



**HAL**  
open science

# Indétermination liée au frottement sec dans le calcul des granulats

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Indétermination liée au frottement sec dans le calcul des granulats. 6e Colloque National en Calcul des Structures, École polytechnique Palaiseau, 2003, Giens, France. hal-01795136

**HAL Id: hal-01795136**

**<https://hal.science/hal-01795136>**

Submitted on 18 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

In : (M. Potier-Ferry, M. Bonnet, A. Bignonnet, coordonnateurs)  
Actes du 6<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 2003,  
vol. 3, pp. 465–472 (ISBN 2-7302-1034-2)

## Indétermination liée au frottement sec dans le calcul des granulats

**J. J. Moreau**

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR 5508,  
case 048, Université Montpellier II, F-34095 Montpellier cedex 5  
moreau@lmgc.univ-montp2.fr

### Résumé

Le frottement de Coulomb engendre communément des problèmes à solutions multiples. Pour estimer de combien cette indétermination peut entacher la validité des simulations numériques en Mécanique des Granulats, l'auteur adjoint aux programmes de calcul la faculté de visualiser l'ensemble des solutions. La stratégie proposée est de considérer les valeurs des forces de contact comme faisant partie de la description de chaque état d'un système multicontact et de traiter le frottement de manière incrémentale.

## 1 Introduction

La Tribologie nous enseigne la complexité et la diversité des situations qu'on peut observer lorsque deux corps sont en contact, qu'il y ait glissement ou non. La loi de Coulomb n'en reste pas moins le cadre incontournable d'une première approche du phénomène de frottement sec. Dans de nombreux problèmes techniques, les seules données disponibles concernant le frottement sont formalisées par des lois de ce type. L'irrégularité mathématique des solutions conséquentes reflète d'ailleurs la réalité quotidienne : en l'absence de graissage, les mécanismes grincent et risquent de se coincer.

En présence de frottement sec, on doit être également prêt à rencontrer une *pluralité de solutions*. L'exemple traditionnel de la statique de l'échelle prenant appui sur le sol et sur un mur vertical montre une infinité de valeurs possibles pour les réactions en ces deux contact. Les problèmes de dynamique donnent lieu à des situations du même ordre, ce qu'on a improprement appelé des paradoxes. L'occurrence d'élasticité n'éluide pas ces difficultés (pour le cas d'évolutions quasi-statiques, voir [2][3]).

La Mécanique des Milieux Granulaires, domaine de recherche très actif, fait un large usage de simulation numérique. Un granulat (supposé dans ce qui suit sec et non cohésif) est modélisé comme une collection de solides soumis aux liaisons unilatérales d'impénétrabilité mutuelle et de confinement par des parois, avec frottement de Coulomb en cas de contact. Les types de méthodes numériques utilisées pour traiter ces systèmes à très grand nombre de degrés de liberté sont sommairement décrits au Parag. 3 ci-dessous. Dès qu'on a pu se convaincre, par confrontation avec des observables, de la validité des modèles, le calcul apporte une information très riche sur des éléments pratiquement inaccessibles : transmission des forces dans le granulat, microstructure géométrique, etc., d'importance évidente lorsqu'on en vient à des constructions théoriques. Par une longue pratique, les chercheurs ont pris confiance dans cette interaction entre expérimentation physique, calcul numérique et élaboration théorique sans qu'aucune inquiétude quant à la multiplicité des solutions du calcul ne soit perceptible dans la littérature. Si l'approche se révèle finalement valide et fructueuse, c'est nous semble-t-il parce que calculateurs comme manipulateurs restent toujours conscients de ce que la réponse d'un échantillon granulaire à une sollicitation donnée dépend fortement de son histoire, en particulier de son mode de préparation. Les méthodes numériques (à pas simples) utilisées pour calculer les évolutions doivent donc disposer en début de chaque pas d'une certaine information sur l'évolution antérieure. Les mécaniciens du 19<sup>ème</sup> siècle, fascinés par la jeune théorie des équations différentielles, ont cristallisé l'idée que, en Mécanique, l'information significative à chaque instant consistait simplement en la position du système étudié, jointe aux vitesses de ses éléments. Tel est bien le cas pour de nombreux modèles usuels de systèmes mécaniques, mais il serait maladroit d'ériger cette constatation au rang de principe. La thèse de cet exposé est que, pour les systèmes qui nous occupent, la modélisation la plus efficace accueille dans la description de chaque état instantané *les valeurs des forces de contact*. Justement, les techniques numériques usuellement employées dans les simulations de granulats, qu'elles soient de type explicite comme "Molecular Dynamics" ou implicite comme "Contact Dynamics", prennent bien en compte pas après pas cette information.

## 2 Un exemple élémentaire

La Figure 1 montre, dans un plan vertical, la situation suivante. Deux parois rigides fixes convergent vers le haut ; une barre pesante rectiligne rigide  $AB$  est insérée entre ces parois, qu'elle touche avec frottement de Coulomb, et abandonnée à vitesse nulle. Si les angles ont des valeurs convenables, comparées à l'angle de frottement, le problème de l'évolution ultérieure de la barre possède deux solutions évidentes : soit la perte de contact suivie d'une chute libre, soit l'immobilité.

Le quadrilatère représenté en hachures légères est l'intersection des "cônes de Coulomb" (en dimension 2, ce sont des angles) aux deux points de contact. Toute position du point  $I$  dans le triangle au dessus de  $AB$  correspond à des valeurs des réactions  $R_A$  et  $R_B$  compatibles avec le frottement et équilibrant le poids de la barre. En présence de frottement sec, il faut être prêt à rencontrer de telles incertitudes.

Pronostiquer le maintien ou la perte du contact exige de *payer le prix d'une information complémentaire*, à formaliser dans le cadre d'un modèle plus riche que le précédent. Par

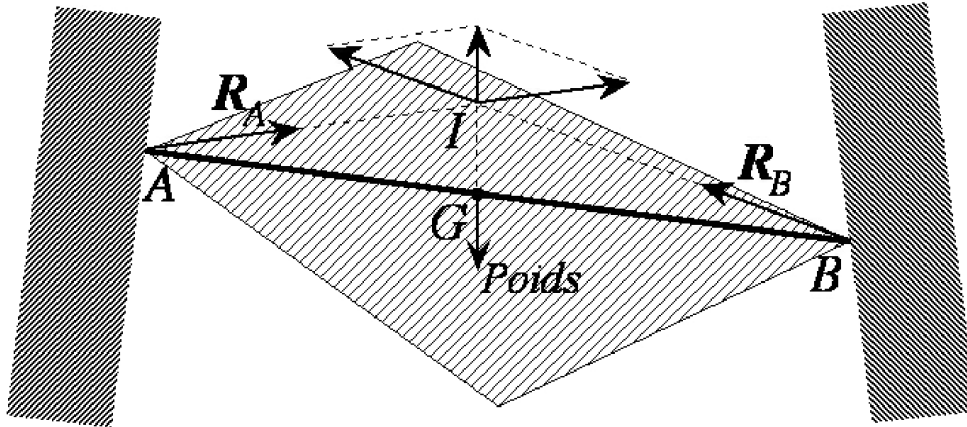


Figure 1 – Barre insérée entre deux parois convergentes.

“modèle”, nous entendons un *format* (au sens de l’informatique) sous lequel on choisit de définir, de recueillir et de traiter une information concernant l’Univers. Cette information est nécessairement partielle (elle ne concerne d’ailleurs qu’une toute petite partie, baptisée “le système”) et les pronostics qu’on énoncera finalement dans le format en question le sont aussi. Un modèle n’a pas de raison d’être “déterministe” (et la question de savoir si l’Univers lui-même l’est n’a pour nous pas de sens). La pluralité de solutions qui nous inquiète ici n’est donc pas proprement un défaut de la loi de Coulomb ; elle signifie seulement que le modèle employé ne permet pas de faire mieux.

### 3 Techniques numériques

Divers types de méthodes numériques sont disponibles pour calculer le mouvement (ou pronostiquer et analyser l’équilibre) de collections de solides. Mentionnons seulement pour mémoire les approches “événementielles” (angl. *event-driven*) qui reproduisent la démarche ordinaire de la Mécanique Classique : puisqu’on dispose de techniques éprouvées pour l’analyse des systèmes à liaisons bilatérales et lois de force régulières, le programme cherchera à identifier des intervalles de temps sur chacun desquels les statuts des contacts et du frottement sont constants. Sur chacun de ces intervalles, des méthodes fines d’intégration numérique des équations différentielles pourront être employées. Le travail à effectuer aux instants de changement de statut est très analogue à celui que nécessite chaque pas de la méthode Contact Dynamics décrite ci-dessous. L’approche événementielle devient impraticable si le nombre de contacts dépasse quelques dizaines.

Seules nous concernent ici les techniques “pas à pas” (angl. *time-stepping*) qui sont de deux sortes :

#### Méthodes MD (pour *Molecular Dynamics*)

Elles reposent sur des approximations régularisantes : les liaisons de non-interpénétrabili-

té des corps sont remplacées par des lois de répulsion qui entrent en action lorsque des possibilités de contact sont détectées. La loi du frottement sec peut de même être régularisée, usuellement en invoquant des microdéplacements élastiques tangentiels. Les équations différentielles ainsi obtenues peuvent être traitées par des méthodes numériques usuelles, en pratique *de type explicite*. L'inconvénient est que ces équations approximantes sont d'autant plus raides que l'exigence de précision est forte. Pour cette raison, ces méthodes, très employées pour le calcul d'évolutions quasistatiques ou l'analyse d'équilibres, deviennent problématiques dans les situations dynamiques, les termes introduits pour assurer la stabilité numérique risquant d'interférer avec les effets proprement mécaniques.

#### **Méthodes CD** (pour *Contact Dynamics*)

Elles visent à faire face directement aux irrégularités dues à l'unilatéralité des liaisons et au caractère non-différentiable de la loi de Coulomb [6][8]. Le calcul de chaque pas est *de type implicite*, ce qui écarte le risque d'instabilité numérique. Les inégalités, concernant le paramètre de configuration  $q \in \mathbf{R}^n$ , qui expriment les exigences de non-interpénétration, sont remplacées par des *inclusions différentielles* où sont impliqués à la fois  $q$  et le paramètre de vitesse  $u \in \mathbf{R}^n$  et qui assurent de pas en pas la préservation de ces inégalités. En faisant entrer aussi dans de telles inclusions différentielles les valeurs, a priori inconnues, des forces de contact on obtient de façon générale des *lois de contact* dont l'exemple type est le "contact unilatéral de Coulomb". Ce dernier peut, si l'on veut, recevoir une formulation variationnelle équivalente utilisable aux fins numériques [5]. Un aspect fondamental est que les lois formulées pour un instant donné ne concernent pas les valeurs des forces ou des vitesses à cet instant mais leurs *limites à droite* de cet instant, supposées exister. Nous disons que les formulations en question sont *de type prospectif* et cette particularité est liée de façon essentielle à la décision de construire des algorithmes de type implicite, capables notamment de traiter l'éventualité de collisions.

Préservées de l'instabilité numérique, les méthodes CD peuvent se permettre des pas de temps beaucoup plus longs que les méthodes MD. La contrepartie est que le calcul de chaque pas est beaucoup plus lourd. Les inconnues du pas sont les impulsions de contact et la valeur finale de  $u$  (mettre ensuite à jour  $q$  est simple). Les conditions à satisfaire sont une discrétisation de l'équation de la Dynamique, à joindre aux lois de contact supposées relier les impulsions transmises par les divers contact à une certaine valeur de  $u$  représentative du pas. Cela fait un problème non linéaire non régulier – appelons-le P – avec, dans les simulations usuelles de granulats, quelques dizaines de milliers d'inconnues. Des microordinateurs peuvent cependant suffire.

Diverses techniques numériques pour résoudre P peuvent être employées [1][6][8]. Seul nous occupe ici un procédé itératif qu'on peut baptiser *Gauss-Seidel non linéaire*. Il consiste à passer en revue cycliquement les contacts identifiés comme actifs sur le pas de temps. A chacun de ces passages, on actualise la réaction correspondante en résolvant un problème unilatéral frottant concernant le seul contact en cause, les réaction des autres étant alors traitées comme connues. Ce procédé itératif doit être *initialisé* par un choix de valeurs des réactions des divers contacts. En l'absence d'information, on est tenté de choisir des valeurs nulles. Mais, dans le calcul d'évolutions de granulats denses, on accélère considérablement la convergence à chaque pas en choisissant comme initialisation du processus de Gauss-Seidel *les valeurs calculées au pas précédent* pour ceux des contacts qui étaient déjà présents. Ainsi

implémentée, une méthode CD répond aux exigences formulées au parag 1 : les valeurs des forces de contact font partie de la description de chaque état.

*Il en va de même si une méthode MD est employée*, puisque les valeurs des réactions sont directement reliées à des micro-déplacements qui doivent être connus au début de chaque pas.

Dans les perspectives du présent exposé, la procédure CD par Gauss-Seidel présente l'intérêt considérable, en cas de pluralité de solutions, de permettre de les atteindre toutes. En effet, après avoir délimité l'ensemble des valeurs plausibles des réactions, il suffira de répéter un grand nombre de fois la procédure avec des initialisations tirées au sort dans cet ensemble. Toute solution éventuelle a sa chance d'être atteinte.

Un procédé moins lourd pour explorer des ensembles de solutions est de fixer une initialisation mais de varier la procédure de Gauss-Seidel, le plus simple pour cela étant de modifier d'une fois à l'autre l'ordre du balayage cyclique des contacts. Si  $\kappa$  est le nombre de ces contacts, on obtiendra au plus  $(\kappa - 1)!$  solutions différentes, mais l'exemple ci-dessous montre qu'elles peuvent baliser plausiblement l'ensemble infini des solutions.

## 4 Granulat en équilibre sous pesanteur

La Figure 2 montre un détail d'un échantillon de 28 disques pesants en équilibre qui ont 56 points de contact, entre eux ou avec le conteneur. L'ensemble des composantes des réactions correspondantes forme un point inconnu  $\mathbf{r}$  de  $\mathbf{R}^{112}$ . La loi de Coulomb enferme ce point dans le cône polyédrique  $\mathcal{C}$ , produit des 56 cônes locaux (régions angulaires dans chacun des  $\mathbf{R}^2$  respectifs), tandis que les 84 conditions d'équilibre des 28 grains sous pesanteur donnée définissent une variété affine  $\mathcal{A}$ , de dimension 28 dans  $\mathbf{R}^{112}$ . Pour chaque contact, l'ensemble des valeurs possibles de la réaction est la projection sur un  $\mathbf{R}^2$  de l'ensemble polyédrique  $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}$ .

Le grain 1, en haut de l'empilement, prend appui par deux points seulement  $A$  et  $B$  sur les grains sous-jacents. L'indétermination des deux réactions implique simplement une force inconnue parallèle à  $AB$ , ce qui fait que les projections correspondantes de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}$  se réduisent en ce cas à des segments de droites. Situation semblable pour le grain 2.

Par contre, le grain 3 possède quatre contacts avec des grains eux-mêmes en situation de sous-détermination. La réaction en chacun des points  $E$  et  $F$  est indéterminée dans un domaine polygonal dont la représentation en grisé est produite comme suit : Le programme procède à des calculs répétés des valeurs d'équilibre en modifiant à chaque fois certains choix dans l'algorithme de Gauss-Seidel ; le résultat pour chaque réaction est affiché par un point. Une surprise est de voir apparaître dans ce grisé les fantômes de certaines arêtes du polyèdre multidimensionnel  $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}$ . Pour des raisons encore inexplicées, les points limites d'itérations dans  $\mathbf{R}^{112}$  sont un peu plus fréquents au voisinage de certaines faces de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}$  et, a fortiori, au voisinage des arêtes qui sont leurs intersections.

Sont agrandis en encadrés les résultats de deux types de calcul différents. A droite, les itérations de Gauss-Seidel sont lancées à partir de valeurs initiales choisies au hasard, ce qui garantit la possibilité d'atteindre toute solution. A gauche, les valeurs initiales sont nulles, seul étant modifié au hasard, d'un calcul à l'autre, l'ordre de balayage des contacts. On constate que les deux procédures dessinent les mêmes domaines d'indétermination, mais elle ne font pas ressortir les mêmes arêtes fantômes.

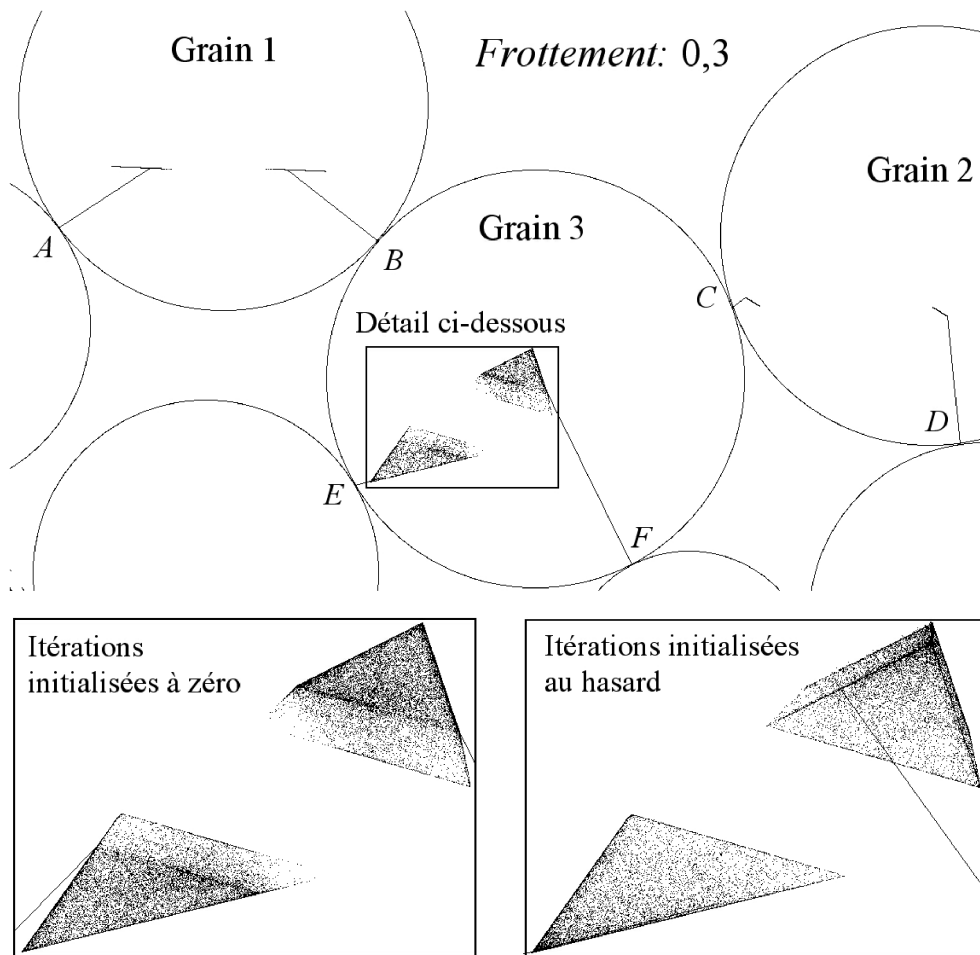


Figure 2 – Modèle bidimensionnel de granulat en équilibre sous pesanteur.

## 5 Flot granulaire sur une pente

Les données de la Figure 3 proviennent d'un modèle bidimensionnel d'écoulement granulaire dense sur un sol rectiligne fixe incliné de  $26,5^\circ$  vers la droite, mais montré horizontalement sur le dessin. L'échantillon est constitué de grains polygonaux convexes dont les formes ont été créées aléatoirement. La rugosité du sol est simulées par des grains collés ayant la même dispersion de formes et de tailles que les grains libres. Pour imiter dans une certaine mesure une couche de grains qui serait illimitée vers l'amont et vers l'aval, on emploie l'artifice des *conditions aux limites périodiques* : le calcul traite seulement des grains dont les centres d'inertie se trouvent dans une cellule rectangulaire. Les grains voisins des côtés amont ou aval de cette cellule peuvent interagir par contact avec des grains virtuels, images par trans-

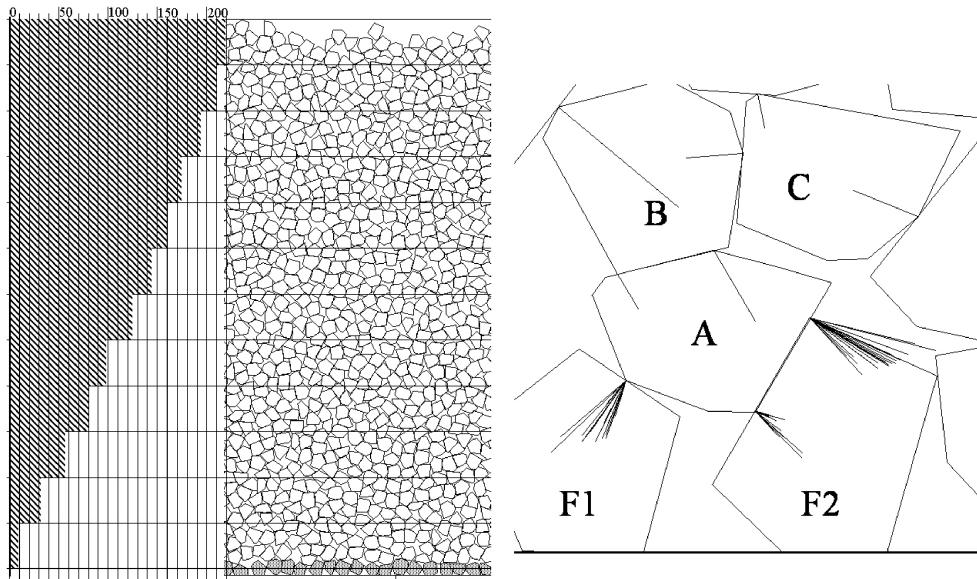


Figure 3 – Ecoulement granulaire sur une pente.

lation de grains appartenant à la cellule. Lorsqu'un grain sort de la cellule en franchissant un de ces côtés, il est remplacé dans le calcul par une de ses images, en conservant les paramètres de vitesse.

La hauteur de la couche en écoulement est divisée en 12 tranches sur chacune desquelles est calculée la moyenne de la composante correspondante de la vitesse des grains. De là le "profil des vitesses" montré à gauche.

Le calcul des forces de contact (ou des percussions de contact en cas de collision) dans de telles situations dynamiques comporte une indétermination beaucoup moins grande que dans les situations d'équilibre. On se l'explique en observant que, si un contact est glissant, la loi de Coulomb relie le support de la force de contact au vecteur vitesse de glissement, ce qui est une information plus riche que la simple appartenance de cette force au cône de Coulomb. On doit néanmoins s'attendre aussi à la présence de contacts non glissants. La conclusion d'essais de cette sorte est que si on applique la recommandation faite plus haut : *initialiser les itérations de Gauss-Seidel au moyen des forces calculées au pas précédent*, l'indétermination devient négligable pour la plupart des besoins.

Il reste à exécuter la seconde partie de notre programme : estimer l'amplitude de l'indétermination qui se manifeste lorsqu'on ne suit pas la recommandation.

La partie droite de la figure montre les grains F1 et F2, collés au sol, et quelques grains libres. Lorsque deux grains polygonaux se touchent le long d'un segment, la procédure de détection déclare seulement deux points de contact, aux extrémités de ce segment (ce qui revient à imaginer que chaque polygone présente sur chacune de ses arêtes une concavité infinitésimale). A partir de chaque point de contact, le programme dessine un segment de droite représentant la force de contact avec une unité graphique choisie.



Les grains F1 et F2 forment un seul solide fixe que le grain A, dont la vitesse est trouvée nulle, touche en trois points. Ces circonstances locales sont analogues à ce qu'on a pu voir au Parag. précédent pour un système entièrement en équilibre. Le calcul a été répété un certain nombre de fois en initialisant à zéro les itérations de Gauss-Seidel mais en adoptant à chaque fois un ordre différent pour le balayage de l'ensemble des contacts du granulat. Les éventails observés en chacun des trois points de contacts donnent une idée de l'indétermination des forces de contact correspondantes.

Par contre, les deux points de contact déclarés entre les grains A et B ne montrent aucune fluctuation des forces. Ces deux grains ont une vitesse de glissement non nulle et les deux forces ont la même direction correspondant à un frottement égal à 0,3. La figure montre aussi des contacts simples, en lesquels les forces ne fluctuent pas non plus.

## Références

- [1] ALART, P., RENOUF, M. Un nouvel algorithme de quasi-optimisation pour la résolution des problèmes multicontacts et application aux milieux granulaires, *16ème Congrès Français de Mécanique*, Nice (2003).
- [2] ANDERSON, L.-E., KLARBRING, A. Existence and uniqueness for quasistatic contact problems with friction, in (M.D.P. MARQUES, J.A.C. MARTINS, eds.) *Proc. 3rd. Contact Mechanics International Symposium*, Kluwer Academic Publishers, 245-260 (2002).
- [3] BALLARD, P. A counter-example to uniqueness in quasi-static elastic contact problems with small friction, *Int. J. Engng. Sci.*, **37**, 163–178 (1999).
- [4] BROGLIATO, B. *Nonsmooth Mechanics*, 2d. edition, Springer (1999).
- [5] FORTIN, J., DE SAXCÉ, G. Modélisation numérique des milieux granulaires par l'approche du bipotentiel, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. IIB*, **327**, 721–724 (1999)
- [6] JEAN, M. Simulation numérique discrète de matériaux granulaires, in (B. CAMBOU, M. JEAN, eds.) *Micromécanique des matériaux granulaires*, Hermes (2002).
- [7] MOREAU, J. J. Numerical dynamics of granular materials, in (M.D.P. MARQUES, J.A.C. MARTINS, eds.) *Proc. 3rd. Contact Mechanics International Symposium*, Kluwer Academic Publishers, 1–16 (2002).
- [8] MOREAU, J. J. An introduction to unilateral dynamics, in *Novel Approaches in Civil Engineering* (M. FRÉMOND, F. MACERI, eds), Springer-Verlag, 1–45 (2003).
- [9] PFEIFFER F., GLOCKER CH. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, John Wiley and Sons (1996).