HAL
open science

Modélisation et simulation de matériaux granulaires

Jean Jacques Moreau

To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Modélisation et simulation de matériaux granulaires. 35ème Congrès National d'Analyse Numérique , Le Département de Mathématiques de l'Université de Montpellier II et la SMAI, Jun 2003, La Grande Motte, France. hal-01793668

HAL Id: hal-01793668

https://hal.science/hal-01793668v1

Submitted on 16 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

In (B. Mohammadi, ed.) : Actes du 35e Congrès National d'Analyse Numérique, 2-6 juin 2003, CD ROM.

Modélisation et simulation de matériaux granulaires

Jean Jacques MOREAU
Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR 5508,
case 048, Université Montpellier II, 34095 Montpellier cedex 5

1 Introduction

1.1 Objectif

La Mécanique des Milieux Granulaires est un thème de recherche active, à la fois dans la communauté du Génie Civil et dans celle de la Physique des Milieux Condensés. Une des voies d'investigation suivies, en parallèle avec l'expérimentation physique et une large variété d'approches théoriques est la simulation numérique. On modélise un granulat (supposé dans ce qui suit sec et non cohésif) comme une collection de solides soumis aux liaisons unilatérales de non-interpénétrabilité mutuelle des grains et de confinement par des parois, avec frottement en cas de contact.
Dès qu'on a pu se convaincre, par confrontation avec des observables, de la validité des modèles, le calcul apporte une information très riche sur des éléments pratiquement inaccessibles : transmission des forces dans le granulat, microstructure géométrique, conséquences des hypothèses faites sur les actions mutuelles des grains, milieu intersticiel, etc., d'importance évidente lorsqu'on veut atteindre une compréhension scientifique du sujet. Par une longue pratique, les chercheurs ont pris confiance dans cette interaction entre expérimentation physique, calcul numérique et élaboration théorique.

Dans d'autres domaines aussi, tels que la mécanique des machines (en particulier les robots), le besoin se manifeste de calculer le mouvement, ou de discuter l'équilibre, de collection de corps rigides ou déformables entre lesquels des contacts, usuellement affectés de frottement, sont susceptibles de s'établir ou de se rompre [9].

La situation peut être qualifiée de *non régulière* pour les raisons suivantes.

Les conditions géométriques de non-interpénétration des membres du système et, éventuellement, celles de leur confinement unilatéral par des parois extérieures s'expriment par une famille d'inégalités concernant les paramètres de position. Dans la variété $\mathcal{Q}$ de ces paramètres, l'ensemble des positions permises, au lieu d'être une sous-variété régulière comme lorsqu'on introduit une liaison additionnelle en Mécanique Analytique classique, est une région de $\mathcal{Q}$ dont la frontière est faite de morceaux d'hypersurfaces (des millions de tels morceaux dans les applications usuelles aux granulats) se rejoignant selon des "arêtes". Cela peut s'appeler la *non-régularité spatiale*.

La réalisation mécanique des liaisons de non-interpénétrabilité implique des *forces de contact*, gouvernées par des lois très peu régulières. Par exemple, dans le cas le plus simple, celui d'un contact ponctuel à frottement nul, la loi consiste en la relation suivante entre le vecteur force de contact $\mathcal{R}$ et l'*interstice* $g \geq 0$: si $g > 0$ on a $\mathcal{R} = 0$ tandis que si $g = 0$, $\mathcal{R}$ est quelque part sur la demi-droite normale aux corps en contact. Par ailleurs, si un frottement sec est pris en compte, il introduit une relation entre la force de contact et la vitesse relative locale des corps concernés dont le graphe n'est pas une variété régulière, mais est fait de parties à première vue hétéroclites. Tout cela peut s'appeler *non régularité en loi*. Noter que ces relations ne permettent d'exprimer aucune des variables en cause comme fonction univoque des autres [17].

Enfin, si une *collision* survient entre des corps traités comme rigides, on attend des sauts de vitesse : c'est la *non régularité temporelle*. Plus subtilement, la Dynamique de systèmes

présentant du frottement sec peut faire ressortir des instants *paroxystiques*, dont l'exemple le plus connu est appelé improprement paradoxe de Painlevé.

Dans la majorité des techniques numériques présentées dans la littérature, ces difficultés sont abordées au moyen d'approximations régularisantes. La non-interpénétrabilité des corps est remplacée par des lois de répulsion suffisamment raides qui entrent en jeu lorsque deux d'entre eux s'approchent. De même, la loi du frottement sec de Coulomb est usuellement régularisée. On est ainsi ramené à des équations différentielles justiciables de techniques numériques classiques. Mais, dans chaque cas d'espèce, un compromis doit être accepté entre l'exigence de précision et la raideur des équations approximantes. Cette raideur impose des pas de discrétisation très petits et souvent des inerties ou des viscosités artificielles sont introduites pour assurer la stabilité numérique. L'application d'une telle stratégie de calcul à des situations proprement dynamiques demande beaucoup de précautions et de savoir-faire. Son application est moins problématique dans la recherche d'états d'équilibre ou le calcul d'évolutions quasi-statiques, indifférentes à ce que la dynamique invoquée pour passer d'un quasi-équilibre à un autre peut avoir d'artificiel.
Les techniques numériques basées sur la régularisation des liaisons d'impénétrabilité sont souvent désignées par le sigle MD (pour *Molecular Dynamics*, en référence à leur usage dans les simulations numériques de dynamique moléculaire [46]).

Noter que, dans des logiciels de dynamique des machines, des approximations régularisantes sont communément appliquées aussi à des liaisons bilatérales, si les fonctionnalités du programme font introduire ces liaisons dans un système mécanique antérieurement paramétrisé [18].
Dans ce dernier domaine d'applications, le nombre d'objets concernés restant modéré, une mise en équations directe des problèmes à liaisons unilatérales reste également praticable. On cherchera à identifier des intervalles de temps sur lesquels l'ensemble des contacts effectifs demeure constant de même que le *statut* (glissant ou non) du frottement. Sur chacun de ces intervalles, le mouvement est calculé comme s'il s'agissait de liaisons bilatérales classiques, éventuellement avec frottement. On surveille en particulier les signes des composantes normales des réactions : si l'un d'entre eux devient incompatible avec l'unilatéralité, on conclut que le mouvement subséquent doit être calculé autrement. Delassus montra qu'en présence de plusieurs contacts, ceux qui cessent ne sont pas nécessairement ceux qui ont déclenché l'alerte et proposa un mode de prévision n'exigeant pas l'essai de toutes les combinaisons. Aujourd'hui, les arguments de Delassus sont remplacés par ce qu'on appelle, en Analyse Non Régulière, des *problèmes de complémentarité* [25][39]. Le frottement sec, ou tout autre phénomène impliquant des lois à seuil, peut de la même façon faire apparaître des instants critiques.
Un autre signal exigeant que les équations soient reconsidérées est l'apparition d'un nouveau contact, c'est-à-dire une *collision*. Le calcul du nouvel état de vitesse exige des informations phénoménologiques sur le processus de choc. Il est facile d'en concevoir sous la forme de relations entre les vitesses avant et après le choc, mais leur conformité à la réalité reste à discuter selon les circonstances [43][44].
L'approche décrite ci-dessus est communément désignée par le sigle ED (pour *Event Driven*).

Le présent exposé vise à préciser les fondements d'une technique numérique étiquetée CD (pour *Contact Dynamics*) [31][32]. Elle est basée elle aussi sur une mise en équations exacte, mais opère à temps discret, ce qui la rend capable au stade actuel de traiter sur micro-ordinateur des systèmes d'une dizaine de milliers de solides (elle possède en outre des variantes parallélisées). Elle permet de prendre en compte aussi la déformabilité des corps en présence [19]. Elle incorpore des procédures très simples pour traiter les collisions, mais la validité phénoménologique de ce traitement appelle naturellement les mêmes réserves que celle des autres formalisations.

En mécanique des granulats, des géomatériaux ou des maçonneries, les simulations numériques basées sur la prise en compte individuelle des grains ou des blocs, qu'elles soient de type MD, ED

ou CD, sont qualifiées de méthodes *DEM* (pour *Discrete Element Method* ou *Distinct Element Method*), par opposition avec la stratégie *FEM* (*Finite Element Method*) utilisée lorsqu'une loi de comportement homogénisée a été choisie, assimilant le granulat ou la maçonnerie à un milieu continu. Eviter que cette terminologie induise à confusion avec les travaux numériques concernant un milieu continu classique, maillé en éléments finis et soumis à des contacts unilatéraux frottants (voir entre autres [12][1][14][19][10][11][45]).

1.2 Contenu du papier

En préliminaire à la Dynamique, la Section 2 élucide quelques aspects cinématiques des conditions d'inégalité. Le *Processus de Rafle*, modèle primitif d'entrainement unilatéral, donne l'occasion de mettre en regard le type implicite et le type explicite d'approximation à temps discret.

La machinerie analytique nécessaire pour traiter les liaisons unilatérales dans les systèmes mécaniques de liberté finie est mise en place à la Section 3. On y voit comment des informations concernant des contacts, survenant en divers points de l'espace physique, seront renvoyées vers l'espace des paramètres abstraits.

Une première illustration en est fournie dans la Section 4 par le cas particulier des contacts sans frottement. A ce propos est introduite la notion centrale de l'approche *Contact Dynamics*, celle de loi de contact "de type prospectif". L'algorithme à temps discret qui en découle donne une idée de ce qui va venir.

Le frottement sec fait l'objet de la Section 5. La formulation de la loi de Coulomb en termes de bipotentiels fait ressortir la cohérence mathématique de cette loi, bien loin d'être une juxtaposition de cas hétéroclites.

A la Section 6, le traitement proposé des collisions, fait entrer dans la Dynamique Non Régulière. Les vitesses seront désormais des fonctions à variation (localement) bornée du temps, éventuellement discontinues. Le rôle des forces et des accélérations est tenu pas des mesures, à valeurs vectorielles, sur l'intervalle de temps concerné. Dans le cas particulier de la Dynamique régulière, ces mesures admettent des *fonctions densité* relativement à la mesure de Lebesgue, dont les valeurs sont des forces ou des accélérations au sens traditionnel.

L'approximation des solutions, qu'elles soient régulières ou non, par des algorithmes à temps discret, de type implicite relativement aux vitesses, fait l'objet de la Section 7. C'est le modèle général de la méthode *Contact Dynamics*.

La Section 8 définit une position épistémologique devant la pluralité de solutions pouvant notamment découler de la présence de frottement sec et montre comment la Mécanique des Milieux Granulaires fait face à cette situation.

A titre d'illustration, la Section finale 9 présente l'apport de la simulation numérique dans l'élucidation d'une question controversée: celle de la distribution des contraintes dans un tas de "sable".

2 Cinématique des liaisons unilatérales

2.1 Traitement différentiel d'une contrainte d'inégalité

Entendons par *point mobile* une application q d'un intervalle (de temps) I dans $\mathbb{R}^n$. Nous demandons à $q(t)$ de vérifier pour tout t dans I une inégalité

$$f(t, q(t)) \leq 0, \tag{1}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ désigne une fonction $\mathcal{C}^1$. En d'autres termes, $q(t)$ est astreint à appartenir quel que soit $t \in I$ à l'*ensemble mobile* $\Phi(t) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(t,x) \leq 0\}$.
On suppose que, pour t dans I et x dans $\mathbb{R}^n$, le *gradient* $\nabla f(t,x) := (\partial f/\partial x^1, \ldots, \partial f/\partial x^n)$ est un n-vecteur non nul.
Soit un instant t tel que la *dérivée à droite* $q'^+(t)$, appelée *vitesse à droite* du point mobile, existe. Par la règle des fonctions composées, on trouve que la fonction réelle $\tau \mapsto f(\tau, q(\tau))$ possède à $\tau = t$ une dérivée à droite égale à $f'_t(t,q(t)) + q'^+(t).\nabla f(t,q(t))$. Cette dérivée doit être ≤ 0 si (1), supposée vérifiée partout dans I, est réalisée à $\tau = t$ comme *égalité*. Au contraire, si (1) est stricte en ce point, aucune condition de signe ne restreint la dérivée à droite.
Pour t dans I et x dans $\mathbb{R}^n$, posons

$$\Gamma(t,x) := \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'_t(t,x) + v.\nabla f(t,x) \leq 0\} & \text{si} \quad f(t,x) \geq 0 \\ \mathbb{R}^n \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

de sorte que l'observation ci-dessus s'écrit $q'^+(t) \in \Gamma(t, q(t))$.
Ce qui suit peut être vu comme une *réciproque*.

Supposons que l'intervalle I, non necessairement compact, contienne son origine t_0 et que q soit *localement absolument continue* sur I. De façon équivalente, la dérivée (bilatérale) dq/dt existe presque partout dans I et égale une fonction $u : I \to \mathbb{R}^n$, la *fonction vitesse*, qui est localement intégrable (i.e. intégrable sur tout sous-intervalle compact) pour la mesure de Lebesgue sur I; notation : $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^n)$. Et, pour tout t dans I, on a

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds. \tag{3}$$

On démontre facilement [34]:

Lemme de Viabilité. *Supposons que la fonction q soit localement absolument continue sur I et que l'inclusion*

$$\frac{dq}{dt} \in \Gamma(t, q(t)) \tag{4}$$

soit vérifiée pour presque tout t dans I. Si l'inégalité (1) *est vérifiée à l'instant initial t_0, elle est vérifiée à tout instant ultérieur.*

Observer que ce Lemme s'attache à l'orientation du temps : si $f(t,q) \leq 0$, l'ensemble $\Gamma(t,q)$ est constitué des valeurs de la vitesse *à droite* compatibles avec le maintien ultérieur de cette condition.
Le terme "viabilité" est employé plus généralement en théorie des systèmes et en théorie de la commande pour désigner l'obligation faite à la trajectoire d'un processus de demeurer dans un ensemble donné. On pourra trouver dans [4] un exposé de ce sujet, développé d'ailleurs dans un contexte topologique trop raffiné pour qu'un énoncé aussi élémentaire que le Lemme ci-dessus y trouve place.

2.2 Exemple type d'entraînement unilatéral

Une condition de la forme (4) est appelée *inclusion différentielle* [5][13]. Vu que le second membre est multivoque, on ne peut a priori espérer l'unicité de la solution (si elle existe) d'un problème à donnée initiale.
Par *sélecteur* (ou sélection) de la *multifonction* $(t,x) \mapsto \Gamma(t,x)$, on entend une fonction univoque, soit $(t,x) \mapsto \gamma(t,x)$, telle que $\gamma(t,x) \in \Gamma(t,x)$ pour tout t et tout x. Alors

$$\text{(p.p. dans I)} \quad \frac{dq}{dt} = \gamma(t, q(t)) \tag{5}$$

est une équation différentielle dont les solutions localement absolument continues, consécutives à une donnée initiale $q(t_0)$ appartenant à $\Phi(t_0)$, s'il en existe, satisfont aux hypothèses du Lemme de Viabilité, ce qui assure $q(t) \in \Phi(t)$ pour tout $t \in I$.

Un exemple de base est le "sélecteur paresseux" de Γ, i.e. $\gamma(t,x)$ défini comme *l'élément de norme euclidienne minimum dans* $\Gamma(t,x)$. Si $f(t,x) < 0$, i.e. si x est intérieur à $\Phi(t)$, l'ensemble $\Gamma(t,x)$ consiste dans la totalité de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $\gamma(t,x)$ égale $\mathbf{0}$, le zéro de $\mathbb{R}^n$. Sinon, $\Gamma(t,x)$ égale un demi-espace, lequel contient $\mathbf{0}$ si $f'_t(t,x) \leq 0$, ce qui fait encore $\gamma = \mathbf{0}$. Au contraire, pour $f'_t(t,x) > 0$, on trouve $\gamma = -(f'_t/\|\nabla f\|^2)\nabla f$, un vecteur dirigé dans le sens de décroissance de f, normal en x à l'hypersurface $f(t,.) = const$ issue de ce point.

Pour ce choix de γ, une solution de (5) consécutive à une position initiale $q(t_0) \in \Phi(t_0)$ peut se décrire comme suit. Le point $q(t)$ appartient pour tout $t \in I$ à l'ensemble mobile $\Phi(t)$. Tant qu'il se trouve à l'intérieur de $\Phi(t)$, ce point reste au repos. C'est seulement lorsque la frontière de $\Phi(t)$, i.e. l'hypersurface d'équation $f(t,.) = 0$, atteint q en se déplaçant vers l'intérieur que le point prend une vitesse dans la direction normale intérieure, de manière à continuer d'appartenir à $\Phi(t)$. La grandeur de son vecteur vitesse égale la "célérité normale" de l' hypersurface.
Nous avons proposé d'appeler *Processus de Rafle* (angl. *Sweeping Process*) cette loi cinématique associant des mouvement de points au mouvement donné d'un ensemble, dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un espace de Hilbert réel. Voir [23][35] pour des références et des développements récents.

2.3 Caractérisation du processus par une inclusion différentielle

Si, au temps t, un point x appartient à l'hypersurface $f(t,.) = 0$, le vecteur $\nabla f(t,x)$ (nous l'avons supposé non nul) normal à cette hypersurface, est dirigé dans le sens sortant de la région $\Phi(t)$. La demi-droite issue de l'origine de $\mathbb{R}^n$, engendrée par $\nabla f(t,x)$, est dite constituer le *cône normal* (sortant) de $\Phi(t)$ au point x; notation: $\mathrm{N}_{\Phi(t)}(x)$. La définition d'un cône normal pour des ensembles moins réguliers que Φ est un vaste sujet; on en rencontrera d'autres cas dans la suite. Pour x dans l'intérieur de $\Phi(t)$, il se révèle cohérent de considérer $\mathrm{N}_{\Phi(t)}(x)$ comme réduit au zéro de $\mathbb{R}^n$, tandis que ce cône sera vide si $x \notin \Phi(t)$. En discutant les differents cas rencontrés dans le calcul du sélecteur paresseux, on voit que si $\gamma(t,x)$ est ce sélecteur, toute solution q de l'équation différentielle (5) vérifie, pour presque tout t, l'inclusion différentielle

$$-\frac{dq}{dt} \in \mathrm{N}_{\Phi(t)}(q(t)). \tag{6}$$

De façon inattendue *la réciproque est vraie*, i.e. (6) en dépit de son second membre multivalué est *équivalente* à l'équation différentielle (5), tant qu'on ne s'intéresse qu'aux solutions localement absolument continues.

De fait, soit $q : I \to \mathbb{R}^n$ une telle solution de (6). Pour presque tout t, la dérivée bilatérale $q' = dq/dt$ existe, de sorte que le second membre est non vide et par suite $q(t) \in \Phi(t)$; cela reste vrai pour tout t, par continuité. Pour t tel que $q(t)$ soit intérieur à $\Phi(t)$, (6) implique $q' = \mathbf{0}$, de sorte que (5) est aussi satisfaite. Supposons au contraire que $q(t)$ appartienne à la frontière, i.e. la fonction $\tau \mapsto f(\tau, q(\tau))$ s'annule à $\tau = t$. En ce cas la dérivée à droite $\dot{f}^+ = f'_t(t,q(t)) + q'^+(t).\nabla f(t,q(t))$, si elle existe, est ≤ 0 tandis que, symétriquement, la dérivée à gauche est ≥ 0. Par suite la dérivée bilatérale $q'(t)$, quand elle existe, satisfait $f'_t(t,q(t)) + q'(t).\nabla f(t,q(t)) = 0$, i.e. elle appartient à la frontière du demi-espace $\Gamma(t,q(t))$. De plus, (6) entraine que $q'(t)$ est dirigé selon la normale entrante au demi-espace. Elémentairement, tout cela caractérise $q'(t)$ comme égal au point proximal de $\mathbf{0}$ dans $\Gamma(t,q(t))$, à savoir $\gamma(t,q(t))$.

C'était sous la formulation (6) que le Processus de Rafle fut primitivement introduit [26][29], avec pour $\Phi(t)$ un ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert réel H. La motivation alors était l'évolution quasi-statique d'un système élastoplastique [27][28]. L'hypothèse de convexité

permet d'établir l'existence de solutions sous des conditions assez légères concernant l'évolution de $\Phi(t)$ et même d'étendre la définition à certaines évolutions discontinues. Une conséquence de cette convexité est que la multifunction $x \mapsto \mathrm{N}_{\Phi(t)}(x)$ est *monotone* dans le sens suivant (voir par exemple [8]) : quels que soient x_1, x_2 dans H, y_1 dans $\mathrm{N}_{\Phi(t)}(x_1)$, y_2 dans $\mathrm{N}_{\Phi(t)}(x_2)$, on a $(x_1 - x_2).(y_1 - y_2) \geq 0$, où le point désigne le produit scalaire de H. Par un calcul élémentaire, cette inégalité entraîne que, si $t \mapsto q_1(t)$ et $t \mapsto q_2(t)$ sont deux solutions localement absolument continues de (6), la distance hilbertienne $\|q_1 - q_2\|$ est une fonction non croissante de t. De cette propriété de *non expansion*, il résulte qu'une solution au plus de (6) peut s'accorder à une position initiale donnée $q(t_0)$.

Une autre source d'intérêt de la formulation (6) est de rendre évident que la succession des positions du point q est reliée à celle de la région mobile Φ d'une manière *indépendente de l'horaire* (angl.: *rate independent*). En effet, parce que le second membre est un cône, on trouve que l'inclusion différentielle est invariante pour tout changement de variable différentiable non décroissant.

Ce qui précède pourrait être développé plus généralement avec un ensemble mobile défini par une collection d'inégalités, comme cela sera fait dans la suite dans le contexte de la Dynamique. On trouvera des détails techniques dans [35].

2.4 Discrétisations implicites ou explicites

Venant à l'approximation des solutions au moyen de schémas numériques à temps discret, désignons par $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$, de longueur h, un pas de temps ('i' comme *initial*, 'f' comme *final*). Partant d'un approximant q_i de $q(t_\mathrm{i})$, obtenue comme résultat du pas de temps précédent, l'objet du calcul est un approximant q_f de $q(t_\mathrm{f})$.

La formulation (5) conduit naturellement à prendre $u_\mathrm{i} = \gamma(t_\mathrm{i}, q_\mathrm{i})$ comme estimation de la vitesse sur le pas de temps, ce qui engendre la prédiction $q_\mathrm{f} = q_\mathrm{i} + hu_\mathrm{i}$. C'est un schéma de calcul de type *explicite*.

Si c'est (6) qui est discretisé, en regardant $(q_\mathrm{f} - q_\mathrm{i})/h$ comme représentant la vitesse, une stratégie de type explicite ne permettrait pas d'exprimer q_f, puisque le second membre est multivalué. Au contraire, la stratégie *implicite* consiste à invoquer la valeur que ce second membre prendrait au point inconnu q_f, de sorte qu'on doit résoudre

$$q_\mathrm{i} - q_\mathrm{f} \in \mathrm{N}_{\Phi(t_\mathrm{f})}(q_\mathrm{f}) \tag{7}$$

(le facteur strictement positif h a été effacé, puisque $\mathrm{N}_{\Phi(t_\mathrm{f})}$ est un cône). Cela qualifie q_f comme une *projection orthogonale* de q_i sur $\Phi(t_\mathrm{f})$. Dans le cas où $\Phi(t_\mathrm{f})$ est convexe, la projection est unique et cela caractérise q_f comme le point le plus proche de q_i dans $\Phi(t_\mathrm{f})$. En particulier $q_\mathrm{f} = q_\mathrm{i}$ quand q_i se trouve appartenir à $\Phi(t_\mathrm{f})$. Nous avons proposé d'appeler cette procedure l'*algorithme de rattrapage* (angl.: *catching-up algorithm*) [29].

2.5 Complementarité

Vu la description faite du Processus de Rafle en 2.2 il est clair que la vitesse peut être discontinue. En ce qui concerne la prediction de type explicite $q_\mathrm{f} = q_\mathrm{i} + hu_\mathrm{i}$, elle demande seulement à u_i d'être la dérivée de la fonction q *à droite* de t_i. Ce qui suit peut servir d'introduction à la situation analogue que nous rencontrerons en Dynamique.
Supposons que la fonction q, associée à u par (3), vérifie (6) presque partout dans I. Notons t_1 un point de I et supposons que la fonction u possède une limite à droite de t_1, soit u_1^+; vu (3) cette limite constitue la dérivée à droite $\dot{q}^+(t_1)$. Prouvons que $u_1^+ = \gamma(t_1, q(t_1))$, ce qui est

une assertion plus forte que (5), laquelle était déclarée valoir presque partout et concernait une dérivée bilatérale.
Trivialement, les deux membres de cette égalité valent $\mathbf{0}$ si $f_1 := f(t_1, q(t_1)) < 0$. Sinon, i.e. si $f_1 = 0$, on a vu que

$$\dot{f}_1^+ := f'_t(t_1, q(t_1)) + u_1^+.\nabla f(t_1, q(t_1)) \leq 0. \tag{8}$$

L'inclusion (6) signifie l'existence d'une fonction $t \mapsto \lambda(t) \leq 0$ telle que $u(t) = \lambda(t)\nabla f(t, q(t))$. Puisque ∇f est continu et non nul, l'existence supposée de u_1^+ assure celle de la limite à droite λ_1^+ et

$$u_1^+ = \lambda_1^+ \nabla f(t_1, q(t_1)). \tag{9}$$

Si $\dot{f}_1^+ < 0$, l'instant t_1 est suivi d'un intervalle sur lequel $f < 0$. On a observé que cela implique $u = 0$, de sorte que λ s'annule sur cet intervalle et par conséquent aussi sa limite à droite λ_1^+. En résumé, on a

$$\dot{f}_1^+ \leq 0, \quad \lambda_1^+ \leq 0, \quad \dot{f}_1^+ \lambda_1^+ = 0, \tag{10}$$

un système de *conditions de complémentarité*, formalisme répandu dans beaucoup de domaines où l'on doit faire face à des conditions d'inégalité

Résoudre (9)(10), avec $\dot{f}_1^+$ défini comme dans (8), constitue un *problème de complémentarité linéaire*. Par des arguments d'Analyse Convexe, on montre que de tels problèmes équivalent à la recherche de points critiques de fonctions quadratiques dans des ensembles convexes polyédriques. Dans le cas particulier présent, où l'inégalité $\dot{f}_1^+ \leq 0$ exprime simplement que u_1^+ appartient au demi-espace $\Gamma(t_1, q(t_1))$, on vérifie immédiatement que le système (10) caractérise u_1^+ comme le minimiseur de la fonction $x \mapsto \|x\|^2/2$ sur le demi-espace, à savoir $\gamma(t_1, q(t_1))$.

2.6 Une illustration hydraulique

Supposons que $n = 2$ et que (t, x^1, x^2) sont des coordonnées cartésiennes dans l'espace de tous les jours, avec l'axe des t vertical descendant. Imaginons la région $f(t, x^1, x^2) \leq 0$ comme une cavité souterraine ; $\Phi(t)$ est donc, pour chaque t, la section de cette cavité par un plan horizontal. Visualisons la courbe $x^1 = q^1(t), x^2 = q^2(t)$ comme *un filet d'eau en écoulement stationnaire.*

L'équation différentielle (5), vu les diverse circonstances rencontrées dans l'expression du sélecteur paresseux γ, exprime que: i) toute partie du filet d'eau qui se trouve detachée de la paroi de la cavité est rectiligne et verticale; ii) lorsque l'eau s'écoule sur la paroi, elle suit une *ligne de pente* (cela est conforme à l'hydrodynamique sous les hypothèses simplificatrices que les effets de l'inertie sont négligeables devant la gravité et le frottement du liquide sur la paroi); iii) la dépendance de γ à l'égard du signe de f'_t exprime que l'eau peut seulement courir sur une portion de paroi tournée vers le haut: lorsqu'elle atteint le bord d'un surplomb éventuel, l'eau se détache et tombe verticalement dans la cavité comme il est dit en i).

Dans cet exemple, à la complication près qu'apporte l'*unilatéralité*, la comparaison de (5) et (6) reflète simplement l'équivalence classique des deux propriétés des lignes de pente d'une surface: en chaque point d'une telle ligne i) la pente est maximale; ii) la tangente est orthogonale à la ligne de niveau de la surface.

3 Dynamique unilatérale

3.1 Paramétrisation

On suppose que les positions éventuelles d'une collection de corps, relativement à un repère choisi, sont paramétrées (au moins localement) par des coordonnées généralisées, soit $q :=$

$(q^1, \ldots, q^n)$. Par souci de réduire le nombre n, cette paramétrisation peut avoir été construite en tenant compte de liaisons permanentes sans frottement imposées aux membres du système. Un mouvement consiste en une application $t \in I \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^n$ et, comme précédemment, cette application est supposée localement absolument continue, i.e. il existe une fonction vitesse $u : I \to \mathbb{R}^n$, localement intégrable, permettant de récupérer q sous la forme (3).

Après cela les liaisons de *non-interpénétrabilité* sont considérées. Les restrictions géométriques qu'elles imposent aux configurations du système sont supposées exprimées par une famille finie d'inégalités

$$f_\alpha(t, q) \leq 0, \quad \alpha \in \{1, \ldots, \kappa\}, \tag{11}$$

où $f_1, \ldots, f_\kappa$ sont des fonctions continûment différentiables données. La présence de t comme argument dans f_α, ménage la possibilité pour l'inégalité correspondante de décrre le confinement d'un membre du système par un obstacle extérieur ou une paroi de mouvement imposé.

Considérons par exemple une paire de corps, membres du système; leurs position dans le repère choisi sont connues dès que q est spécifié (ainsi que t en cas d'une paramérisation dépendant du temps). On peut alors prendre pour f_α l'expression, en fonction de (t, q), d'une mesure de l'*empiètement* des deux corps (ou *violation* de la liaison d'impénétrabilité). Cet empiètement est entendu avec un signe: on le compte négatif lorsque les deux corps sont séparés. La convention appliquée dans (11), de coder les positions permises au moyen de l'inégalité ≤ 0 vient de la théorie de l'Optimisation Convexe, où cette convention offre des avantages techniques. Mais aucune hypothèse de convexité n'est faite ici concernant les fonctions f_α: une telle hypothèse n'étant pas conservée dans un changement de paramétrisation, elle ne peut en général avoir de signification mécanique. Si on préfère travailler avec l'inégalité ≥ 0, on n'a qu'à considérer, au lieu de l'empiètement, la quantité opposée appelée *interstice* (angl.: *gap*) entre les corps concernés.

Le formalisme ci-dessus n'est pas limité aux collections de corps strictement rigides car q peut aussi inclure les paramètres d'une représentation approchée de la déformabilité. De tels paramètres additionnels peuvent provenir d'un maillage en Eléments Finis ou d'une représentation modale de la dynamique des déformations [19][20].

Remarque. –A la différence du problème d'évolution présenté aux paragraphes 2.2 et suivants, qui était formulé en termes de conditions différentielles du premier ordre, la Dynamique, qu'on va aborder dans cette section, est traditionnellement vue comme gouvernée par des équations différentielles du second ordre. Remplacer, comme il est banal, des conditions différentielles du second ordre concernant q par un nombre plus grand de conditions du premier ordre concernant simultanément q et u est ici plus qu'un artifice mathématique. La fonction q est naturellement plus régulière que la fonction u dont elle est une intégrale. En fait, dans le contexte de la Mécanique non Régulière, on ira jusqu'à admettre des discontinuités pour la fonction u et entendre en un sens élargi les conditions différentielles que la Dynamique lui impose. Par ailleurs, en tant que paramètres décrivant l'état du système, q et u ont des natures profondément différentes.

En effet c'est seulement pour abréger l'exposition que, dans ce papier comme dans la majeure partie de la littérature consacrée au sujet, q est vu comme un élément de $\mathbb{R}^n$. Il est bien connu que, dans le cadre de la Mécanique Analytique classique, l'ensemble des positions éventuelles d'un système de liberté n constitue plus précisément une variété différentielle, soit $\mathcal{Q}$, de dimension n dont la topologie globale ne permet pas usuellement le paramétrage par une seule *carte*. Dans un mouvement, ce que nous notons $t \mapsto u$ n'est pas proprement une fonction, mais une *section du fibré tangent*: pour chaque t, la valeur $u(t)$ est un élément de l'espace vectoriel tangent $\mathcal{Q}'_q$ au point $q(t)$ de $\mathcal{Q}$. Les réels $u^i(t)$ sont les composantes de $u(t)$ sur une base ad hoc de $\mathcal{Q}'_q$. Que ce dernier soit un espace vectoriel permet de disposer des concepts de linéarité (on va

l'invoquer ci-dessous pour les applications G_α, qui envoie $\mathcal{Q}'_q$ dans $\mathbb{E}^3$ et sa transposée G^*_α, qui envoie l'espace autodual $\mathbb{E}^3$ dans $\mathcal{Q}'^*_q$, espace vectoriel cotangent au point q de la variété) ou de convexité. Pour une mise en place de la Dynamique Unilatérale avec ce souci de précision, voir [7].

3.2 Cinématique des contacts

Supposons que l'inégalité $f_\alpha \leq 0$ exprime le non-empiètement local d'une paire de membres du système, soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, de sorte que l'égalité $f_\alpha = 0$ corresponde au contact de ces deux corps en un point de l'espace noté M_α. Nous supposons ici que ce point de contact est isolé, mais d'autres contacts, étiquetés par d'autres valeurs de α, sont aussi possibles entre les mêmes corps au même instant. Pour tout mouvement imaginé $t \mapsto q(t)$ faisant passer le système par la position considérée à un certain instant t, avec une certaine valeur de $u = dq/dt \in \mathbb{R}^n$, l'analyse de la définition du paramétrage permet d'exprimer les vecteurs vitesses $\mathcal{V}_\alpha$ et $\mathcal{V}'_\alpha$ des particules respectives de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ passant au point M_α comme fonctions affines de u. Il en est donc de même pour la *vitesse relative* $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{V}_\alpha - \mathcal{V}'_\alpha$ du corps $\mathcal{B}$ par rapport au corps $\mathcal{B}'$ en ce point, soit

$$\mathcal{U}_\alpha = G_\alpha\, u + \mathcal{W}_\alpha, \tag{12}$$

où $G_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^3$ (l'espace des vecteurs de l'espace physique) désigne une application linéaire, dépendant de t et q. Peu importe à ce stade que le mouvement imaginé préserve ou non le contact. Le terme $\mathcal{W}_\alpha \in \mathbb{E}^3$, fonction connue de t et q, s'annule dans le cas usuel d'une paramétrisation indépendante du temps.

Une expression identique est obtenue si $f_\alpha \leq 0$ exprime le confinement d'un membre $\mathcal{B}$ du système par un obstacle extérieur ou paroi de mouvement imposé. Supposons dans ce cas que l'égalité $f_\alpha = 0$ corresponde à un contact localisé en un point, encore noté M_α. La vitesse locale, en ce point, du corps $\mathcal{B}$ par rapport à la paroi a la même forme que $\mathcal{U}_\alpha$ dans (12), où maintenant $\mathcal{W}_\alpha$ reflète la vitesse connue de la paroi au point M_α (si la paramétrisation est indépendante du temps, $\mathcal{W}_\alpha$ égale l'opposé de ce vecteur vitesse locale).

Au point de contact M_α, nous supposons qu'un *plan tangent commun* aux surfaces respectives des corps concernés a été défini. Cela n'exige pas que les deux surfaces soient lisses; par exemple, le contact peut avoir lieu entre un corps lisse et un coin ou une aspérité aigue de l'autre. Soit $\mathbf{n}^\alpha$ le vecteur unité normal à ce plan, *dirigé vers* $\mathcal{B}$. Dans le calcul numérique, comme dans les études d'existence, il se révèle utile d'étendre conventionnellement la définition des éléments ci-dessus à un voisinage de la valeur concernée de (t, q) dans $I \times \mathbb{R}^n$. Cela permet d'exprimer comme fonction de (t, q) l'*interstice normal*, soit $g_\alpha(t, q)$, entre $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$, *compté négativement en cas d'empiètement*. Classiquement, la dérivée de la fonction $t \mapsto g_\alpha(t, q(t))$ égale $\mathcal{U}_\alpha.\mathbf{n}^\alpha$, composante normale de la vitesse relative des deux corps au point M_α.
Parfois, dans la littérature consacrée aux méthodes numérique, la dérivée seconde de l'interstice est improprement désignée comme "accélération relative normale". En fait, puisque les particules impliquées dans la définition de $\mathcal{U}_\alpha$ ne sont pas les mêmes d'un instant à l'autre, cette dérivée seconde n'a en général rien à voir avec le vecteur accélération relative. Soit par exemple un corps de forme circulaire ou sphérique: des rotations peuvent lui être données sans changer sa position globale, fournissant donc le même interstice alors que l'accélération normale est modifiée.

Remarque. – La représentation de la non-interpénétration de deux corps par un ensemble fini d'inégalités à premier membre lisse fonctionne dans la plupart des situations pratiques. Toutefois, la non-interpénétration ne peut pas être décrite de cette manière au voisinage d'une configuration où deux asperités aigues ou coins viennent se toucher par leurs pointes. On le voit par le fait que, dans ce cas, l'ensemble des valeurs de la vitesse locale à droite $\mathcal{U}^+_\alpha$ qui sont compatibles avec la non-interpénétration n'est plus un cône convexe. Dans les contextes où

la probabilité d'un tel événement n'est pas négligeable, les techniques numérique doivent faire appel à des procédures adéquates (impliquant éventuellement $\mathcal{U}_\alpha$) pour identifier un plan de contact mécaniquement plausible.

3.3 Forces de contact

On suppose que les actions de contact que le corps $\mathcal{B}$ subit au point M_α de la part du corps $\mathcal{B}'$ sont descriptibles par une simple force $\mathcal{R}^\alpha$ (il n'y aurait pas de difficulté conceptuelle à adjoindre un couple ponctuel, rendant compte d'une résistance au roulement). Alors $\mathcal{B}'$ subit de la part de $\mathcal{B}$ la force $-\mathcal{R}^\alpha$. La machinerie habituelle de la Dynamique Analytique demande une représentation de cette paire de forces, relativement à la paramétrisation choisie, par des *composantes covariantes* (ou composantes généralisées). L'algèbre des puissances virtuelles mise en œuvre dans cette représentation fait que ces composante covariantes constituent l'élément suivant de $\mathbb{R}^n$

$$r^\alpha = G_\alpha^* \mathcal{R}^\alpha, \tag{13}$$

où $G_\alpha^* : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}^n$ désigne la *transposée* de l'application linéaire G_α, au sens des autodualités usuelles de $\mathbb{E}^3$ et de $\mathbb{R}^n$.

La convention de sommation implicite ne sera jamais appliquée aux indices grecs.

Si l'inégalité $f_\alpha \leq 0$, exprime le confinement d'un membre $\mathcal{B}$ du système par un obstacle extérieur de mouvement imposé, on a dit que (12) vaut encore, $\mathcal{U}_\alpha$ désignant cette fois la vitesse locale de $\mathcal{B}$ relativement à cet obstacle. On trouve alors que r^α en (13) fournit les composantes covariantes de la force $\mathcal{R}^\alpha$ seule, agissant sur $\mathcal{B}$ au point de contact. Son antagoniste, exercée par $\mathcal{B}$ sur l'obstacle n'est pas une force appliquée au système. Observer que le terme $\mathcal{W}_\alpha$ n'apparaît pas dans (13); c'est parce que le formalisme des puissances virtuelles, au moyen duquel sont définies les composantes covariantes, traite les liaisons comme figées à l'instant t.

3.4 Equation de la Dynamique

Plaçons-nous pour le moment dans le cadre de la Dynamique Régulière, où est invoquée la dérivée seconde de la fonction $t \mapsto q(t)$. On demande donc à la fonction vitesse $t \mapsto u(t)$ d'être localement absolument continue. Utilisant la méthode de Lagrange ou toute autre technique classique de la dynamique des solides, on obtient une équation différentielle, à lire comme une égalité d'éléments de $\mathbb{R}^n$,

$$A(t,q)\frac{du}{dt} = F(t,q,u) + \sum_\alpha r^\alpha, \tag{14}$$

où A désigne la *matrice d'inertie*, de dimension $n \times n$. Si la paramétrisation est régulière, cette matrice est définie positive. L'expression F englobe certains termes standards (communément qualifiés de "centrifuges" et de "gyroscopiques") avec aussi les composantes covariantes de forces appliquées, données comme fonctions du temps, de la position du système et de sa vitesse. Les éléments $r^\alpha, \alpha \in \{1, 2, \ldots, \kappa\}$, sont faits des composantes covariantes des forces de contact respectives, telles qu'elles sont exprimées en (13).

A cette équation différentielle il faut adjoindre les restrictions géométriques exprimées par les inégalités (11).

Le même formalisme demeure applicable lorsque q est relié à une certaine fonction vitesse u par des relations cinématiques plus compliquées que (3). Par exemple, lorsqu'on traite des solides rigides tridimensionnels, il est usuel d'attacher à chacun d'eux un repère fait d'axes principaux

d'inertie au centre de gravité. Alors on peut décider de faire entrer parmi les constituants de la fonction u, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, les trois composantes relatives à ces axes du *vecteur rotation instantanée* du solide rigide, au lieu des dérivées temporelles de trois paramètres directionnels. Cela procure l'avantage considérable d'engendrer une contribution à la matrice A qui est diagonale et constante à l'égard de t et q. Récupérer, à partir de ces composantes, l'évolution de paramètres directionnels du solide concerné demande seulement l'intégration, numériquement facile, des formules cinématique adéquates. Corrélativement, si des forces sont appliquées au solide, les moments de ces forces par rapport aux mêmes axes doivent être entrés comme composantes covariantes dans les lignes correspondantes du second membre de (14).

Comme la force $\mathcal{R}^\alpha$ s'annule lorsque le contact d'étiquette α n'est pas effectif, la sommation au second membre de (14) peut être restreinte aux valeurs de α appartenant à

$$J(t,q) := \{\alpha \in \{1,\ldots,\kappa\} \mid f_\alpha(t,q) \geq 0\}. \tag{15}$$

Les inégalités géométriques (11), jointes à l'équation différentielle (14), ne suffisent pas à déterminer le mouvement consécutif à des conditions initiales. On doit ajouter des informations phénoménologiques concernant les forces de contact. Puisque le phénomène de contact a lieu dans l'espace physique, on s'attend à ce que ces informations mettent en cause les vecteurs $\mathcal{R}^\alpha$ et $\mathcal{U}_\alpha$, ainsi que les valeurs de t et q spécifiant la position actuelle du système. Donc, pour tout α étiquetant un contact éventuel, une relation de la forme

$$\mathrm{loi}_\alpha(t,q,\mathcal{U}_\alpha,\mathcal{R}^\alpha) = \mathrm{vrai}, \tag{16}$$

appelée une *loi de contact*, doit être disponible.

4 Systèmes sans frottement

4.1 Contact sans frottement

Soit le contact d'étiquette α, concernant deux corps appelés $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$. Comme précédemment, le vecteur unité normal commun au point de contact M_α, dirigé vers $\mathcal{B}$, est noté $\mathbf{n}^\alpha$. Les hypothèses classiques de *non-frottement* et de *non-adhésion* signifient

$$\exists \rho_\alpha \geq 0 \ : \quad \mathcal{R}^\alpha = \rho_\alpha \mathbf{n}^\alpha. \tag{17}$$

On a convenu dans ce qui précède d'étendre les définitions de M_α et $\mathbf{n}^\alpha$, au moins dans un voisinage des valeurs concernées de t et q, à des configurations telles que g_α, l'*interstice normal*, prend des valeurs non nulles éventuellement < 0 et d'édicter $\mathcal{R}^\alpha$=0 si $g_\alpha > 0$. Définissons

$$\mathcal{K}_\alpha(t,q) := \begin{cases} \{\mathcal{V} \in \mathbb{E}^3 \mid \mathcal{V}.\mathbf{n}^\alpha \geq 0\} & \text{si} \quad g_\alpha(t,q) \leq 0 \\ \mathbb{E}^3 \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{18}$$

C'est l'ensemble des valeurs de la *vitesse à droite* au point M_α de $\mathcal{B}$ relativement à $\mathcal{B}'$ (ce dernier peut être un membre du système ou un obstacle extérieur de mouvement imposé) qui sont *compatibles avec la non-interpénétration*. Dans la première ligne, $\mathcal{K}_\alpha$ est un demi-espace, donc le *cône normal* $\mathrm{N}_{\mathcal{K}_\alpha}$, évalué à l'origine $\mathbf{0}$ de $\mathbb{E}^3$, égale la demi-droite engendrée dans cet espace vectoriel par $-\mathbf{n}^\alpha$. Dans la seconde ligne où $\mathcal{K}_\alpha = \mathbb{E}^3$, le cône $\mathrm{N}_{\mathcal{K}_\alpha}(\mathbf{0})$ se réduit à l'ensemble $\{\mathbf{0}\}$.

Par suite, à chaque instant t, l'hypothèse (17) de non-frottement et non-adhésion, *en incluant aussi l'éventualité de non-contact*, équivaut à édicter

$$-\mathcal{R}^\alpha \in \mathrm{N}_{\mathcal{K}_\alpha(t,q)}(\mathbf{0}). \tag{19}$$

Un pas décisif va être de remplacer cette inclusion par la condition apparemment plus compliquée

$$-\mathcal{R}^\alpha \in \mathrm{N}_{\mathcal{K}_\alpha(t,q)}(\mathcal{U}_\alpha), \tag{20}$$

qui est une *loi de contact* de la forme (16).

De fait, dans le présent contexte où la fonction u est continue, le même type d'argument qu'en 2.3 montre que, s'il y a contact, $\mathcal{U}_\alpha$ appartient au plan frontière du demi-espace $\mathcal{K}_\alpha$, donc $\mathrm{N}_{\mathcal{K}_\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) = \mathrm{N}_{\mathcal{K}_\alpha}(\mathbf{0})$, tandis qu'en cas de non-contact $\mathrm{N}_{\mathcal{K}_\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) = \{\mathbf{0}\}$ pour tout $\mathcal{U}_\alpha$. Bref, (20) contient toutes les stipulations impliquées lorsqu'on déclare un contact sans frottement et sans adhésion.

Mais *en plus*, (20) entraine $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{K}_\alpha(t,q)$, puisque sinon $\mathrm{N}_{\mathcal{K}_\alpha}(\mathcal{U}_\alpha)$ serait vide.

Si $g_\alpha(t,q) > 0$, cela ne restreint pas $\mathcal{U}_\alpha$ tandis que si $g_\alpha(t,q) \leq 0$, i.e. $\alpha \in J(t,q)$, cela impose $\mathcal{U}_\alpha.\mathbf{n}^\alpha \geq 0$. On a précédemment rappelé que $\mathcal{U}_\alpha.\mathbf{n}^\alpha$ égale la dérivée de la fonction $t \mapsto g_\alpha(t,q(t))$. On peut alors invoquer le Lemme de Viabilité du paragraphe 2.1, avec $f = -g_\alpha$, pour prouver que la condition (20), supposée vérifiée pour presque tout t dans I, entraîne : *la non-interpénétration est assurée pour tout $t > t_0$, pourvu qu'elle ait lieu en t_0.*

Cette dernière assertion vaut plus généralement pour toute loi de contact qui, outre diverses stipulations phénoménologiques, contient ceci

- dans tous les cas $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{K}_\alpha$,
- si $\mathcal{U}_\alpha \in$ intérieur $\mathcal{K}_\alpha$, alors $\mathcal{R}^\alpha = \mathbf{0}$.

En d'autres termes, cette loi est supposée assurer les implications

$$g_\alpha(t,q) \leq 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{n}^\alpha.\mathcal{U}_\alpha \geq 0 \tag{21}$$

$$\mathbf{n}^\alpha.\mathcal{U}_\alpha > 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{R}^\alpha = 0. \tag{22}$$

Nous proposons de dire qu'un paquet d'information, concernant le contact éventuel d'étiquette α, s'il englobe ces deux implications, est une *loi de contact de type prospectif*. L'idée sous-jacente est qu'une telle loi ne gouverne pas proprement les valeurs de $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{R}^\alpha$ à l'instant concerné, mais leurs *limites à droite* de cet instant, supposées exister. Par exemple, si $\mathcal{U}_\alpha.\mathbf{n}^\alpha > 0$, l'instant concerné est suivi d'un intervalle de temps sans contact. Puisque $\mathcal{R}^\alpha$ s'annule sur un tel intervalle, il en est de même pour sa limite à droite, laquelle vérifie donc bien (22).

4.2 Dynamique multicontacte sans frottement

On peut se faire une première idée des particularités géométriques de cette situation en considérant l'exemple simple d'un point matériel, mobile dans l'espace de la physique, repéré par ses coordonnées cartésiennes $q := (q^1, q^2, q^3)$. Si ce point est confiné par une paroi, éventuellement mobile, présentant une *arête* selon laquelle se rejoignent deux parties lisses S_1 et S_2, on peut représenter la région permise Φ par une paire d'inégalités de la forme (11). Lorsque le point est en contact sans frottement avec la surface S_α, il subit une réaction de la forme $\mathcal{R}^\alpha = \rho_\alpha \mathbf{n}^\alpha$, avec $\rho_\alpha \geq 0$ et $\mathbf{n}^\alpha$ vecteur unité normal à S_α dirigé vers la région Φ. Lorsqu'il se trouve sur l'arête, tout ce qu'on sait donc de la réaction totale $\mathcal{R} = \mathcal{R}^1 + \mathcal{R}^2$ est qu'elle appartient au *cône convexe engendré* par $\mathbf{n}^1$ et $\mathbf{n}^2$.

Selon une définition généralisant ce qu'on a fait en 2.3, on dira que le cône convexe engendré par $-\mathbf{n}^1$ et $-\mathbf{n}^2$ (c'est-à-dire le cône convexe engendré par ∇f_1 et ∇f_2, ces gradients étant supposés non nuls) constitue le *cône normal* à Φ au point concerné x de l'arête; notation $\mathrm{N}_\Phi(x)$. Comme en 2.3, $\mathrm{N}_\Phi(x)$ est par ailleurs déclaré vide si $x \notin \Phi$, réduit à $\{\mathbf{0}\}$ si x est intérieur à Φ et à une demi-droite si x appartient à une seule des deux surfaces. Dès lors, la totalité de l'information

disponible quant à la réaction totale se condense en $-\mathcal{R} \in \mathrm{N}_\Phi(q)$, ce qui couvre tous les cas de figure.

L'exemple ci-dessus souffre d'une simplification appauvrissante en ce que l'espace des q coincide avec l'espace de la physique. Si l'on en vient à un système multicontact sans frottement plus général, il va falloir mettre en relation la normalité dans $\mathbb{E}^3$, observable en chacun des points de contact éventuels M_α, avec la normalité du calculateur, c'est-à-dire celle de l'autodualité de l'espace $\mathbb{R}^n$ où vivent les q, u, r^α de l'équation (14).
On trouve la relation suivante [32] entre l'élément ∇f_α de $\mathbb{R}^n$ et le vecteur unité normal $\mathbf{n}^\alpha$ au point M_α, orienté vers $\mathcal{B}$:

$$\exists \lambda_\alpha \geq 0 \quad \text{tel que} \quad G_\alpha^* \, \mathbf{n}^\alpha = -\lambda_\alpha \, \nabla f_\alpha. \tag{23}$$

La preuve repose sur une version unilatérale du théorème algébrique des multiplicateurs de Lagrange, connue en Analyse Convexe sous le nom de *Lemme de Farkas* [42].
Dans toute la suite, on supposera que l'application linéaire G_α est *surjective* de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{E}^3$; de façon équivalente, sa transposée G_α^* est *injective* de $\mathbb{E}^3$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors λ_α dans (23) est non nul. Noter qu'un système multicorps peut présenter des positions sujettes à des effets de "coincement" qui contredisent cette hypothèse de régularité de G_α.

Grâce à (12) et (13), cela permet de remplacer la loi du contact sans frottement, qu'elle soit sous la forme (19) ou sous la forme (20), par des relations équivalentes affectant les composantes abstraites u et r^α au lieu de $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{R}^\alpha$. Avec la définition (15) de J, posons

$$W(t,q) := \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall \alpha \in J(t,q) \,:\, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v.\nabla f_\alpha \leq 0\}, \tag{24}$$

ensemble polyédrique convexe fermé. On trouve alors [35] qu'une valeur r de la somme $\sum_\alpha r^\alpha$ est compatible avec les lois de contact (20), à satisfaire pour tous les α, si et seulement si $-r \in \mathrm{N}_{W(t,q)}(u)$. En conséquence, l'objectif traditionnel de la Mécanique Analytique, l'élimination des réactions sans frottement, est atteint par rapprochement avec (14):

$$F(t,q,u) - A(t,q)\,\frac{du}{dt} \in \mathrm{N}_{W(t,q)}(u). \tag{25}$$

Cette *inclusion différentielle* [5], supposée vérifiée pour presque tout t, implique $u \in W(t,q)$, sans quoi le second membre serait vide. Il suffit alors d'appliquer le Lemme de Viabilité (parag. 2.1) à chacune des fonctions f_α pour conclure que, *si les conditions de non-interpénétration* (11) *sont satisfaites à l'instant initial, elles le sont à tout instant ultérieur.*

4.3 Algorithme à temps discret

Comme en 2.4 notons $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$, de longueur h, un pas de temps. Partant des valeurs approchées $q_\mathrm{i}, u_\mathrm{i}$ obtenues pour q and u au temps t_i, on doit calculer $q_\mathrm{f}, u_\mathrm{f}$, relatives au temps t_f.

Le terme $F(t,q,u)$ dans (25) est supposé dépendre doucement de ses arguments. On le remplace par la valeur F_m qu'il prend en $t = t_\mathrm{m} := t_\mathrm{i} + h/2$, $q = q_\mathrm{m} := q_\mathrm{i} + hu_\mathrm{i}/2$ et $u = u_\mathrm{i}$. De même la matrice A est remplacée par $A_\mathrm{m} := A(t_\mathrm{m}, q_\mathrm{m})$, définie positive donc inversible. C'est aussi au point $(t_\mathrm{m}, q_\mathrm{m})$ que les f_α sont calculés pour décider quels contacts seront traités comme effectifs sur le pas de temps en cause. On pose donc $J_\mathrm{m} := J(t_\mathrm{m}, q_\mathrm{m})$ et on approxime $W(t,q)$ par

$$W_\mathrm{m} := \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall \alpha \in J_\mathrm{m} \,:\, \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}(t_\mathrm{m}, q_\mathrm{m}) + v.\nabla f_\alpha(t_\mathrm{m}, q_\mathrm{m}) \leq 0\}. \tag{26}$$

On discrétise ainsi (25) en

$$F_{\mathrm{m}} - A_{\mathrm{m}} \frac{u_{\mathrm{f}} - u_{\mathrm{i}}}{h} \in \mathrm{N}_{W_{\mathrm{m}}}(u_{\mathrm{f}}), \tag{27}$$

ce qui donne (à peu près) un schéma de calcul implicite concernant la fonction u. Vu que $h > 0$ et que $N_{W_{\mathrm{m}}}$ est un cône, cette inclusion équivaut à

$$A_{\mathrm{m}}\,(u_{\mathrm{r}} - u_{\mathrm{f}}) \in \mathrm{N}_{W_{\mathrm{m}}}(u_{\mathrm{f}}), \tag{28}$$

où $u_{\mathrm{r}} := u_{\mathrm{i}} + hA_{\mathrm{m}}^{-1}F_{\mathrm{m}}$ peut être appelé vitesse "libre" ou "relaxée".
On peut interpréter cette écriture en mettant à la place de A_{m} la matrice unité, ce qui d'ailleurs ne restreint pas la généralité: cela revient à munir l'espace vectoriel des u de la structure euclidienne associée à la forme quadratique définie positive $u \mapsto u.A_{\mathrm{m}}u$ et à entendre le cône normal à W_{m} au sens de l'autodualité correspondante (voir [30] pour des précisions techniques). Alors on reconnaît dans (28) une caractérisation de l'inconnue u_{f} comme l'unique *point proximal de* u_{r} dans l'ensemble polyédrique convexe fermé W_{m}. La détermination de u_{f} est donc celle du point minimisant dans W_{m} la fonction quadratique $x \mapsto (x - u_{\mathrm{r}}).A_{\mathrm{m}}(x - u_{\mathrm{r}})$: c'est un problème classique de *programmation quadratique*.

Il n'y a plus qu'à terminer le pas par $q_{\mathrm{f}} = q_{\mathrm{m}} + hu_{\mathrm{f}}/2$.

Remarque 1. – Pour tout (t, q), la métrique euclidienne définie sur l'espace des u par la matrice d'inertie $A(t, q)$ est communément appelée la *métrique cinétique*. Cette métrique et l'autodualité correspondante sont associées à la dynamique du système matériel étudié d'une manière indépendante du paramétrage employé, ce qui n'est évidemment pas le cas pour l'autodualité de $\mathbb{R}^n$ invoquée dans les paragraphes antérieurs.

Remarque 2. – Ce qui précède caractérise l'incrément de vitesse $u_{\mathrm{f}} - u_{\mathrm{i}}$ comme minimisant une expression quadratique dans un ensemble polyédrique convexe fermé. Une démarche semblable est possible pour caractériser la dérivée du/dt. Le résultat peut être vu comme une extension du "principe" de moindre contrainte de Gauss au cas de systèmes présentant des liaisons unilatérales sans frottement, extension qui ne va pas de soi [24][25]. Etre capable de calculer du/dt à l'instant t_{i} permet d'envisager, au lieu du précédent, un schéma de discrétisation *de type explicite*, au prix d'une programmation nettement plus lourde. On comprend l'étendue du calcul à effectuer en considérant le cas élémentaire d'un simple point confiné par une surface lisse. L'expression de du/dt demande que soit invoquée, sous un formalisme ou un autre, la *courbure* de la surface au point concerné. En revanche, l'algorithme implicite décrit ci-dessus invoque seulement la normale à la surface, définie par le vecteur ∇f_α. *La courbure est prise en compte par le simple fait que cette normale varie d'un pas au suivant.* On reviendra plus loin sur la stratégie implicite, en montrant comment elle permet d'appréhender aussi bien des situations non régulières où l'accélération n'existe pas, telles que les collisions ou les paroxysmes frictionnels.

5 Frottement

5.1 Loi de Coulomb

L'analyse numérique du contact avec frottement sec entre corps *déformables*, discrétisés en éléments finis, est un sujet activement étudié (voir entre autres [12][1][14][19][10][11]), avec éventuellement aussi prise en compte d'une *adhésion* [41]. Bien que ces travaux aient en majorité été consacrés à des évolutions quasi-statiques (voir toutefois [45]), ils permettent d'apprécier la diversité des procédures possibles pour appréhender à la fois le caractère unilatéral de la liaison de non-interpénétrabilité et la présence de *seuils* dans les lois de frottement sec.
Dans le cadre du présent exposé, consacré aux systèmes de liberté finie, nous constatons simplement que la présence de frottement sec, gouverné par la loi de Coulomb, au contact éventuel

d'étiquette α peut s'exprimer par une relation de la forme (16). Traditionnellement, la loi de Coulomb est seulement invoquée pour des contacts persistants mais, pour nos besoins de Dynamique Unilatérale, on l'étendra jusqu'au cas $\mathcal{U}_\alpha.\mathbf{n}^\alpha > 0$ en veillant à lui donner le caractère d'une loi *de type prospectif*.

En laissant tomber pour alléger l'écriture l'étiquette α, on décrit le frottement de Coulomb (non ahésif) en un point de contact éventuel en donnant le *cône de Coulomb* $\mathcal{C}$, région conique convexe fermée de $\mathbb{E}^3$ à laquelle la force de contact $\mathcal{R}$ exercée par $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{B}$ doit appartenir en toutes circonstances. Dans le cas traditionnel, $\mathcal{C}$ est de révolution autour du vecteur normal $\mathbf{n}$ et le contient mais des situations plus générales, rendant compte d'un frottement anisotrope, sont possibles. La loi consiste en une relation entre la force $\mathcal{R}$ et la vitesse relative $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{B}'$ qui ressemble à une loi de plasticité en ce que les valeurs de $\mathcal{R}$ intérieures à $\mathcal{C}$ sont compatibles seulement avec $\mathcal{U} = 0$. Mais la "loi d'écoulement" qui caractérise les valeurs de $\mathcal{U}$ compatibles avec un $\mathcal{R}$ appartenant à la frontière de $\mathcal{C}$ ne comporte pas la normalité de $\mathcal{U}$ à cette frontière. Bref, ce n'est pas une loi "associée" (excepté si le frottement est nul).

5.2 Bipotentiels

La notion de *bipotentiel* a été introduite par De Saxcé et Feng [14] comme instrument pour traiter, du point de vue théorique comme numérique, des relations force/vitesse (ou contrainte/déformation) qui ne sont pas "associées". Voici l'aspect que prend cette technique dans le cas du frottement de Coulomb.
Soit $\mathbb{T}$ le sous-espace de $\mathbb{E}^3$ constitué des vecteurs orthogonaux à $\mathbf{n}$. Comme d'habitude, on décompose les vecteurs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{U}$ en leurs composantes normales et tangentielles

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\mathrm{T} + \mathcal{R}_\mathrm{N}\,\mathbf{n}, \quad \mathcal{R}_\mathrm{T} \in \mathbb{T}, \quad \mathcal{R}_\mathrm{N} \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_\mathrm{T} + \mathcal{U}_\mathrm{N}\,\mathbf{n}, \quad \mathcal{U}_\mathrm{T} \in \mathbb{T}, \quad \mathcal{U}_\mathrm{N} \in \mathbb{R}.$$

Classiquement, si la loi de Coulomb est restreinte à des situations où $\mathcal{R}_\mathrm{N}$ se trouve connu, par exemple $\mathcal{R}_\mathrm{N} = 1$, elle se trouve réduite à une relation entre $\mathcal{R}_\mathrm{T}$ et $\mathcal{U}_\mathrm{T}$ qui dans ce cas est de type "associé" [27]. Soit $\mathcal{D}_1 := \{\mathcal{R}_\mathrm{T} \in \mathbb{T} \mid \mathcal{R}_\mathrm{T} + \mathbf{n} \in \mathcal{C}\}$ (la *section unité* du cône $\mathcal{C}$); on définit dans $\mathbb{T}$ la fonction

$$\mathcal{T} \in \mathbb{T} \mapsto \varphi_1(\mathcal{T}) := \sup\{\mathcal{S}.\mathcal{T} \mid \mathcal{S} \in -\mathcal{D}_1\},$$

dite *fonction de dissipation* de ladite loi restreinte. Dans le cas traditionnel d'un frottement isotrope de coefficient γ, on a simplement $\varphi_1(\mathcal{T}) = \gamma\|\mathcal{T}\|$, $\mathcal{U}_\mathrm{N} = 0$ et on trouve que l'énoncé traditionnel équivaut à

$$\mathcal{R}_\mathrm{T} \in \mathcal{D}_1,\ -\mathcal{U}_\mathrm{T}.\mathcal{R}_\mathrm{T} = \varphi_1(\mathcal{U}_\mathrm{T}).$$

On reconnait dans l'expression $\mathcal{U}_\mathrm{T}.\mathcal{R}_\mathrm{T} = \mathcal{U}.\mathcal{R}$ la puissance (négative) de la force de contact; dans un bilan d'énergie mécanique, l'opposée de cette quantité figurera comme une puissance "perdue" ou "dissipée" (dans un bilan thermodynamique, on la retrouve sous forme de flux de chaleur) ce qui explique le nom donné à φ_1.

Comme en (18), définissons

$$\mathcal{K}(t,q) := \begin{cases} \{\mathcal{V} \in \mathbb{E}^3 \mid \mathcal{V}.\mathbf{n} \geq 0\} & \text{en cas de contact ou empiètement} \\ \mathbb{E}^3 & \text{en cas de non-contact.} \end{cases}$$

Le cône de Coulomb dépend de t et q ; posons $\mathcal{C} = \{\mathbf{0}\}$ en cas de non-contact. Par des arguments d'Analyse Convexe, on établit que la relation entre les éléments $\mathcal{U}$ et $\mathcal{R}$ de $\mathbb{E}^3$ exprimée par le système de conditions

$$\mathcal{U} \in \mathcal{K},\ \mathcal{R} \in \mathcal{C},\ -\mathcal{U}.\mathcal{R} = \varphi_1(\mathcal{U}_\mathrm{T})\mathcal{R}_\mathrm{N} \tag{29}$$

est une loi de contact *de type prospectif* qui, dans la situation standard, se réduit à la loi de Coulomb.
De plus on peut montrer que

$$\forall\, \mathcal{V} \text{ dans } \mathcal{K}, \quad \forall\, \mathcal{S} \text{ dans } \mathcal{C} : \quad \mathcal{V}.\,\mathcal{S} + \varphi_1(\,\mathcal{V}_{\mathrm{T}})\,\mathcal{S}_{\mathrm{N}} \geq 0,$$

de sorte que (29) signifie que la fonction réelle $(\mathcal{V},\, \mathcal{S}) \mapsto \mathcal{V}.\,\mathcal{S} + \varphi_1(\,\mathcal{V}_{\mathrm{T}})\,\mathcal{S}_{\mathrm{N}}$, séparément convexe par rapport à $\mathcal{V}$ et à $\mathcal{S}$, atteint au point $(\mathcal{U},\, \mathcal{R})$ sa valeur minimale relative à l'ensemble produit $\mathcal{K} \times \mathcal{C}$ et que *cette valeur minimale est zéro.*

6 Dynamique non régulière

6.1 Collisions

Ce qui précède a été développé dans le cadre traditionnel de mouvements assez réguliers pour que l'équation différentielle (14) ait un sens. On a seulement apporté assez d'attention au caractère unilatéral des liaisons de non-interpénétrabilité pour que les mouvements gouvernés par les équations écrites exhibent éventuellement des cessations de contact. Numériquement, l'algorithme à temps discret du parag. 4.3 appréhende très bien cette sorte d'évolution.

En revanche, la régularité de la fonction u ne doit plus être attendue en cas d'introduction soudaine d'un nouveau contact, c'est-à-dire une collision.

Il est usuel d'admettre qu'un tel phénomène se déroule sur un intervalle de temps $[t_c, t_c + \epsilon]$ suffisamment court pour que les déplacements y soient négligeables. La matrice A de l'équation (14) est ainsi traitée comme constante sur cette durée ; on intègre les deux membres sur l'intervalle. Le terme F donne une contribution négligeable, mais non les forces de contact, pour lesquelles on attend des valeurs d'autant plus grandes que l'interaction est plus brève. Il reste

$$u(t_c + \epsilon) - u(t_c) = A^{-1} \sum_{\alpha} p^{\alpha}. \tag{30}$$

Les p^{α} sont les intégrales des r^{α} ; ces dernières quantités sont reliées aux forces de contact $\mathcal{R}^{\alpha}$ par (13) et, comme avec A, on suppose la durée ϵ suffisamment courte pour que G^*_{α} soit traitée comme une matrice constante. Cela donne

$$p^{\alpha} = G^*_{\alpha}\, \mathcal{P}^{\alpha}, \tag{31}$$

où $\mathcal{P}^{\alpha}$, intégrale de $\mathcal{R}^{\alpha}$ sur l'intervalle, est appelée *percussion de contact.* Noter que les valeurs de α à considérer ne se limitent pas nécessairement à l'étiquette du contact brusquement introduit par la collision : si les corps qui se rencontrent font partie d'amas ayant déja des contacts, des percussions doivent aussi être attendues en ces contacts.
A ce stade de la formulation, on décide d'oublier la durée ϵ et d'interpréter le premier membre de (30) comme égal à $u^+(t_c) - u^-(t_c)$, amplitude d'un *saut instantané* de la fonction u

$$u^+(t_c) - u^-(t_c) = A^{-1} \sum_{\alpha} G^*_{\alpha}\, \mathcal{P}^{\alpha}. \tag{32}$$

Il manque des informations sur $\mathcal{P}^{\alpha}$, pour qu'on puisse déduire de cela la limite à droite $u^+(t_c)$, laquelle servira de vitesse initiale lorsqu'on calculera le mouvement consécutif à la collision. Depuis Darboux, il est traditionnel de procéder à une analyse du processus de collision grâce à un *changement d'échelle*, indexant l'évolution des vitesses par un micro-temps relativement auquel on invoque les équations de la Dynamique régulière sans pour autant que les positions changent. Les procédures de cette sorte comportent diverses variantes, un point délicat étant

de discuter l'importance éventuelle de déformations microscopiques des corps au voisinage des lieux d'impact. Elles révèlent au moins que la vitesses relative $\mathcal{U}_\alpha$ ne conserve pas en général une direction fixe durant l'évolution micro-temporelle. Les lois de contact, telles que la loi de Coulomb formulée à la section précédente, sont essentiellent des relations non-linéaires entre $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{R}^\alpha$. Les opérations d'intégration par lesquelles on définirait la moyenne de $\mathcal{U}_\alpha$ sur l'intervalle $[t_c, t_c + \epsilon]$ et la percussion $\mathcal{P}^\alpha$ ne commutent pas en général avec de telles relations (toutefois, la loi de Coulomb étant positivement homogène de degré zéro par rapport à $\mathcal{U}_\alpha$ et à $\mathcal{R}^\alpha$, la commutation se trouve justifiée si on a des raisons d'affirmer que $\mathcal{U}_\alpha$ conserve une direction et un sens fixes durant le processus).

6.2 Vitesses pondérées et restitution

Les techniques numériques auxquelles le présent papier sert d'introduction visent la dynamique de granulats ou de maçonneries pouvant comporter plusieurs dizaines de milliers de contacts. Si une collision survient, il semble hors de portée d'analyser les micro-évolutions induites en chacun de ces contacts. Ce qui suit réussit à adapter à de telles situations la formalisation pragmatique traditionnelle grâce à laquelle seules les vitesses avant choc (connues) et les vitesses après choc (inconnues du problème) entrent dans la description du phénomène.

On va admettre qu'en chaque contact – soit α son étiquette – une loi de contact telle que la loi de Coulomb (positivement homogène de degré 0 et complétée pour en faire une loi de type prospectif) relie la percussion $\mathcal{P}^\alpha$ à une *vitesse formelle* $\mathcal{U}^a_\alpha$ ("a" comme *average*). Celle-ci est définie par une pondération entre les valeurs avant et après choc $\mathcal{U}^-_\alpha$ et $\mathcal{U}^+_\alpha$, pondération qui peut d'ailleurs invoquer des coefficients différents pour les composantes *normales* $\mathcal{U}_{\alpha N}$ et *tangentielles* $\mathcal{U}_{\alpha T}$:

$$\mathcal{U}^a_{\alpha N} = \frac{\rho_\alpha}{1+\rho_\alpha}\mathcal{U}^-_{\alpha N} + \frac{1}{1+\rho_\alpha}\mathcal{U}^+_{\alpha N} \tag{33}$$

$$\mathcal{U}^a_{\alpha T} = \frac{\tau_\alpha}{1+\tau_\alpha}\mathcal{U}^-_{\alpha T} + \frac{1}{1+\tau_\alpha}\mathcal{U}^+_{\alpha T}. \tag{34}$$

Les paramètres empiriques ρ_α et τ_α seront appelés *coefficient de restitution normale* et *coefficient de restitution tangentielle*, dénominations justifiées par ce qui suit.

La loi de contact invoquée étant de type prospectif, les stipulations (21) et (22) entraînent que la percussion $\mathcal{P}^\alpha$ ne peut différer de zéro que si $\mathcal{U}^a_{\alpha N} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire $\mathcal{U}^+_{\alpha N} = -\rho_\alpha \mathcal{U}^-_{\alpha N}$, ce qui est formellement l'équation de restitution de Newton. Mais la procédure présente est plus riche qu'une simple loi de restitution, énoncée séparément pour chaque contact, en ce qu'elle permet aussi l'éventualité $\mathcal{P}^\alpha = \mathbf{0}$ pourvu qu'on ait en même temps $\mathcal{U}^a_{\alpha N} > 0$. C'est le calcul global, invoquant tous les contacts par l'intermédiaire de (32), qui tranche entre ces deux alternatives.

De manière analogue, ce calcul global peut, si le frottement est suffisant, déboucher sur le cas "vitesse tangentielle nulle" de la loi de Coulomb. Alors $\mathcal{U}^+_{\alpha T} = -\tau_\alpha \mathcal{U}^-_{\alpha T}$, ce qui exprime une restitution tangentielle.

L'exemple familier du *balancement* par lequel un bloc rectangulaire suffisamment élancé, posé sur un plan horizontal, atteint finalement son équilibre après des alternances de pivotement autour des deux coins inférieurs, montre l'inaptitude de la formule de restitution de Newton à modéliser les collisions dans un système exhibant plusieurs contacts : lorsque, à l'issue d'un pivotement autour de l'un des coins, l'autre coin vient heurter le plan horizontal, cette formule ne permettrait pas au premier coin de décoller. En revanche, la technique précédente, (appliquée de préférence avec des coefficients de restitution nuls) fournit des résultats conformes aux observations [40].

Invoquer deux coefficients ρ_α et τ_α pour construire une vitesse formelle, puis une loi de Coulomb de coefficient γ_α pour mettre cette vitesse en relation avec la percussion $\mathcal{P}_\alpha$, équivaut à édicter

une *loi de collision* à trois paramètres. Appliquée à la collision de deux corps sphériques (ou circulaires dans les modèles bidimensionnels) *par ailleurs libres*, cette loi se trouve mathématiquement équivalente à une loi à trois paramètres, proposée par d'autres auteurs sur des bases complètement différentes de ce qui précède et assez bien confirmée par l'expérience [15]. On se permettra donc de l'utiliser pour des corps dont la forme générale n'est pas trop loin de la sphère.

En revanche, pour des corps allongés tels que des barres, une simple loi à coefficients de restitution se révèle inadéquate [43]: l'issue d'une collision se trouve dépendre de la position des points d'impact, de l'orientation relative des barres et de l'angle d'attaque. En outre, la Thermodynamique comme l'observation quotidienne montrent que les collisions sont des phénomènes *dissipatifs* ; au contraire, l'application d'une loi de restitution à des corps éloignés de la forme sphérique peut faire prédire une inacceptable création d'énergie [44].

On a observé plus haut que, si une collision affecte des objets faisant par ailleurs partie d'amas de corps déja en contact, des percussions de liaison doivent être attendues en tous les contacts existants. La technique des vitesses pondérées prend bien en compte ce caractère collectif; les confrontations expérimentales montrent toutefois que, même pour des collections de grains sphériques, elle sous-estime la dissipation qui en découle. Entre autres éléments dans la discussion physique de cet écart on doit réaliser que la transmission des impulsions dans un amas doit en réalité s'échelonner dans le temps comme une propagation sonore. Un tel effet échappe forcément à la modélisation du système comme une collection de corps rigides.

Dans les implémentations usuelles de la méthode Contact Dynamics, la nécessité de faire face à un nombre considérable de contacts conduit à se contenter de cet artifice de la vitesse formelle et de ses deux coefficients de restitution, avec en outre le même coefficient de frottement que dans les épisodes de mouvement régulier. Cela permet à l'algorithme d'être à chaque pas prêt à traiter des collisions sans que la charge de calcul soit en rien alourdie. Mais il ne faudrait pas voir dans cette attitude pragmatique la proposition d'une théorie générale des chocs.

6.3 Discontinuités de la fonction vitesse

Pour développer la *Dynamique non régulière*, l'extension largement acceptée du cadre fonctionnel repose sur l'usage de fonctions vitesses *à variation bornée*, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, puisque l'intervalle I n'a pas été supposé compact, ce seront des fonctions à variation localement bornée, c'est-à-dire à variation bornée sur tout sous-intervalle compact; notation $\mathrm{lbv}(I, \mathbb{R}^n)$ (pour *locally bounded variation*). Toute u de cette sorte est localement Lebesgue-intégrable, ce qui garde un sens à (3).

La propriété classique d'une fonction à variation bornée d'admettre presque partout une dérivée n'a rien à voir avec notre sujet. Une telle dérivée de u, définie ponctuellement, ne permet pas en général de reconstruire u par intégration. En effet, les points de discontinuité éventuels de u, qui forment un ensemble au plus dénombrable donc Lebesgue-négligeable de I, peuvent conditionner de façon essentielle l'évolution de la fonction. Par exemple, une fonction en escalier possède presque partout une dérivée égale à zéro sans devoir être constante.

A la place de la dérivée $u' = du/dt$, le rôle essentiel est maintenant joué par une *mesure* sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, appelée la mesure de Stieltjes ou *mesure différentielle* [33] de u, que nous noterons du. Dans le cas régulier où u est localement absolument continue, on a $du = u'\,dt$ en notant dt la mesure de Lebesgue (cette dernière n'est autre que la mesure différentielle de la fonction réelle $t \mapsto t$).

Classiquement, une fonction u dans $\mathrm{lbv}(I, \mathbb{R}^n)$ possède une limite à droite et à gauche de tout point t de I (avec la convention $u^-(t_0) = u(t_0)$ et symétriquement à l'autre extrémité éventuelle

de I). Pour tout sous-intervalle compact $[\sigma, \tau]$ of I on a

$$\int_{[\sigma,\tau]} du = u^+(\tau) - u^-(\sigma).$$

En particulier, l'intégrale de du sur le singleton $\{\sigma\}$ égale le *saut* éventuel de u au point σ. Si ce saut n'est pas nul, on dit que la mesure du présente en ce point un *atome*, dont le *poids* est le saut en question $u^+(\sigma) - u^-(\sigma)$.

6.4 Equations de la Dynamique Non Régulière

On recherche le mouvement du système sur l'intervalle de temps I, d'origine t_0. L'inconnue principale étant la fonction vitesse $t \mapsto u \in \mathbb{R}^n$, nous nous limitons pour abréger au cas où la fonction position $t \mapsto q$ s'en déduit par l'intégration (3). Même si cette fonction q est reliée à u de façon moins directe, l'argumentation esquissée au parag. 6.1 à propos des collisions permet de généraliser l'équation (14) sous la forme d'une *égalité de mesures* à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

$$A(t,q)\, du = F(t,q,u)\, dt + \sum_\alpha ds^\alpha. \tag{35}$$

Ici, du désigne la mesure différentielle de u, égale à $u'_t\, dt$ sur tout sous-intervalle de I où u est absolument continue, mais qui peut aussi comporter des *atomes*, aux instants de discontinuité éventuelle de u. Le premier membre a un sens parce que la fonction matricielle $t \mapsto A(t, q(t))$ est continue.
Les ds^α sont les composantes généralisées des mesures *impulsions* $d\mathcal{S}^\alpha$ aux divers points de contact (pour l'homogénéité des notations, ces mesures sont notées avec des d sans pour autant qu'on s'intéresse à des fonctions dont elles seraient les mesures différentielles). Sur un sous-intervalle où le mouvement est régulier, on a $d\mathcal{S}^\alpha = \mathcal{R}^\alpha dt$ et $ds^\alpha = r^\alpha dt$, ce qui permet d'invoquer (13) pour chaque t. En revanche, sur la durée "infiniment courte" d'une collision, $G^*_\alpha(t,q)$ est traité comme constant : par intégration sur cette durée, il vient donc une relation de même forme entre les poids respectifs des atomes de $d\mathcal{S}^\alpha$ et ds^α (ces poids sont les *percussions*, notées $\mathcal{P}^\alpha$ et p^α au parag. 6.1). Au total, sur l'intervalle I entier on a la relation suivante entre mesures, qu'elles aient ou non une densité par rapport à dt,

$$ds^\alpha = G^*_\alpha\, d\mathcal{S}^\alpha, \tag{36}$$

écriture légitime puisque $t \mapsto G^*_\alpha(t, q(t))$ est continue.

C'est un point de Théorie de l'Intégration que, étant donnée une collection finie de mesures sur I, qu'elles soient à valeur dans $\mathbb{R}$ comme dt, dans $\mathbb{R}^n$ comme du et ds^α ou dans $\mathbb{E}^3$ comme $d\mathcal{S}^\alpha$, il existe (de manière non unique) une mesure non négative $d\mu$ relativement à laquelle toutes possèdent des *fonctions densités* ; on lui donne la dignité de *mesure base*.

L'égalité de mesures (35) est ainsi équivalente à une égalité de fonctions, vérifiée $d\mu$-presque partout

$$A(t,q)\, u'_\mu = F(t,q,u)\, t'_\mu + \sum_\alpha (s^\alpha)'_\mu. \tag{37}$$

Parce que la loi de Coulomb, de même que (36), sont des relations *coniques*, il est équivalent de les énoncer entre des mesures ou entre leurs fonctions densités. Incidemment, μ peut être arbitrairement multipliée par une fonction positive (localement μ-intégrable), au prix d'une division des densités par cette même fonction [33].

Dans ce qu'on a appelé précédemment la Dynamique Régulière, la fonction u est absolument continue et on peut prendre la mesure de Lebesgue dt comme mesure base. La continuité de u

fait que les vitesses pondérées sont dans ce cas égales aux vitesses ordinaires. On vient de voir l'usage des vitesses pondérées dans le traitement de collisions. Dans [32] se trouve l'application de la même technique mathématique à la modélisation des *paroxysmes frictionnels*, auxquelles on continue de faire référence sous le titre impropre de "Paradoxe de Painlevé". L'algorithme décrit dans la Section 7 permet de calculer de tels mouvements non réguliers, au même titre que des collisions.

7 Implémentation

7.1 Discrétisation

Si on évite les instants où la matrice A deviendrait singulière, la fonction matricielle $t \mapsto A^{-1}(t, q(t))$ est continue. En multipliant par cette fonction les deux membres de (35), et en renommant l'indice de sommation, on obtient

$$du = A^{-1} F\, dt + A^{-1} \sum_{\beta} ds^{\beta}. \tag{38}$$

Comme au parag. 4.3, soit $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$, de longueur h, un pas de temps ; on pose $t_{\mathrm{m}} := t_{\mathrm{i}} + \frac{1}{2}h$ et $q_{\mathrm{m}} := q_{\mathrm{i}} + \frac{1}{2}hu_{\mathrm{i}}$. Vu leur continuité, les matrices A^{-1}, G_{β}, G^{*}_{β} seront traitées sur tout l'intervalle comme conservant les valeurs qu'elles ont au point $(t_{\mathrm{m}}, q_{\mathrm{m}})$, tandis qu'on adoptera pour F la valeur constante $F(t_{\mathrm{m}}, q_{\mathrm{m}}, u_{\mathrm{i}})$. Moyennant quoi, en intégrant les deux membres de (38) sur l'intervalle , il vient

$$u_{\mathrm{f}} = u_{\mathrm{i}} + A^{-1} F\, h + \sum_{\beta} A^{-1} G^{*}_{\beta}\, \mathcal{P}^{\beta}, \tag{39}$$

où $\mathcal{P}^{\beta}$, intégrale de $\mathcal{R}^{\beta}$, constitue l'*impulsion de contact* au point M_{β} sur l'intervalle concerné. Une telle discrétisation résumant un bilan d'impulsions sur l'intervalle $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$, ne postule pas l'existence des accélérations : elle vaut aussi bien si l'intervalle comporte des collisions, les percussions correspondantes étant intégrées dans les $\mathcal{P}^{\beta}$. Le cas d'une collision survenant exactement à l'une des extrémités de l'intervalle n'est pas exclu : à cet égard, on peut dire que les valeurs indexées 'i' simulent des limites à gauche et les valeurs indexées 'f' des limites à droite.

L'indice de sommation n'a besoin de parcourir que l'ensemble des étiquettes des contacts identifiés comme actifs. De même qu'en 4.3, on adopte $J_{\mathrm{m}} := J(t_{\mathrm{m}}, q_{\mathrm{m}})$ comme estimation de cet ensemble pour toute la durée du pas. Pour chaque $\alpha \in J_{\mathrm{m}}$, on doit disposer d'une loi de contact liant $\mathcal{P}^{\alpha}$ aux variables cinématiques. On va admettre que la vitesse relative des corps en contact au point M_{α} intervient sous la forme d'une moyenne pondérée comme en (33 et (34), à ceci près que les rôles tenus alors par les limites à gauche et à droite d'un instant de collision t_c sont joués maintenant par les valeurs de $\mathcal{U}_{\alpha}$ en t_{i} et t_{f}. Si aucune collision n'a lieu dans l'intervalle $[t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$, cette manière de prendre en compte l'inconnue u_{f} à travers une pondération fait ressembler le présent schéma de discrétisation à une "θ-méthode". En particulier, pour des valeurs nulles de tous les coefficients de restitution, on se trouve en présence d'un schéma purement implicite.
Si on se limite à des lois telles que la loi de Coulomb, laquelle est conique *séparément* par rapport aux composantes normale et tangentielle de la vitese relative locale, et si on note $G_{\alpha N}$ et $G_{\alpha T}$ la composante normale et la composante tangentielle de G_{α}, on peut chasser les dénominateurs, d'où

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in J_{\mathrm{m}} : \quad & \mathrm{loi}_{\alpha}(\rho_{\alpha}\, G_{\alpha N}\, u_{\mathrm{i}} + G_{\alpha N}\, u_{\mathrm{f}} + (1+\rho_{\alpha})\mathcal{W}_{\alpha N}, \\ & \qquad \tau_{\alpha}\, G_{\alpha T}\, u_{\mathrm{i}} + G_{\alpha T}\, u_{\mathrm{f}} + (1+\tau_{\alpha})\mathcal{W}_{\alpha T},\ \mathcal{P}^{\alpha}) = \mathrm{vrai} \end{aligned} \tag{40}$$

Le problème va être de résoudre le système (39)(40) par rapport à l'inconnue u_{f}, après quoi le pas se terminera par $q_{\mathrm{f}} = q_{\mathrm{m}} + \frac{1}{2}hu_{\mathrm{f}}$.

Remarque 1. – Traiter F comme constant sur l'intervalle $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$ suppose que les forces "élastiques" éventuelles n'ont qu'une dépendance douce à l'égard de la position q.

Remarque 2. – L'occurrence de collisions est révélée par un ensemble J_m incluant les adresses de certains contacts qui n'étaient pas effectifs au pas précédent. Comme on l'a souligné antérieurement, les impulsions aux autres points de contact présents doivent s'en trouver affectées. L'algorithme prend cela en compte, mais souffre toutefois d'un manque de "pouvoir séparateur": s'il y a plus d'un nouveau contact, toutes les collisions correspondantes sont traitées ensemble. Par exemple, une accumulation de chocs, comme lorsqu'une balle de ping-pong atterrit, est traitée comme une seule collision si, physiquement, ces chocs ont tous lieu dans l'intervalle $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$.

7.2 Procédé itératif

La méthode la plus employée pour la résolution numérique du problème non régulier (39)(40) consiste en itérations inspirées de ce qu'on fait lorsqu'on aborde des systèmes d'équations linéaires par la technique de Gauss-Seidel.
Supposons qu'une approximation $(u_\mathrm{f}^\mathrm{esti}, \mathcal{P}_\mathrm{esti}^\beta)$, β prenant toutes les valeurs dans J_m, ait été obtenue, et qu'elle satisfasse exactement (39). On va en déduire une autre approximation $(u_\mathrm{f}^\mathrm{corr}, \mathcal{P}_\mathrm{corr}^\beta)$ en altérant seulement $\mathcal{P}^\alpha$, autrement dit $\mathcal{P}_\mathrm{corr}^\beta = \mathcal{P}_\mathrm{esti}^\beta$ si $\beta \neq \alpha$. On demande à cette nouvelle approximation de vérifier elle aussi (39), c'est-à-dire par différence

$$u_\mathrm{f}^\mathrm{corr} = u_\mathrm{f}^\mathrm{esti} + A^{-1} G_\alpha^* (\mathcal{P}_\mathrm{corr}^\alpha - \mathcal{P}_\mathrm{esti}^\alpha) \tag{41}$$

et de vérifier la loi du contact d'étiquette α telle qu'elle est écrite en (40). On élimine de cette dernière l'inconnue $u_\mathrm{f}^\mathrm{corr}$ en appliquant G_α aux deux membres de (41), d'où en séparant les composantes normale et tangentielle $G_{\alpha N}$, $G_{\alpha T}$

$$\begin{aligned} &\mathrm{loi}_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha N}^\mathrm{const} + G_{\alpha N}\, u_\mathrm{f}^\mathrm{esti} + H_{\alpha N}(\mathcal{P}_\mathrm{corr}^\alpha - \mathcal{P}_\mathrm{esti}^\alpha)\,, \\ &\qquad \mathcal{U}_{\alpha T}^\mathrm{const} + G_{\alpha T}\, u_\mathrm{f}^\mathrm{esti} + H_{\alpha T}(\mathcal{P}_\mathrm{corr}^\alpha - \mathcal{P}_\mathrm{esti}^\alpha)\,, \mathcal{P}_\mathrm{corr}^\alpha) = \mathrm{vrai}. \end{aligned} \tag{42}$$

Les matrices $H_{\alpha N}$ et $H_{\alpha T}$ expriment les composantes normale et tangentielle de $H_\alpha = G_\alpha A^{-1} G_\alpha^*$, application linéaire symétrique positive de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même que nous proposons d'appeler l'*opérateur de Delassus*. En quelque sorte, cet opérateur décrit l'inertie du système "condensée au point de contact M_α". Dans le cas usuel où $G_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ est surjective (i.e. $G_\alpha^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ injective), l'opérateur H_α est défini positif.
Apparaissent aussi les composantes d'un élément $\mathcal{U}_\alpha^\mathrm{const}$, ainsi noté parce que, pour chaque α, il demeure constant au cours des itérations :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\alpha N}^\mathrm{const} &= \rho_\alpha\, G_{\alpha N}\, u_\mathrm{i} + (1+\rho_\alpha)\mathcal{W}_{\alpha N} \\ \mathcal{U}_{\alpha T}^\mathrm{const} &= \tau_\alpha\, G_{\alpha T}\, u_\mathrm{i} + (1+\tau_\alpha)\mathcal{W}_{\alpha T} \end{aligned}$$

La résolution de (42) équivaut au traitement d'un système qui présenterait un seul contact. On l'effectue de manière répétée avec α parcourant cycliquement J_m. La décision d'arrêter les itérations peut être prise d'après l'examen des quantités scalaires $H_{\alpha N}(\mathcal{P}_\mathrm{corr}^\alpha - \mathcal{P}_\mathrm{esti}^\alpha)$. Le maximum de leurs valeurs absolues sur un cycle par lequel α parcourt J_m est une mesure significative de la précision avec laquelle les lois de contact sont satisfaites.
La démonstration mathématique de la convergence d'algorithmes de Gauss-Seidel non linéaires n'a été faite que dans des cas particuliers [22]. La mesure de précision ci-dessus permet donc seule de juger de la qualité de l'approche. Sous reserve d'un tel contrôle, on peut se permettre bien des variantes. Par exemple, l'opérateur H_α dans (42) pourrait être remplacé par n'importe quelle application ayant zéro comme limite à l'origine de $\mathbb{R}^3$. En particulier, l'usage à cet endroit d'un coefficient multiplicateur ajusté empiriquement fournit des moyens efficaces d'accélérer la

convergence. Pourvu que la convergence soit controlée, on peut même remplacer H_α par un scalaire convenablement ajusté, ce qui simplifie fortement les calculs.

En l'absence d'information, le démarrage des itérations s'effectue avec des $\mathcal{P}^\beta_{\text{esti}}$ nuls, les $u^{\text{esti}}_{\text{f}}$ correspondants étant déterminés par (39). Mais dans des situations où les contacts persistants prédominent sur les collisions (en particulier dans l'analyse des équilibres éventuels), on améliore considérablement l'efficacité du calcul en adoptant pour les $\mathcal{P}^\beta_{\text{esti}}$ les valeurs trouvées au pas précédent en chacun des contacts déja présents.
Au cours des ajustements successifs décrits ci-dessus, le respect de l'équation de la dynamique (39) est assuré par la condition de préservation (41). Les calculs de Mécanique des Granulats exigent souvent des millions d'ajustements, de sorte qu'on pourrait craindre une accumulation d'erreurs. Il suffit pour s'en prémunir de revenir à (39) pour une correction de $u^{\text{esti}}_{\text{f}}$, à chaque million d'ajustements par exemple.
Le traitement n'implique pas le stockage de grosses matrices. En effet, chacune des applications linéaires $G_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ concerne au plus une paire de solides libres. La partie non nulle de la matrice correspondante est donc au plus un rectangle de taille 12×3 (et seulement 6×2 dans les modèles bidimensionnels).

8 Indétermination inhérente au frottement sec

8.1 Un exemple élémentaire

La Figure 1 montre, dans un plan vertical, la situation suivante. Deux parois rigides fixes convergent vers le haut ; une barre pesante rectiligne rigide AB est insérée entre ces parois, qu'elle touche avec frottement de Coulomb, et abandonnée à vitesse nulle. Si les angle ont des valeurs convenables, comparées à l'angle de frottement, le problème de l'évolution ultérieure de la barre possède deux solutions évidentes : soit la perte de contact suivie d'une chute libre, soit l'immobilité. Le quadrilatère représenté en hachures légères est l'intersection des deux cônes de

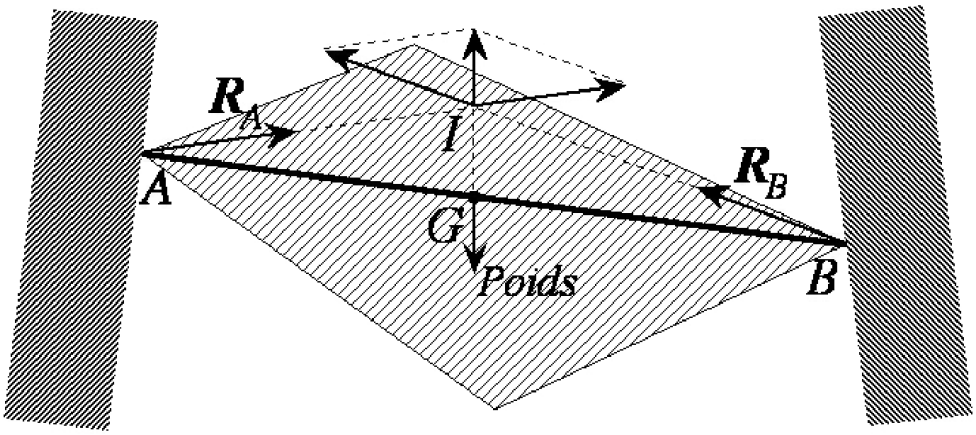

Figure 1: Barre insérée entre deux parois convergentes.

Coulomb, transportés respectivement aux deux points de contact. Toute position du point I dans le triangle au dessus de AB correspond à des valeurs des réactions $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$ compatibles avec le frottement et équilibrant le poids de la barre. En présence de frottement sec, il faut être prêt à rencontrer de telles incertitudes.

Pronostiquer le maintien ou la perte du contact exige qu'on *paie le prix d'une information complémentaire*, à formaliser dans un modèle plus riche que le précédent. Par modèle, nous entendons un *format* (au sens de l'informatique) sous lequel on choisit de définir, de recueillir et

de traiter une information concernant l'Univers. Cette information est nécessairement partielle (elle n'en concerne d'ailleurs qu'une toute petite partie, baptisée "le système") et les pronostics qu'on énoncera finalement dans le format en question le sont aussi. Un modèle n'a pas de raison d'être *déterministe* (et la question de savoir si l'Univers lui-même l'est n'a pour nous pas de sens). La pluralité de solutions à laquelle nous devons faire face ici n'est donc pas proprement un défaut de la loi de Coulomb; elle signifie seulement que le modèle employé, lequel véhicule simplement l'information directement accessible, ne permet pas de formuler une prédiction plus précise. L'occurence d'élasticité n'élude pas ces difficultés (pour le cas quasi-statique, voir [3][6]).

L'information manquante peut s'intituler *degré de coincement* de la barre entre les deux parois, lequel degré résulte du processus d'insertion et des évolutions ultérieures éventuelles. Un résumé de cette histoire, suffisant pour la prédiction demandée, consisterait dans *les valeurs des forces de contact* en A et B. La mesure de ces forces demanderait que l'expérience soit appareillée dans ce but. Ce n'est pas le cas en pratique et il faut donc se résoudre à l'incertitude.

Les mécaniciens du 19ème siècle, fascinés par la théorie alors jeune des équations différentielles, ont cristallisé l'idée que, en Dynamique, l'information significative à l'instant initial consistait simplement en la position du système étudié, jointe aux vitesses de ses éléments. Tel est bien le cas pour de nombreux modèles usuels de systèmes mécaniques, mais il serait maladroit d'ériger cette constatation au rang de principe.

8.2 Prise en compte de l'histoire

L'observation précédente peut susciter des objections graves quant à l'applicabilité du calcul aux milieux granulaires. Pourtant, l'interaction entre expérimentation physique, calcul numérique et élaboration théorique a démontré au fil du temps une cohérence telle qu'aucune inquiétude quant à la multiplicité des solutions du calcul n'est perceptible dans la littérature.

Si l'approche se révèle finalement valide et fructueuse, c'est selon nous parce que calculateurs comme manipulateurs restent toujours conscients de ce que la réponse d'un échantillon granulaire à une sollicitation donnée *dépend fortement de son histoire*, en particulier de son mode de préparation (c'est aussi le cas pour bien d'autres matériaux). L'exploration numérique d'une situation statique, comme celle qui sera présentée dans la Section 9, exige donc que la préparation même du granulat étudié soit simulée.

L'exemple du paragraphe précédent suggère que, pour les systèmes à frottement sec qui nous occupent, la modélisation la plus efficace accueille dans la description de chaque état instantané *les valeurs des forces de contact*. Les méthodes numériques, à pas simples, utilisées pour calculer les évolutions doivent donc disposer en début de chaque pas de ce résumé de l'histoire.
C'est bien le cas si une méthode *Molecular Dynamics* est employée, puisque les valeurs des réactions sont directement reliées à des micro-déplacements qui doivent être connus au début de chaque pas.
Pour ce qui est de *Contact Dynamics*, on a préconisé d'utiliser à chaque pas le procédé itératif intitulé *Gauss-Seidel non linéaire*. Les itérations doivent être *initialisées* par un choix de valeurs des réactions des divers contacts. En l'absence d'information, on est tenté de choisir des valeurs nulles. Il a été dit que, dans le calcul d'évolutions de granulats denses, on accélère considérablement la convergence à chaque pas en choisissant comme initialisation du processus de Gauss-Seidel *les valeurs obtenues au pas précédent* pour ceux des contacts qui étaient déja présents. Cette pratique apparaît ici avoir une importance beaucoup plus grande que la simple réduction du temps de calcul : grâce à elle, l'information souhaitée sur l'histoire est introduite.

Une autre source d'intérêt de la procédure Gauss-Seidel est présentée dans [38]: à un instant où, dans l'ignorance de l'histoire, on aurait une pluralité de solutions, elle permet de mesurer

l'étendue de cette incertitude en explorant l'ensemble des valeurs possibles des forces de contact. En effet, après avoir délimité un domaine de valeurs plausibles pour ces forces, il suffira de répéter un grand nombre de fois la procédure avec des initialisations tirées au sort dans ce domaine. Toute solution a sa chance d'être atteinte et, pour tel ou tel contact choisi, on peut visualiser l'ensemble des valeurs possible de la force de contact sous la forme d'un nuage de points.

Un procédé moins lourd pour explorer des ensembles de solutions est de fixer une initialisation mais de varier la procédure de Gauss-Seidel, le plus simple pour cela étant de modifier d'une fois à l'autre *l'ordre du balayage cyclique des contacts*. Si κ est le nombre de ces contacts, on obtiendra au plus $(\kappa - 1)!$ solutions différentes, mais un exemple présenté dans [38] montre qu'elles peuvent baliser convenablement l'ensemble infini des solutions.

9 Transmission des contraintes dans un tas conique

9.1 Distribution des pressions au sol

La transmission des efforts dans un tas de "sable", construit sur un sol horizontal en amenant des grains par un ajutage d'axe Oz est un sujet actuel et controversé. A chaque instant de la construction la forme du tas est, en première approximation, un cône d'axe Oz. Un certain émoi s'est manifesté dans la littérature devant le phénomène suivant : les pressions exercées par le tas aux divers points du sol ne sont pas en relation directe avec les hauteurs de granulat à l'aplomb. On va jusqu'à observer un minimum local de la pression dans la région centrale.

Ce phénomène ne nous paraît pas en lui-même surprenant : bien qu'un granulat soit susceptible de couler, la statique d'un tel milieu n'est pas l'hydrostatique. La preuve en est que la surface libre du tas en équilibre n'est pas horizontale. Par ailleurs, s'il est constaté qu'une portion centrale du tas exerce sur le sol une force inférieure à son poids, c'est nécessairement qu'une partie de ce poids est supportée par un arc-boutement du talus périphérique. L'étude numérique qui va suivre montre que cet effet d'arc-boutement et l'inclinaison de la surface libre sont liés de manière essentielle.

A l'échelle macroscopique, où l'on traite le milieu granulaire comme un continu, il est universellement admis que le vecteur de traction (en Génie Civil ou en Géomécanique, on considère plutôt le vecteur de pression) sur une surface de coupe idéale issue d'un point du milieu dépend de la direction de cette coupe de la même manière que dans un milieu continu classique, c'est-à-dire qu'elle peut se calculer à partir d'un *tenseur contrainte de Cauchy*, malgré une hétérogénéité bien connue à l'échelle d'une dizaine de grains (les *chaînes de forces*). Il a été constaté numériquement [36] qu'une moyenne faite sur une plage d'épreuve dont la dimension n'est qu'un petit nombre de fois supérieur à l'espacement type des chaînes de forces fournit une estimation de ce tenseur, acceptable pour calculer la force transmise sur des coupes de ce même ordre de grandeur.

Soient (en dimension 2 ou 3) deux directions de coupe définies par leurs vecteurs unité normaux $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}'$; soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ les vecteurs tension (ou pression) associés. La symétrie du tenseur de Cauchy entraine $\mathbf{n}.\mathcal{T}' = \mathbf{n}'.\mathcal{T}$. En particulier, avec les deux membres nuls, il vient :

Lemme des Coupes Réciproques: *La coupe de normale* $\mathbf{n}$ *est parallèle au vecteur* $\mathcal{T}'$ *si et seulement si la coupe de normale* $\mathbf{n}'$ *est parallèle au vecteur* $\mathcal{T}$.

Bien entendu, la distribution du tenseur de Cauchy dans un massif granulaire dépend de manière essentielle de l'histoire, en particulier du *processus de préparation*.

9.2 Une expérience numérique

La Figure 2 montre une vue cavalière de l'expérience tridimensionnelle suivante. On construit un tas comportant, en fin de calcul, environ 14000 grains sphériques en déposant les grains un par un à vitesse nulle. La verticale du centre d'un grain au moment de son dépôt (informatiquement, sa création) est choisie aléatoirement au voisinage de l'axe Oz dans un rayon de 0,8 cm. Les diamètres sont distribués aléatoirement de façon uniforme entre 0,25 et 0,50 cm. Fréquence de dépôt : 200 grains par seconde de temps simulé.

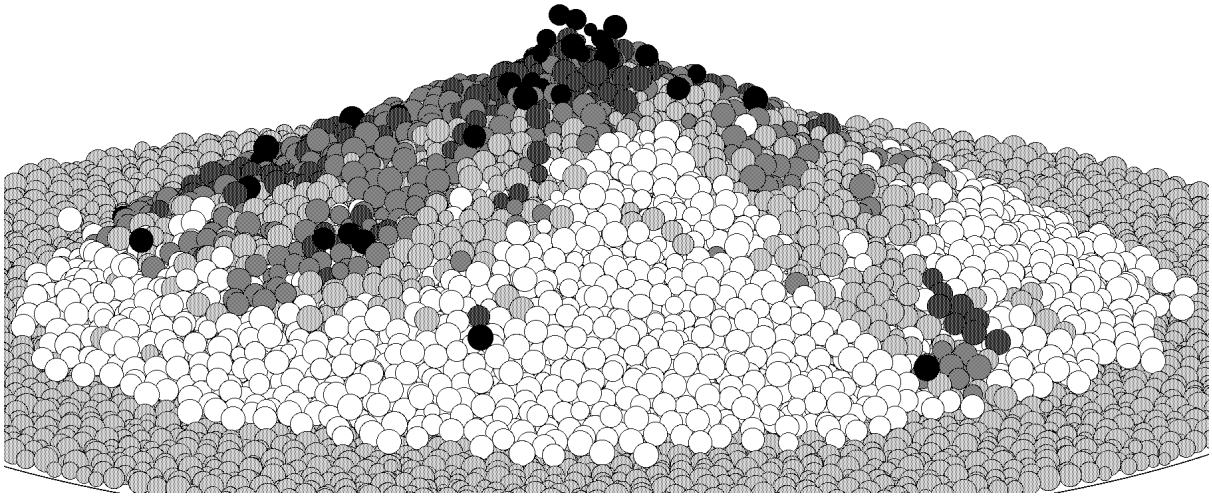

Figure 2: Tas en construction.

La rugosité du sol est simulée par un pavage aléatoire de grains fixes ayant cette même distribution de tailles. Coefficient de frottement : 0,4 partout ; restitution des collisions : 0 ; pesanteur : 981 cm/s^2.
Une partie des grains s'écoulent sur les flancs du tas en déclenchant des avalanches visualisées sur la Figure 2 par des niveaux de gris correspondant pour chaque grain à la grandeur de sa vitesse. La plus grande vitesse égale 23,6 cm/s, en noir ; pour la meilleure lisibilité, les 4 seuils associés aux niveaux de gris jusqu'au blanc sont choisis en mulipliant cette valeur par des puissances de 0,18.
Le phénomène simulé dure environ 72 s. Pour un calcul suffisamment précis de la dynamique des avalanches, le pas de temps est choisi à 2×10^{-4} s, ce qui fait 360000 pas. Le temps de calcul pour chaque pas dépend du nombre de grains présents, lequel conditionne en premier lieu la taille des blocs de mémoire à parcourir au cours des itérations de Gauss-Seidel. En outre le nombre d'itérations nécessaires augmente rapidement avec le nombre de points de contacts, entre grains ou avec le sol rugueux. L'algorithme itératif employé demeure accessible à un micro-ordinateur parce que la plus grande partie du tas est en quasi-équilibre : les itérations sont lancées à partir des valeurs des réactions calculées au pas précédent pour les contacts qui existaient déjà.

La Figure 3 montre, à quatre époques de la construction, une tranche d'épaisseur 2 cm, contenant Oz. Les grains qui ont été déposés entre les instants $t = 15,5$ et $t = 18,7$ et qui, à l'instant actuel, ont leurs centres dans cette tranche sont représentés en noir. On observe qu'une proportion importante d'entre eux ne s'écoulent pas sur les flancs du tas mais s'amoncellent sur place. Le paquet ainsi constitué s'enfonce en provoquant dans le granulat une déformation plastique dont on se fait une idée par la distribution des grains noirs aux époques ultérieures. Appelons *couches fossiles* ces collections de grains, observés à une certaine époque et ayant leurs dates de naissance dans un intervalle de temps antérieur donné.

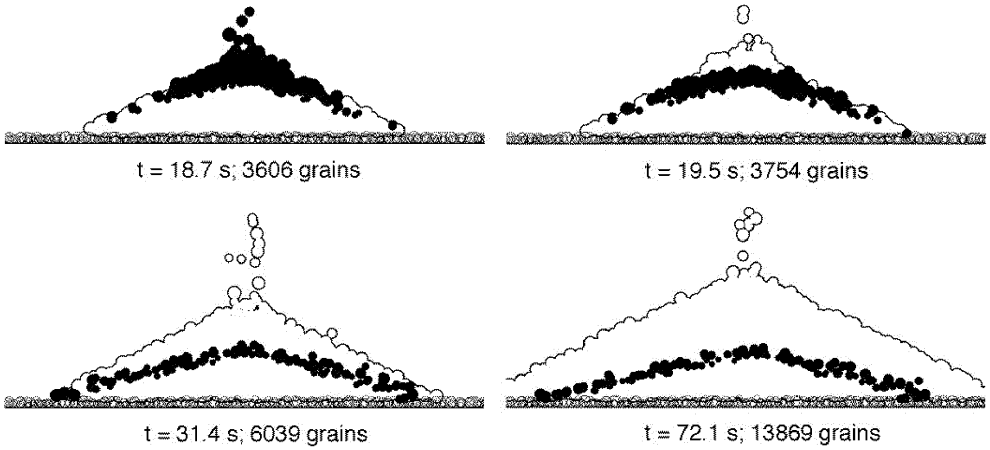

Figure 3: Coupes à quatre étapes de la construction.

La surface libre est inclinée d'environ 26° sur l'horizontale, sans différence perceptible si on laisse le tas se relaxer après arrêt des dépôts ; seul le sommet s'arrondit.

9.3 Analyse de la transmission des forces

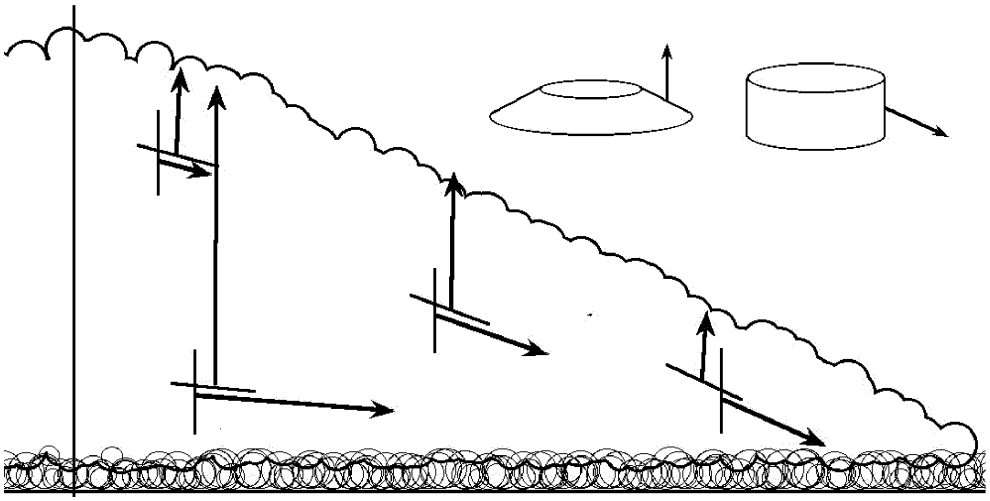

Figure 4: Coupes réciproques.

Dans un plan passant par Oz, le programme permet de choisir un segment. Le ruban tronc-conique ou cylindrique, engendrée par la rotation de ce segment autour de Oz est invoquée comme surface séparatrice : sont retenus pour analyse les contacts entre deux grains ayant leurs centres de part et d'autre de cette séparatrice, pourvu que le point de contact se projette sur le cône ou le cylindre en un point appartenant au ruban. Le demi-plan méridien contenant le point de contact est invoqué dans une décomposition de la force de contact en une composante R_z selon Oz et une composante axifuge R_r ; la composante perpendiculaire au plan méridien, en principe de moyenne nulle, ne nous occupe pas ici. La somme des R_z et la somme des R_r pour tous les contacts retenus sont divisées par l'aire du ruban. Cela donne les composantes d'un vecteur méridien, *densité méridienne de force transmise à travers la bande.* Dans un milieu continu, possédant en chaque point un tenseur contrainte de Cauchy, une telle moyenne méridienne du vecteur traction (ou du vecteur pression, selon les conventions de signe employées) serait reliée au

vecteur normal **n** de la bande par l'intermédiaire d'un tenseur de contrainte méridienne moyenne et la *réciprocité des coupes* formulée dans ce qui précède serait mathématiquement assurée.

La Figure 4 montre une exploration du tas relaxé après l'arrêt des dépôts. Le but est de vérifier que les aléas de l'échantillonnage n'altèrent pas trop cette réciprocité.

La constatation faite, on se borne à observer les vecteurs densités de force sur des coupes cylindriques d'axe Oz. La Figure 5 montre la même tranche d'épaisseur 2 cm que précédemment (prélevée cette fois dans le tas non relaxé, ce qui ne fait pas ressortir de différence significative). On y a dessiné les contours de grains formant deux couches fossiles d'ages différents. L'observation de cette figure suggère une loi, forcément approximative et qui demanderait à être précisée par une analyse statistique :

En chaque point du tas, le vecteur densité de force correspondant à une coupe cylindrique d'axe Oz a la même direction que la section méridienne d'une couche fossile avoisinant ce point.

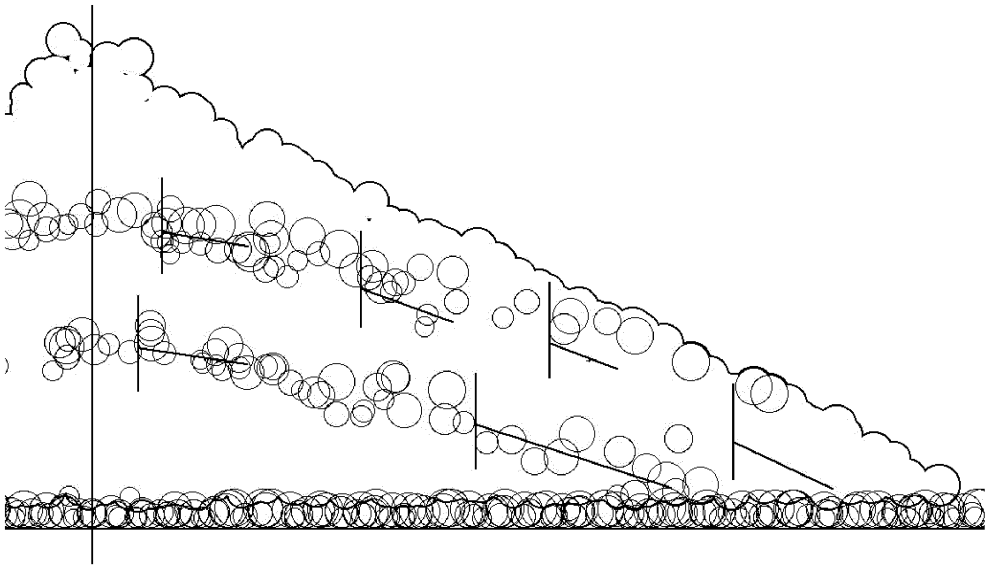

Figure 5: Couches fossiles.

L'intérêt de cet énoncé est de caractériser la direction de l'arc-boutement, même dans la région centrale du tas, laquelle n'a pas été construite par des avalanches. Dans le talus périphérique, les couches fossiles sont presque parallèles à la surface libre. Par le Lemme de Réciprocité, il est équivalent d'affirmer que, dans le talus, la densité de force sur une coupe tronc-conique parallèle à la surface libre est sensiblement verticale. Cette dernière propriété paraît naturelle vu que, dans la région concernée, le tas est fait de couches déposées par les avalanches. Lorsqu'une telle couche s'est arrêtée, la force qu'elle subit de la part du substrat doit équilibrer son poids et on s'attend à ce que cette verticalité subsiste lorsque d'autres couches possédant la même propriété sont venues la charger par dessus.

Enfin, la Figure 6 montre la distribution des pressions sur le sol. La région d'appui est découpée en couronnes concentriques d'axe Oz, de largeur uniforme. Pour l'ensemble des points de contact entre les grains du tas et le pavement qui se projettent dans une de ces couronnes, la somme des composantes verticales des forces de contact est divisée par l'aire de la couronne.
Les couronnes de petit rayon, en particulier la première qui se réduit à un disque, sont plus sujettes aux erreurs d'échantillonnage que les couronnes périphériques plus peuplées. Le graphe (abscisse : la distance à l'axe en cm ; ordonnée : la pression en déciPascal) montre néanmoins un minimum local. La pression au centre est nettement inférieure à ce que serait la pression

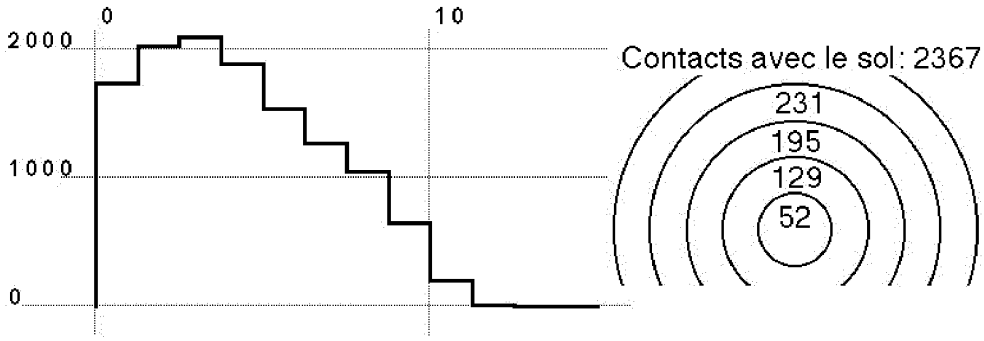

Figure 6: Pression sur le sol.

hydrostatique d'une colonne liquide de même hauteur ayant la masse volumique moyenne du granulat (à savoir 3320 dPa, pression correspondant à une masse volumique de 0,615 et une hauteur de 5.5 cm).

Références

[1] P. Alart & A. Curnier, *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like methods*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 92, 1991, 353–375.

[2] P. Alart & M. Renouf, *Un nouvel algorithme de quasi-optimisation pour la résolution des problèmes multicontacts et application aux milieux granulaires*, 16ème Congrès Français de Mécanique, Nice, 2003.

[3] L.-E. Anderson & A. Klarbring, *Existence and uniqueness for quasistatic contact problems with friction*, in: (M.D.P. Marques & J.A.C. Martins, eds.) *Contact Mechanics* (Proc. 3rd. Contact Mechanics Int. Symp., Peniche, Portugal, June 17-21, 2001), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 245-260.

[4] J. P. Aubin, *Viability theory*, Birkhäuser-Verlag, Basel/Boston, 1990.

[5] J. P. Aubin & A. Cellina, *Differential inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] P. Ballard, *A counter-example to uniqueness in quasi-static elastic contact problems with small friction*, Int. J. Engng. Sci., 37, 1999, 163–178.

[7] P. Ballard, *The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints*, Arch. Ration. Mech. Anal. 154, 2000, no. 3, 199–274.

[8] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[9] B. Brogliato, *Nonsmooth mechanics. Models, dynamics and control*, 2d. ed., Springer-Verlag, 1999.

[10] P. Chabrand, F. Dubois & M. Raous, *Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction*, Math. Comput. Modelling, 28, 1998, 97–108.

[11] P. W. Christensen, A. Klarbring, J. S. Pang & N. Strömberg, *Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems*, Int. J. Num. Meth. Engng., 42, 1998, 145–173.

[12] A. Curnier, *A theory of friction*, Int. J. Solids Struct., 20, 1984, 637–647.

[13] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter, Berlin, 1992.

[14] G. de Saxcé & Z. Q. Feng, *New inequation and functional for contact with friction*, J. Mech. Struct. Machines,19, 1991, 301–325.

[15] S. Foerster, M. Louge, H. Chang & K. Allia, *Measurements of the collision properties of small spheres*, Phys. Fluids, 6, 1994, 1108-1115.

[16] J. Fortin & G. de Saxcé, *Modélisation numérique des milieux granulaires par l'approche du bipotentiel*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. IIb, 327, 1999, 721–724.

[17] Ch. Glocker, *Set-valued force laws*, Springer, 2001.

[18] E. J. Haug, *Computer aided kinematics and dynamics*, Allyn and Bacon, Boston, 1989.

[19] M. Jean, *Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterials*, in: (A. P. S. Selvadurai & M. J. Boulon, eds.) *Mechanics of Geomaterial Interfaces*, Elsevier, Amsterdam, 1995, 453–486.

[20] M. Jean, *The Non Smooth Contact Dynamics method*, in: (J. A. C. Martins & A. Klarbring, eds.) *Computational Modeling of Contact and Friction*, special issue of Computer Meth. in Appl. Mech. and Engng., 177, 1999, 235–257.

[21] Jean, M. Simulation numérique discrète de matériaux granulaires, in: (B. Cambou & M. Jean, eds.) *Micromécanique des matériaux granulaires*, Hermes, Paris, 2002.

[22] F. Jourdan, P. Alart & M. Jean, *A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems*, Computer Meth. Appl. Mech. Engng., 155, 1998, 31–47

[23] M. Kunze & M. D. P. Monteiro Marques, *An introduction to Moreau's sweeping process*, in: (B. Brogliato, ed.) *Impacts in Mechanical Systems. Analysis and Modelling*, Springer, Berlin Heidelberg, 2000, 1–60.

[24] J. J. Moreau, *Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 256, 1963, 871–874.

[25] J. J. Moreau, *Quadratic programming in mechanics: dynamics of one-sided constraints*, SIAM J. Control, 4, 1966, 153–158.

[26] J. J. Moreau, *Problème d'évolution associé à un convexe mobile d'un espace hilbertien*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 276, 1973, 791–794.

[27] J. J. Moreau, *On unilateral constraints, friction and plasticity*, in: (G. Capriz & G. Stampacchia, eds.) *New variational techniques in mathematical physics*, C.I.M.E. II ciclo 1973. Edizioni Cremonese, Roma, 1974, 173–322.

[28] J. J. Moreau, *Application of convex analysis to the treatment of elastoplastic systems*, in: (P. Germain & B. Nayroles, eds.) *Applications of functional analysis to problems of mechanics*, Lecture Notes in Mathematics, 503, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976, 56–89.

[29] J. J. Moreau, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Diff. Equ., 26, 1977, 347–374.

[30] J. J. Moreau, *Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints*, in: (G. Del Piero & F. Maceri, eds.) *Unilateral Problems in Structural Analysis*, CISM Courses and Lectures, Vol. 288, Springer-Verlag, Wien New York, 1985, 173–221.

[31] J. J. Moreau, *Une formulation du contact à frottement sec; application au calcul numérique*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér.II, 302, 1986, 799–801.

[32] J. J. Moreau, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, in: (J. J. Moreau & P. D. Panagiotopoulos, eds.) *Nonsmooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures, Vol. 302, Springer-Verlag, Wien New York, 1988, 1–82.

[33] J. J. Moreau J. J., *Bounded variation in time*, in: (J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos & G. Strang, eds.) Topics in Nonsmooth Mechanics. Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 1–74

[34] J. J. Moreau, *Some basics of unilateral dynamics*, in: (F. Pfeiffer & C. Glocker, eds.) *Unilateral Multibody Contacts*, Kluwer, Dordrecht, 1999, pp. 1–14.

[35] J. J. Moreau, *Numerical aspects of the sweeping process*, in: (J. A. C. Martins & A. Klarbring, eds.) *Computational Modeling of Contact and Friction*, special issue of: Computer Meth. Appl. Mech. Engng., 177, 1999, 329–349.

[36] J. J. Moreau, *Numerical dynamics of granular materials*, in (M. D. P. Marques & J. A. C. Martins, eds.) *Contact Mechanics* (Proc. 3rd. Contact Mechanics Int. Symp., Peniche, Portugal, June 17-21, 2001), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002,1–16.

[37] J. J. Moreau, *An introduction to unilateral dynamics*, in: (M. Frémond & F. Maceri, eds.) *Novel approaches in Civil Engineering*, Springer-Verlag, to appear, 2003.

[38] J. J. Moreau, *Indétermination liée au frottement sec dans le calcul des granulats*, Actes du 6ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens (Var), 20 – 23 mai 2003.

[39] F. Pfeiffer & Ch. Glocker, *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, John Wiley and Sons, New York, 1996.

[40] M. Raous, *Experimental analysis of the rocking of a rigid block*, Proceedings of the 3rd. Pan American Congress of Applied Mechanics (PACAM III), Sao Paulo, Brazil, 1993, 61–64.

[41] M. Raous, L. Cangemi & M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177, 1999, 383–399.

[42] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[43] D. Stoianovici & Y. Hurmuzlu, *A critical study of the applicability of rigid body collisions theory*, A.S.M.E. J. Appl. Mech., 63, 1996, 307–316.

[44] W. J. Stronge *Unraveling paradoxical theories for rigid body collisions*, A.S.M.E. J. Appl. Mech., 58, 1991, 1049–1055.

[45] D. Vola, E. Pratt, M. Jean & M. Raous, *Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques.* Rev. Europ. Eléments Finis, 7, 1998, 149–162.

[46] O. R. Walton, *Numerical simulation of inelastic, frictional particle-particle interactions*, in: (M. C. Roco, ed.) *Particulate two-phase flow*, Butterworth-Heinemann, Boston, 1993, 884–910.