



**HAL**  
open science

## Instabilités et bifurcations de membranes

Nicolas Chevaugeon, Gilles Marckmann, Erwan Verron, Bernard Peseux

► **To cite this version:**

Nicolas Chevaugeon, Gilles Marckmann, Erwan Verron, Bernard Peseux. Instabilités et bifurcations de membranes. 2me Congrès National en Calcul des Structures, 2001, Giens, France. hal-01792905

**HAL Id: hal-01792905**

**<https://hal.science/hal-01792905>**

Submitted on 16 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Instabilités et bifurcations de membranes

**Nicolas CHEVAUGEON, Gilles MARCKMANN, Erwan VERRON et Bernard PESEUX**

Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Division Structures - École Centrale de Nantes -  
BP 92101, 44321 Nantes cedex 3  
erwan.verron@ec-nantes.fr

## Résumé

Dans cet article, le comportement post-critique des membranes hyperélastiques soufflées est étudié. Les cas axisymétrique et tridimensionnel sont étudiés. Dans les deux cas le système algébrique obtenu est résolu en couplant l'algorithme de Newton-Raphson à la méthode de longueur d'arc. L'accent est mis sur l'étude des points singuliers et des branches secondaires. Finalement, quelques exemples numériques illustrent les développements effectués.

## 1 Introduction

Les études des membranes hyperélastiques soufflées sont issues d'applications diverses telles que la biomécanique [6] ou la mise en forme des plastiques [11].

Dès les années 60, Green et Adkins développent les équations régissant ces problèmes [4]. Dans le cas axisymétrique, elles conduisent à un système d'équations différentielles avec des conditions limites aux deux extrémités, résolu numériquement par l'algorithme de Runge-Kutta couplé avec la méthode du tir [17]. Les travaux plus récents privilégient des méthodes de type éléments finis [7], méthodes systématiquement employées dans le cas tridimensionnel [16]

Différents auteurs ont mis en évidence la présence de phénomènes d'instabilités et de bifurcations. Expérimentalement, Alexander a isolé une configuration non-sphérique lors du soufflage d'un ballon sphérique en néoprène [1], et Kyriakides et Chang ont étudié l'apparition et la propagation d'une instabilité le long d'un tube en latex [9]. Ces problèmes d'instabilité ont été étudiés analytiquement et numériquement pour des problèmes simples : membranes sphériques [12, 5] et cylindres finis [8]. En revanche, le

comportement post-critique a été assez peu étudié. On peut cependant citer deux études axisymétriques utilisant la méthode des éléments finis : tout d’abord, celle de Duffet et Reddy [3] qui ont rencontré quelques difficultés pour suivre les branches secondaires et plus récemment, celle de Shi et Moita [14] qui ont utilisé une méthode de longueur d’arc et d’injection de mode pour explorer les branches secondaires.

Le présent article s’intéresse au comportement post-bifurcatoire des membranes hyperélastiques soufflées. Dans le paragraphe suivant, les équations d’équilibre ainsi que la loi de comportement adoptée sont rappelées. Ensuite, les méthodes numériques, et les méthodes de discrétisation axisymétrique et tridimensionnelle sont présentées. Puis, l’algorithme de résolution du système algébrique non-linéaire est précisé en mettant l’accent sur la méthode de continuation adoptée. Enfin, l’étude des points singuliers et le calcul les branches secondaires sont détaillées. Finalement, le paragraphe 4 présentent plusieurs résultats numériques, mettant en évidence les instabilités obtenues par les calculs axisymétrique et tridimensionnel.

## 2 Mise en équations

On considère le soufflage quasi-statique d’une membrane hyperélastique, homogène, isotrope, élastique et incompressible. En tout point, l’épaisseur de la membrane est supposée beaucoup plus faible que le rayon de courbure, la géométrie de la membrane est alors décrite par la position de sa surface moyenne. La membrane est soumise à une pression intérieure  $p$ , et les forces de volume et d’inertie sont négligées.

Les configurations non-déformée et déformée sont respectivement notées  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}$ . De façon similaire, les surfaces frontières sont respectivement  $\partial\mathcal{C}_0$  et  $\partial\mathcal{C}$ . Le Principe des Travaux Virtuels s’écrit sous la forme suivante :

$$r(\vec{u}, \delta\vec{u}, p) = \int_{\mathcal{C}_0} \delta W dV - \int_{\partial\mathcal{C}} \delta\vec{u} p \vec{n} dS = 0 \quad \forall \delta\vec{u} \quad (1)$$

Dans cette équation,  $\delta\vec{u}$  est un déplacement virtuel cinématiquement admissible,  $\vec{n}$  est la normale extérieure à la surface moyenne au point considéré et  $W$  est l’énergie de déformation. Le premier terme intégral représente le travail virtuel des efforts intérieurs et le second terme intégral est le travail virtuel du chargement extérieur. Il convient de noter que ce second terme est défini sur la configuration déformée car les efforts de pression dépendent de la géométrie courante.

Dans cet article, nous adoptons le modèle de Mooney-Rivlin, pour lequel l’énergie de déformation est une fonction des deux premiers invariants,  $I_1$  et  $I_2$ , du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit,  $\overline{\overline{C}}$  :

$$W = C [(I_1 - 3) + \alpha(I_2 - 3)] \quad (2)$$

où  $C$  et  $\alpha$  sont les deux constantes matérielles. Le troisième invariant,  $I_3 = \det\overline{\overline{C}}$ , est égal à 1, de par l’hypothèse d’incompressibilité.

## 3 Discrétisation et résolution numérique

### 3.1 Discrétisation

**Cas axisymétrique** Dans le cas axisymétrique, la surface moyenne de la membrane est réduite à une courbe continue, approchée par une spline cubique. On construit alors un élément fini isoparamétrique en interpolant les déplacements des points matériels sur la même base de fonctions B-splines. Pour plus de détails sur cette méthode d'interpolation, le lecteur peut se référer à [10].

**Cas 3D** Dans le cas tridimensionnel, la discrétisation est effectuée à l'aide d'éléments finis Q8.

Dans toute la suite, les deux cas seront traités simultanément, les systèmes discrétisés étant similaires. On note  $\{U\}$  le vecteur des déplacements nodaux. Le Principe des Travaux Virtuels (1) devient :

$$r(\vec{u}, \vec{\delta u}, p) = \{\delta U\}^t \{R(\{U\}, p)\} = 0 \quad \forall \{\delta U\}^t \quad (3)$$

où  $\{R\}$  est le résidu du problème qui peut être écrit comme la différence entre les vecteurs nodaux des forces intérieures et des forces extérieures :

$$\{R(\{U\}, p)\} = \{F_{\text{int}}(\{U\})\} - \{F_{\text{ext}}(\{U\}, p)\} = \{0\} \quad (4)$$

### 3.2 Méthode de résolution

La résolution de ce système non-linéaire nécessite le calcul de la matrice raideur tangente  $[K]$  définie par :

$$[K] = [K_{\text{int}}] - [K_{\text{ext}}] = \frac{\partial \{F_{\text{int}}\}}{\partial \{U\}} - \frac{\partial \{F_{\text{ext}}\}}{\partial \{U\}} \quad (5)$$

Il est bien connu que les problèmes de soufflage de membranes hyperélastiques présentent des points limites. L'emploi d'une méthode de continuation s'avère donc nécessaire. Dans ce travail, nous utilisons la méthode de longueur d'arc, sous la forme simplifiée du contrôle en déplacement proposée par Batoz et Dhatt [2].

Ainsi, en supposant connu un point d'équilibre défini par le vecteur déplacement nodal  $\{U_e\}$  et la pression  $p_e$ , le problème à résoudre consiste à déterminer les incréments de déplacement  $\{\Delta U\}$  et de pression  $\Delta p$  tels que :

$$\begin{cases} \{R(\{U_e\} + \{\Delta U\}, p_e + \Delta p)\} = 0 \\ \|\{\Delta U\}\|^2 - da^2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

où la seconde équation est l'équation de longueur d'arc,  $da$  étant la longueur d'arc imposée. Ce système est résolu par l'algorithme itératif de Newton-Raphson. À chaque itération, on calcule les changements des incréments de déplacement et de pression, respectivement  $\{dU\}$  et  $dp$ , en résolvant le système bordé :

$$\left[ \begin{array}{c|c} [K] & -\frac{1}{p} \{F_{\text{ext}}\} \\ \hline 2 \{\Delta U^{\text{prec}}\}^t & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \{dU\} \\ dp \end{Bmatrix} = - \left\{ \begin{array}{c} \{R^{\text{prec}}\} \\ \|\Delta \{U^{\text{prec}}\}\|^2 - da^2 \end{array} \right\} \quad (7)$$

Dans cette équation, l'exposant  $\star^{\text{prec}}$  représente la valeur de la grandeur  $\star$  à l'itération précédente.

### 3.3 Points singuliers et comportement post-bifurcatoire

Comme il a été mentionné précédemment, les courbes d'équilibre des membranes soufflées possèdent des points singuliers, c'est-à-dire des points de la courbe d'équilibre où le comportement change brusquement. On identifie deux types de points singuliers : les points limites pour lesquels la pente de la courbe de charge change et les points de bifurcation simple qui voient naître une nouvelle courbe d'équilibre solution du problème. L'étude de points singuliers peut être divisée en trois étapes décrites ci-dessous.

**Détection** Pour détecter la présence des points singuliers, un critère inspiré des travaux de Sokol et Witkowski [15] est adopté. Ce critère permet de déterminer le point d'équilibre où la matrice raideur  $[K]$  devient singulière. En notant  $w_{\min}$  la plus petite des valeurs propres négatives de  $[K]$  en valeur absolue, le critère est le suivant : si le nombre des valeurs propres négatives de  $[K]$  n'a pas changé depuis le dernier point d'équilibre alors  $\text{crit} = -|w_{\min}|$  ; si ce nombre a changé, alors  $\text{crit} = +|w_{\min}|$ . Au point singulier, on a bien sûr  $\text{crit} = 0$ .

**Isolation** Pour isoler le point singulier, on utilise simplement la méthode de dichotomie sur la valeur de la longueur d'arc jusqu'à vérifier  $\text{crit} = 0$ .

**Nature du point singulier** En notant  $\{Z_{\min}\}$  le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $w_{\min}$ , le produit scalaire entre ce vecteur et le chargement extérieur permet de déterminer la nature du point singulier. Si  $\{Z_{\min}\}^t \cdot \{F_{\text{ext}}\} = 0$  alors le point singulier est un point de bifurcation. Dans le cas contraire, c'est un point limite.

**Passage sur une branche secondaire** Dans le cas d'un point de bifurcation, le passage sur une branche secondaire nécessite seulement le calcul d'un point d'équilibre sur cette nouvelle branche. Pour cela, on utilise la méthode d'injection de mode propre utilisée avec succès par Shi et Moita [14], en choisissant pour prédiction dans l'algorithme de Newton-Raphson :

$$\{\Delta U_{\text{prédit}}\} = da \{Z_{\min}\} \quad (8)$$

La phase de correction permet alors de calculer un point d'équilibre sur la nouvelle branche. Par la suite, l'algorithme est utilisé de manière classique pour explorer cette nouvelle branche.

## 4 Exemples

Dans ce paragraphe, quelques exemples sont examinés en utilisant les formulations axisymétrique et 3D, et en mettant en évidence les modes de bifurcation symétriques et asymétriques.

Tous les exemples qui suivent sont étudiés avec une membrane d'épaisseur initiale  $H = 0,01$ , et de coefficients matériau  $C = 1$  et  $\alpha \in \{0; 0,1; 0,25\}$ .

## 4.1 Cylindre encastré

On considère un cylindre droit, encastré, de longueur  $L = 10$  et de rayon initial  $R_0 = 1$ . L'étude est faite avec la discrétisation axisymétrique, les modes obtenus seront donc axisymétriques. L'apparition d'une hernie (*bulge* en anglais) correspond à un point limite. Par ailleurs, les bifurcations correspondent à l'apparition d'une asymétrie de la membrane déformée par rapport au plan milieu.

Dans le cas d'un matériau néo-hookéen ( $\alpha = 0$ ), le point limite apparaît pour  $p = 0,0169$ , puis des points de bifurcation apparaissent pour des valeurs de  $p$  de  $0,0153$ ;  $0,0128$  et  $0,01102$ . Les courbes  $p(R_{max})$  sont très proches les unes des autres. La figure 1 illustre les différentes configurations obtenues.

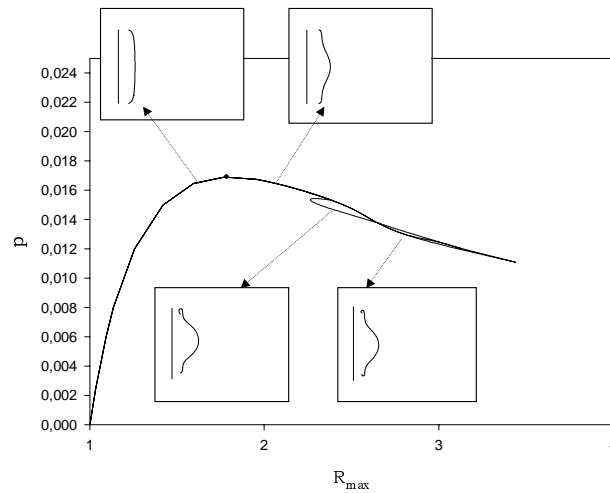


FIG. 1 – Solution d'une membrane cylindrique encastrée :  $\alpha = 0$

Pour une valeur du coefficient  $\alpha = 0,1$ , les mêmes phénomènes sont observés avec une hernie moins prononcée. Le point limite correspond à  $p = 0,0190$ , tandis que les points de bifurcation sont obtenus pour  $p = 0,0195$ ;  $p = 0,0175$  et  $p = 0,0175$ . Un deuxième point limite correspondant au retour à une configuration stable est détecté pour une pression de  $0,0183$ . La figure 2 illustre les différentes configurations obtenues.

Pour  $\alpha = 0,25$ , deux points limites apparaissent également pour des valeurs de pression égales à  $0,0237$  et  $0,02367$ . Un seul point de bifurcation a pu être détecté. Cette bifurcation est obtenue pour  $p = 0,023674$ , avant le deuxième point limite, et correspond, encore une fois, à un mode asymétrique. La branche symétrique et la branche secondaire sont cependant pratiquement confondues (figure 3), seule l'observation de la déformée permet de distinguer les deux cas.

## 4.2 Tore

Nous nous intéressons maintenant au cas d'un tore de rayon moyen initial  $R_{moyen} = 40$  ayant une section circulaire de rayon  $R_s = 10$ . Seul le cas  $\alpha = 0$  est présenté. Les deux types de simulation (axisymétrique et 3D) ont été menés à bien.

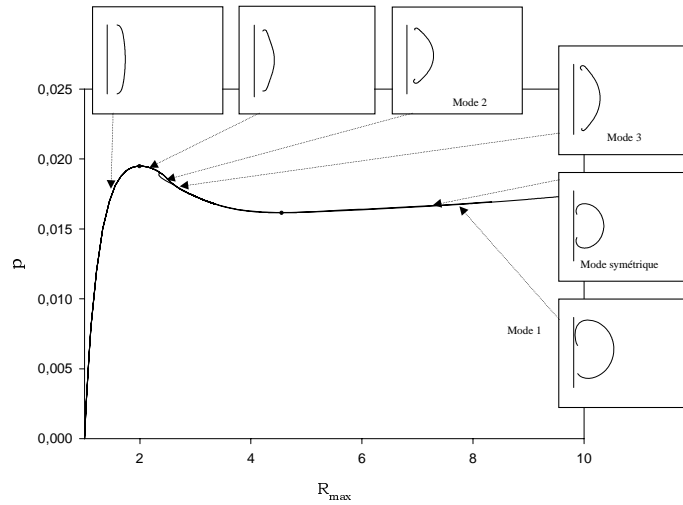


FIG. 2 – Solution d’une membrane cylindrique encastrée :  $\alpha = 0,1$

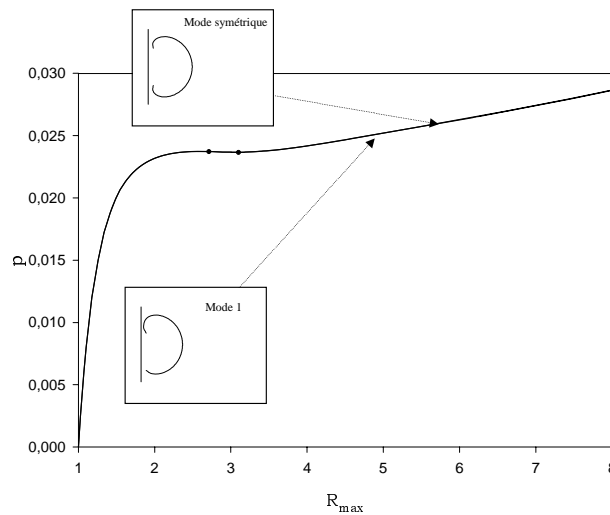


FIG. 3 – Solution d’une membrane cylindrique encastrée :  $\alpha = 0,25$

La modélisation axisymétrique ne met en évidence aucun point singulier de bifurcation. Notons cependant la présence d’un point limite pour  $p = 0,0015$ . De plus, on observe que la section du tore reste quasiment circulaire.

Dans le cas 3D, des modes bifurqués apparaissent. Ceci confirme les résultats obtenus par Reese et Wriggers pour un matériau de type Ogden [13] : dans le cas d’une membrane torique, il n’y a que des modes asymétriques. La figure 4 présente les différentes branches obtenues ainsi que la forme des modes correspondants.

## 5 Conclusion

Dans cette étude, le comportement post-critique des membranes hyperélastiques a été étudié par des approches axisymétrique et tridimensionnelle. Le critère permettant la détection des points singuliers s’est avéré très efficace. La qualité de la méthode numérique

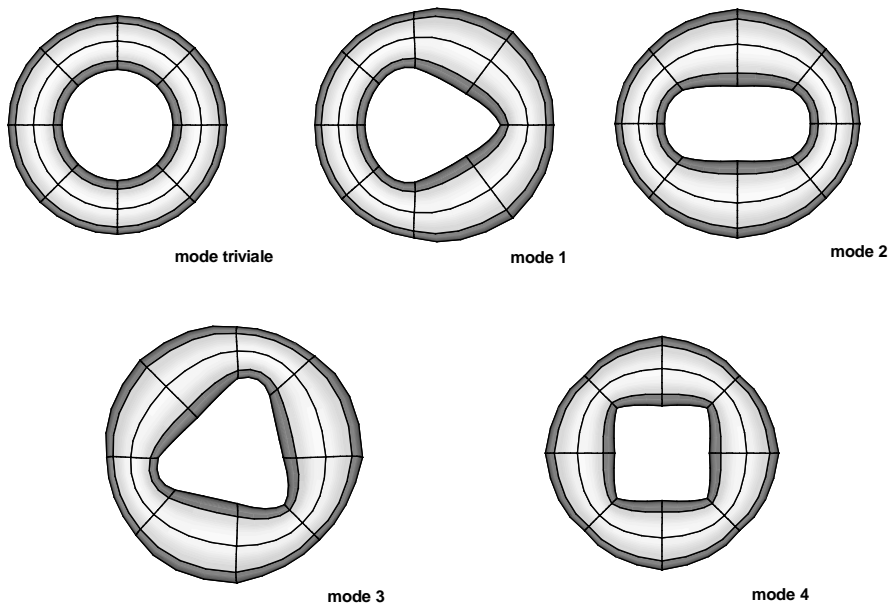
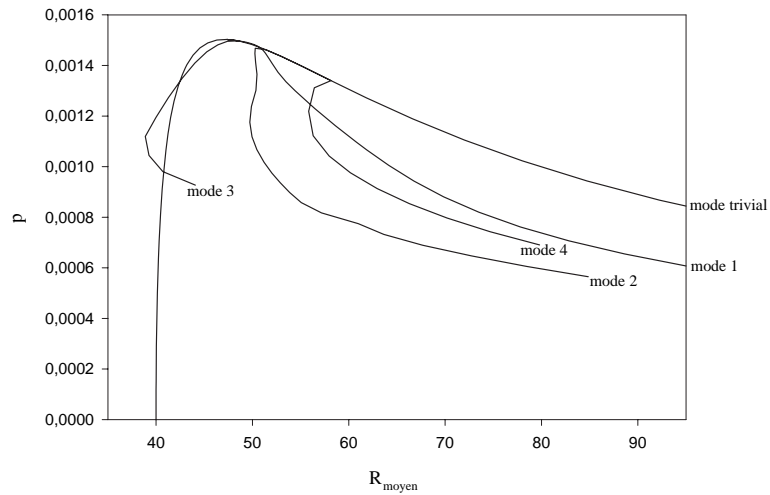


FIG. 4 – *Bifurcations d'une membrane torique*

consistant à utiliser l'injection de mode propre pour explorer les branches secondaires a été mise en évidence. Les différents exemples traités montrent l'importance des modes de bifurcation asymétrique dans le comportement de ces structures. Des travaux sont en cours pour essayer de mettre en évidence expérimentalement ce type de phénomène comme certains l'ont fait par le passé [1, 9].

## Références

- [1] H. Alexander. The tensile instability of initially spherical balloons. *Int. J. Engng Sci.*, 9:151–162, 1971.



- [2] J. L. Batoz and G. Dhatt. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 14:1262–1267, 1979.
- [3] G. A. Duffet and B. D. Reddy. The solution of multi-parameter systems of equations with application to problems in nonlinear elasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 59:179–213, 1986.
- [4] A. E. Green and J. E. Adkins. *Large elastic deformations*. The Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [5] D. M. Haughton. Post-bifurcation of perfect and imperfect spherical elastic membranes. *Int. J. Solids Structures*, 16:1123–1133, 1980.
- [6] F. P. K. Hsu, C. Schwab, D. Rigamonti, and J. D. Humphrey. Identification of response functions from axisymmetric membrane inflation tests: implications for biomechanics. *Int. J. Solids Struct.*, 31(24):3375–3386, 1994.
- [7] R. E. Khayat and A. Derdouri. Inflation of hyperelastic cylindrical membranes as applied to blow moulding. part i. axisymmetric case. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37:3773–3791, 1994.
- [8] R. E. Khayat, A. Derdouri, and A. Garcia-Réjon. Inflation of an elastic cylindrical membrane: non-linear deformation and instability. *Int. J. Solids Structures*, 29(1):69–87, 1992.
- [9] S. Kyriakides and Y. Chang. The initiation and propagation of a localized instability in an inflated elastic tube. *Int. J. Solids Struct.*, 27(9):1085–1111, 1991.
- [10] G. Marckmann, E. Verron, and B. Peseux. B-splines modeling of free inflation of axisymmetric rubberlike membranes. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering 2000*, pages sur CD–Rom, Barcelone, 11-14 sept. 2000.
- [11] G. Marckmann, E. Verron, and B. Peseux. Finite element analysis of blow molding and thermoforming using a dynamic explicit procedure. *Polym. Eng. Sci.*, 41(3):à paraître, 2001.
- [12] A. Needleman. Inflation of spherical rubber balloons. *Int. J. Solids Structures*, 13:409–421, 1977.
- [13] S. Reese and P. Wriggers. A finite element method for stability problems in finite elasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 38:1171–1200, 1995.
- [14] J. Shi and G. F. Moita. The post-critical analysis of axisymmetric hyper-elastic membranes by the finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*, 135:265–281, 1996.
- [15] T. Sokól and M. Witkowski. Some experiences in the equilibrium path determination. *Comput. Assist. Mech. Engng Sci.*, 4:189–208, 1997.
- [16] E. Verron, G. Marckmann, and B. Peseux. Dynamic inflation of non-linear elastic and viscoelastic rubberlike membranes. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 50(5):1233–1251, 2001.
- [17] W. H. Yang and W. W. Feng. On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes. *J. Appl. Mech. ASME*, 37:1002–1011, 1970.