$$v(t) = \text{var}(C ; 0 , t) .$$

La fonction numérique positive croissante  $v$  est absolument continue si et seulement  $t \rightarrow C(t)$  possède, vis à vis de la distance de Hausdorff, l'absolue continuité au sens traditionnel. Cela revient à l'existence  $\frac{dv}{dt} = \dot{v} \in L^1 [0,T]$ , vitesse numérique du convexe mobile  $C$ , telle que, si  $y \rightarrow \gamma(t,y)$  désigne la fonction d'appui de  $C(t)$ , on ait pour tout  $y$  dans  $\text{dom } \gamma(t,.)$  (domaine ipso facto indépendant de  $t$ ) et tout intervalle  $[s,t] \subset [0,T]$

$$|\gamma(t,y) - \gamma(s,y)| \leq |y| \int_s^t \dot{v}(\tau) d\tau .$$

De façon équivalente, pour tout  $y \in \text{dom } \gamma$ , la fonction numérique  $t \rightarrow \gamma(t,y)$  est absolument continue, de dérivée  $\dot{\gamma}$  avec la majoration

$$(6) \quad \dot{\gamma}(t,y) \leq |y| \dot{v}(t)$$

(pour presque tout  $t$  dans  $[0,T]$ ) .

Le résultat est alors que les propriétés 1°/ , 2°/ , 3°/ , ci-dessus ont bien lieu si on suppose que le convexe mobile  $C$  est absolument continue, avec une vitesse numérique  $\dot{v}$  appartenant à  $L^2[0,T]$  .

Ainsi est prouvée dans ce cas l'existence d'une solution (unique, comme on sait) pour le "problème de rafle" (1) (2). L'artifice du changement de variable que nous indiquions à la fin du § 2 ci-dessus fournit alors cette existence dans le cas plus général  $\dot{v} \in L^1[0, T]$ .

L'usage du changement de variable conduit d'ailleurs à une notion naturelle de solution faible du problème, dès que le convexe-mobile  $C$  est à variation bornée continue. En effet, sur tout sous-intervalle de  $[0, T]$  où la fonction variation  $t \rightarrow v(t)$ , continue croissante, serait constante, la multi-application  $t \rightarrow C(t)$  sera constante aussi ; de là une factorisation

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} t & \xrightarrow{\quad} & C(t) \\ & \searrow & \nearrow \\ & v(t) & \end{array}$$

et la multiapplication  $v(t) \rightarrow C(t)$  est absolument continue sur  $[0, v(T)]$ , à vitesse numérique dans  $L^\infty$  (partout égale à 1).

La solution  $t \rightarrow u(t)$  est une application à variation bornée continue de  $[0, T]$  dans  $H$  et on trouve, pour tout sous-intervalle  $[s, t] \subset [0, T]$ ,

$$(8) \quad \text{var}(u ; s, t) \leq \text{var}(C ; s, t).$$

Illustrons cette notion de variation d'un convexe mobile par le cas particulier d'un convexe borné évoluant par translation, c'est-à-dire

$$C(t) = C_0 + b(t)$$

avec  $b : [0, T] \rightarrow H$  ; on trouve alors

$$\text{var}(C ; s, t) = \text{var}(b ; s, t) .$$

Dans ce cas, l'inégalité (8) met en lumière un aspect très typique du processus de rafle, conçu comme un entraînement avec jeu : sur tout intervalle, le "chemin parcouru" par le point entraîné  $u$  est, à cause du jeu, inférieur ou égal au chemin parcouru par le convexe en translation.

Terminons ce paragraphe en notant qu'il n'est pas surprenant d'avoir formulé les conditions utiles de régularité de la multiapplication  $t \rightarrow C(t)$  en termes de fonctions d'appui. C'est en effet une propriété essentielle d'un convexe fermé de  $H$  que d'être égal à l'intersection des demi-espaces fermés



minimaux le contenant. Pour chaque  $y \in H$  (de norme 1, si on veut), la fonction  $t \rightarrow \gamma(t, y)$  définit comment évolue celui de ces demi-espaces minimaux dont l'hyperplan frontière a une direction donnée (admettant  $y$  comme vecteur normal sortant). L'inégalité (6) est simplement une majoration uniforme des vitesses de déplacement de ces divers hyperplans.

D'ailleurs, puisque  $\gamma$  est la fonction duale de  $\psi$ , l'équation (1) s'écrit tout aussi bien

$$u(t) \in \partial\gamma(t, -\frac{du}{dt}) .$$

(pour les éléments de la théorie de la dualité des fonctions convexes, on pourra consulter MOREAU [1]).

#### 4. ALGORITHME DE RATRAPAGE

Une méthode de "discrétisation du temps" pour la détermination numérique de la solution  $u$  de (3) consécutive à une donnée initiale  $u(0) = a$  peut se décrire comme suit : On choisit une subdivision de l'intervalle  $[0, T]$ , soit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

et on cherche à construire une suite  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de points de  $H$  telle que  $x_i$  soit une approximation de  $u(t_i)$ . Adopter

$$\frac{1}{t_i - t_{i-1}} (x_i - x_{i-1})$$

comme approximation de  $\frac{du}{dt}(t_i)$  conduit à remplacer (3) par

$$(9) \quad x_{i-1} - x_i \in (t_i - t_{i-1}) A(t_i, x_i)$$

ce qui est une condition aux différences finies de type "implicite" concernant la suite cherchée  $(x_i)$ . De ce que la multiapplication  $A(t, \cdot)$  est monotone maximale il résulte que (9) associé à  $x_{i-1}$  une valeur et une seule de  $x_i$  (on note  $I$  l'identité) :

$$x_i = \left[ I + (t_i - t_{i-1}) A(t_i, \cdot) \right]^{-1} (x_{i-1}) .$$



Dans le cas  $A(t, \cdot) = \partial\psi(t, \cdot)$  qui nous occupe ici, cela se réduit élémentairement à

$$x_i = \text{proj}(x_{i-1}, C(t_i)) .$$

De là la construction : partant de  $x_0 = a$ , on effectue une cascade de projections sur les convexes fermés successifs  $C(t_i)$ . C'est ce que nous appelons l'algorithme de rattrappage, bien intuitif si l'on se reporte à l'image mécanique du processus de rafle (§ 1).

La question est de savoir si cette suite, ou plutôt la fonction en escalier qu'on construit sur elle, ou encore, si on préfère, son interpolée "polygonale" (i.e. affine par morceaux), converge vers la solution  $u$  lorsqu'on raffine convenablement la subdivision.

Dans le rapport de séminaire cité nous donnons une réponse affirmative si la multiapplication  $t \rightarrow C(t)$  est à variation bornée continue, par une méthode baptisée régularisation modulée. Elle consiste à étudier les solutions d'équations régularisées semblables à (4), mais avec un  $\rho$  fonction de  $t$ . Un premier temps de la démonstration met à profit l'indifférence du processus de rafle à l'égard d'un changement monotone de l'indexage : on remplace le convexe mobile  $C$  par un convexe  $C'$  qui reste fixe durant une fraction de chaque intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$ , la première moitié par exemple de cet intervalle, puis "rattrape le temps perdu" durant la seconde moitié. On considère ensuite une équation régularisée de la forme (4) en choisissant une fonction  $t \rightarrow \rho(t)$  en créneau : nulle sur les intervalles de temps où  $C'$  varie (ce qui donne  $u_\rho$  constant sur ces intervalles), de valeur constante  $A > 0$  sur les intervalles où  $C'$  est fixe (ce qui donne au point  $u_\rho$  un mouvement rectiligne exponentiel selon une droite "projetante" sur  $C'$ ). On fait tendre enfin  $A$  vers  $+\infty$ .

La conclusion est que la différence entre la solution exacte  $u$  du problème et la fonction en escalier fournie par l'algorithme de rattrappage est majorée en norme par  $2 \sqrt{p \text{ var}(C ; 0, T)}$ , où on note

$$p = \sup_i \text{ var}(C ; t_{i-1}, t_i)$$

Un second rapport de séminaire (ibid) étudie d'ailleurs la convergence de l'algorithme par une méthode plus directe et c'est là une autre voie pour atteindre l'existence de la solution  $u$  elle-même.



5.- RETRACTION D'UNE MULTIAPPLICATION

Les résultats esquissés dans les paragraphes précédents présentent surtout pour nous l'intérêt d'être généralisables (plus ou moins facilement !) dans diverses directions : cf. J.C.PERALBA [1] , [2] . Mais, pour ce qui concerne le problème spécifique posé, et certaines généralisations d'autres sortes, nous estimons que ces résultats, fondés sur la notion de variation d'une multiapplication ou sur des hypothèses de majoration du type (6) , ne sont pas assez fins. La principale critique est qu'ils méconnaissent le caractère unilatéral du processus de rafle : sur tout intervalle de temps où le convexe mobile  $C(t)$  est en expansion (au moins localement) il est clair que l'équation différentielle (1) admet pour solutions des constantes, sans qu'il y ait à faire aucune hypothèse de régularité quant à la loi de cette expansion. C'est seulement durant des phases de rétraction du convexe mobile que des hypothèses de régularité peuvent être utiles. Cela nous a conduit à reprendre la théorie en remplaçant la distance de Hausdorff par un écart non symétrique entre parties de  $H$  : nous appelons excès de  $C$  sur  $C'$  la quantité

$$e(C,C') = \sup_{x \in C} d(x,C') .$$

On obtient aisément une inégalité triangulaire, ce qui permet de transposer comme suit la théorie de la variation d'une multiapplication  $t \rightarrow C(t)$  : en notant  $S$  la subdivision suivante de l'intervalle  $[s,t]$

$$s = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t ,$$

on considère l'expression

$$R(S) = \sum_{i=1}^n e(C(\tau_{i-1}), C(\tau_i)) .$$

Le sup des  $R(S)$  lorsque  $S$  parcourt l'ensemble des subdivisions finies de  $[s,t]$  (c'est aussi bien la limite de  $R(S)$  relativement à une filtration évidente de cet ensemble) est noté ret(C;s,t) , rétraction de la multiapplication  $C$  sur l'intervalle  $[s,t]$  . Comme précédemment, on suppose la multiapplication  $C$  à valeurs fermées ; il est clair, dans ces conditions, que  $\text{ret}(C ; s,t) = 0$  si et seulement si la multiapplication  $C$  est croissante sur l'intervalle  $[s,t]$  .



Pour revenir à notre problème, les hypothèses de régularité souhaitées se formulent, par exemple, au moyen de la fonction numérique positive croissante

$$r(t) = \text{ret}(C ; 0, t) .$$

On trouve que, si cette fonction est absolument continue sur  $[0, T]$ ,  
 (1) (2) possède une solution  $u$ , avec d'ailleurs la majoration, pour tout  
sous-intervalle  $[s, t]$  ,

$$(10) \quad \text{var}(u ; s, t) \leq \text{ret}(C ; s, t) .$$

L'absolue continuité de  $r$  équivaut d'ailleurs à une propriété de  $C$  d'un genre familier : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n > 0$  tel que,  $]\sigma_i, \tau_i[$  désignant une quelconque famille finie de sous-intervalles de  $[0, T]$  ouverts disjoints, on ait l'implication

$$\sum_i (\tau_i - \sigma_i) < n \Rightarrow \sum_i e(C(\sigma_i), C(\tau_i)) < \varepsilon .$$

Mais la méthode de régularisation Yosida ne nous semble pas l'instrument adéquat pour le développement de la théorie dans ce contexte. La notion de rétraction d'une multiapplication (à valeurs dans un espace métrique éventuellement plus général que  $H$ ) intervient d'ailleurs dans d'autres questions, notamment l'énoncé de théorèmes de sélection (cf. MOREAU [4]).

Pour tout cela l'approche que voici se révèle très satisfaisante.

## 6.- APPROXIMATIONS EN ESCALIER

La multiapplication  $t \rightarrow C(t)$  est dite en escalier sur  $[0, T]$ , s'il existe une partition de  $[0, T]$  en une famille finie d'intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts, certains d'entre eux éventuellement réduits à des points) sur chacun desquels cette multiapplication est constante.

Tout ce qui précède concourt (en particulier l'algorithme de rattrapage présenté au § 4) pour généraliser l'équation différentielle (1) sous forme d'une définition du processus de rafle par un tel  $C$  (convexe fermé non vide de  $H$ ) : une fonction  $t \rightarrow u(t)$  affectée par ce processus sera naturellement posée comme constante sur chacun des intervalles où  $C$  est constant ; reste à spécifier sa loi de saut à chaque instant de discontinuité : notant



par  $+$  et  $-$  les valeurs à droite et à gauche de cet instant on pose la loi de saut

$$u_+ = \text{proj} (u_-, C_+) .$$

Cette définition fait visiblement correspondre une solution et une seule à chaque donnée initiale  $u(0) \in C(0)$  et sauvegarde d'ailleurs la propriété familière des équations d'évolution du type (3) : si  $u$  et  $u'$  sont deux solutions, la fonction

$$t \rightarrow \|u(t) - u'(t)\|$$

est décroissante.

Tout revient dès lors à étudier l'approximation de multiapplications par des multiapplications en escalier. C'est facile pour les multiapplications à variation bornée (cf. MOREAU [3]) : on obtient en ce cas des propriétés d'approximation au sens de la distance de Hausdorff. Pour une multiapplication  $C$  à rétraction bornée sur  $[0, T]$ , on obtient (cf. MOREAU [4]), une propriété d'approximation à gauche : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une multiapplication en escalier  $C_\varepsilon$  (à valeurs convexes fermées non vides, comme  $C$ ) telle que

$$\forall t \in [0, T] : e(C_\varepsilon(t), C(t)) \leq \varepsilon .$$

Le noeud de la question réside dans le fait suivant : si  $C$  est à rétraction bornée, pour tout  $t \in [0, T[$  l'ensemble

$$\bigcap_{\theta > t} \overline{\text{conv}} \bigcup_{\tau \in ]t, \theta[} C(\tau)$$

est non vide (on note  $\overline{\text{conv}}$  l'opération "enveloppe convexe fermée").

Notant  $u_\varepsilon$  la fonction en escalier solution du problème de rafle par  $C_\varepsilon$ , correspondant toujours à la même donnée initiale  $a$ , on obtient la convergence des  $u_\varepsilon$  vers une fonction  $u$  qu'on peut déclarer solution faible de (1). Cette fonction vérifie d'ailleurs l'inégalité (10) de sorte qu'elle est à variation bornée, éventuellement discontinue. Si la fonction

$$t \rightarrow \text{ret} (C ; 0, t)$$

est absolument continue,  $u$  est absolument continue et on montre alors que c'est une solution de (1) au sens propre.



Dans le contexte de l'approximation des multiapplications se place aussi cette question d'importance pratique : si la donnée  $t \rightarrow C(t)$  est entachée d'incertitude, majorer l'incertitude qui peut en résulter pour la solution  $u$  correspondant à une donnée initiale  $a$ .

Certaines altérations de  $C$  peuvent aussi être interprétées comme des régularisations : si  $\beta$  désigne la boule de centre  $0$ , de rayon  $\rho$ , l'ensemble  $C_\rho(t) = C(t) + \beta$  est plus régulier que  $C(t)$  dans le sens qu'il est d'intérieur non vide et possède en chacun de ses points frontière un hyperplan d'appui unique ; or sa distance de Hausdorff à  $C(t)$  est égale à  $\rho$ .

## 7.- QUESTIONS ASYMPTOTIQUES

Les résultats passés en revue dans ce qui précède sont loin d'épuiser la question. Mentionnons seulement encore ceci : les cas d'existence d'une solution du problème (1) (2) sur un intervalle compact  $[0, T]$  engendrent évidemment des cas d'existence de cette solution sur l'intervalle infini  $[0, +\infty]$ . Une situation importante est celle où l'ensemble

$$C_\infty = \bigcup_{T \geq 0} \bigcap_{t \geq T} C(t)$$

(ensemble des points de  $H$  que  $C(t)$  "finit par contenir") est non vide. Dire qu'un point  $x$  appartient à  $C_\infty$  signifie qu'il existe  $T \geq 0$  tel que la fonction constante  $t \rightarrow u(t) = x$  soit solution de (1) sur  $[T, +\infty[$ . La question est de savoir dans ce cas si toute solution de (1) (éventuellement, solution faible discontinue) converge, pour  $t \rightarrow +\infty$  vers un point de  $C_\infty$ . Même avec  $\dim H = 2$ , des contre-exemples faciles montrent qu'il n'en est pas toujours ainsi mais on a le cas utile suivant : s'il existe  $T_1 > 0$  et une boule de rayon non nul contenue dans  $C(t)$  pour tout  $t > T_1$ , la réponse est affirmative. La démonstration exploite simplement le fait que, pour toute solution  $u$  et tout point  $x$  de la boule en question, la fonction  $t \rightarrow \|u(t) - x\|$  est décroissante sur  $[T_1, +\infty[$ .

Donnons une idée de l'intérêt pratique de cette question : comme on l'a dit en commençant, le processus de rafle s'introduit à propos de l'étude de l'évolution d'un système élastoplastique, un pont métallique par exemple. Dans ce contexte, le mouvement du point  $u$  dans l'espace hilbertien  $H$  traduit la déformation plastique du système ; si  $u$  est fixe, le système se comporte élastiquement, sans déformation permanente. Le mouvement, supposé donné, du



convexe  $C$  dans  $H$ , résulte des charges appliquées au système (passage de véhicules, action du vent) et de la variation de ses liaisons (mouvements éventuels des ancrages et des culées ; les variations de température aussi se ramènent formellement à de telles liaisons variables). Il est vital que toutes ces sollicitations restent d'amplitude suffisamment limitée pour que les  $C(t)$  aient une intersection non vide : alors  $u$  fixe dans cette intersection est une solution du problème, ce qui signifie que l'ouvrage est capable d'assurer ses fonctions en ne subissant que des déformations purement élastiques. Mais une telle position de  $u$  n'est peut-être pas atteinte dès la mise en service ; le problème asymptotique formulé tout à l'heure est celui de savoir si, partant de la valeur  $u(0)$  correspondant à la fin des travaux de construction, la fonction  $t \rightarrow u(t)$  tend vers une limite : cela veut dire que durant une certaine phase d'adaptation, certaines pièces surchargées se déforment plastiquement, cédant ainsi une partie de leur responsabilité aux pièces voisines. Une fois cette limite sensiblement atteinte (elle peut même l'être exactement en un temps fini) l'ouvrage se comporte élastiquement. Qu'au contraire  $u$  augmente indéfiniment en norme signifie l'écroulement de l'ouvrage ; mais soulignons qu'une situation fournissant une fonction  $t \rightarrow u(t)$  bornée sans posséder de limite est tout aussi inacceptable : dans ce cas l'ouvrage n'assurera son service qu'au prix de continuelles déformations plastiques, d'où une fatigue de la matière amenant la ruine.

## 8 - REFERENCES

- BREZIS, H. [1] Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non-linéaires, à paraître dans Israel J. of Math.
- [2] Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Cours Université de Paris 6, 1971, multigraphié.
- [3] Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps, C.R. Acad. Sci., série A, 274 (1972), 310-312.
- CRANDALL, M.G., LIGGETT, T.M. [1] Generation of semi-groups of non linear transformations on general Banach spaces, Amer. J. of Math. 93 (1971), 265-297.



- DUVAUT G., LIONS, J.L. [1] Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, 1972.
- MOREAU, J.J. [1] Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les Equations aux dérivées Partielles, Collège de France, Paris 1966-67 (multigraphié, 108 p.).
- [2] Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique, C.R. Acad. Sci., Série A, 273 (1971), 118-121.
- [3] Rafle par un convexe variable ; première partie, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1971, exposé N° 15 (multigraphié 43 p.) ; deuxième partie, ibid. 1972, exposé N° 3 (multigraphié 36 p).
- [4] Multiapplications à rétraction finie, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, à paraître.
- PERALBA, J.C. [1] Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du temps, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, exposé N° 6 (multigraphié 16 p) .
- [2] Même titre, C.R. Acad. Sci., à paraître.