



HAL
open science

Le transport d'une mesure vectorielle par un fluide et le théorème de Kelvin-Helmholtz

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Le transport d'une mesure vectorielle par un fluide et le théorème de Kelvin-Helmholtz. *Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées*, 1982, 27 (3), pp.375-383. hal-01789023

HAL Id: hal-01789023

<https://hal.science/hal-01789023>

Submitted on 9 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XXVII, N° 3

1982

TIRAGE À PART

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

LE TRANSPORT D'UNE MESURE VECTORIELLE PAR UN FLUIDE ET LE THÉORÈME DE KELVIN-HELMHOLTZ

PAR

J. J. MOREAU

1. INTRODUCTION

Soit Λ une portion de fluide, en mouvement par rapport à un repère que nous identifierons à \mathbb{R}^3 . On suppose que le champ des vitesses $(t, x) \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}^3$ est \mathcal{C}^1 sur la partie correspondante de \mathbb{R}^4 : nous entendons par là que, si cette partie est un ouvert de \mathbb{R}^4 , le champ u y est continûment différentiable et, sinon, que u est prolongeable en un champ qui est \mathcal{C}^1 sur un ouvert la contenant. Cette hypothèse entraîne que le champ des accélérations $(t, x) \rightarrow a(t, x) = u_t + (u \cdot \nabla) u \in \mathbb{R}^3$ est continu sur la même partie.

L'hypothèse implique aussi, d'après les propriétés classiques de l'équation différentielle $dx/dt = u(t, x)$, que les transitions du fluide dans \mathbb{R}^3 entre deux instants quelconques sont des \mathcal{C}^1 -difféomorphismes d'une partie de \mathbb{R}^3 dans une autre; c'est ce qui permet de parler d'une „ligne fluide” \mathcal{C}^1 ou *courbe \mathcal{C}^1 convectée par le fluide*. Ce dernier concept s'insère dans le cadre général suivant: que toutes les transitions soient \mathcal{C}^1 équivaut à dire que la portion de fluide Λ peut être munie, indépendamment du temps, d'une structure de variété \mathcal{C}^1 -différentiable, de dimension 3, avec éventuellement des bords, tel que le *placement* du fluide dans \mathbb{R}^3 à chaque instant t soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, noté π_t , de Λ dans \mathbb{R}^3 .

Il y a classiquement équivalence entre les assertions suivantes (cf. pour l'historique [1] ou [2]):

A. *Le champ des accélérations $x \rightarrow a(t, x)$ est, à chaque instant, le gradient d'un champ scalaire de \mathbb{R}^3 .*

B. *Pour toute ligne fluide fermée L (suffisamment régulière pour que l'intégrale ait un sens) la circulation $\int_L u \cdot dx$ est invariante dans le temps.*

Dans ce cadre, le théorème de Kelvin-Helmholtz consiste en la formulation d'hypothèses, de nature mécanique, assurant A.

L'objet du présent article est d'établir l'équivalence des assertions A et B ci-dessus à la propriété d'invariance dans le temps pour les intégrales du champ des vitesses $x \rightarrow u(t, x)$ relativement à certaines *mesures vectorielles convectées par le fluide*, concept précisé au § 3 ci-après (pour plus de détails, voir aussi [3]). L'assertion B est elle-même une propriété

de ce type, concernant des mesures vectorielles particulières (cf. ci-après § 3, Exemple 1 et § 4, Exemple 1).

Le cas spécial de mesures vectorielles convectées de la forme $v d\xi$ où $d\xi$ désigne la mesure volume dans \mathbb{R}^3 et v un champ vectoriel variable à divergence nulle, tangentiel ou nul au bord de la portion de fluide considérée (cf. ci-après § 4, Exemple 2), a déjà été étudié par l'auteur [4] (et, un peu antérieurement, par Thyagaraja [5], moyennant des hypothèses superflues quant à la structure des lignes de flux de v). La motivation de [4] était de rattacher les *intégrales premières* de la dynamique d'un fluide barotrope non visqueux, que fournit le théorème de Kelvin-Helmholtz, aux idées directrices de la dynamique analytique : on y montre que chacun des v en question engendre une chaîne de transformations conservant l'action hamiltonienne : l'intégrale première correspondante reflète dans ce cadre le *théorème de Noether* (pour une autre manière de rejoindre dans la même situation mécanique le théorème de Noether, voir [6]). Dans la même ligne, quoique sans référence explicite au théorème de Noether, voir aussi [12] [13].

Si, plus spécialement, on prend pour v le vecteur vorticité ω d'un fluide satisfaisant les conditions de Kelvin-Helmholtz, il vient un résultat ancien de l'auteur [7] (retrouvé indépendamment par Moffat [8], avec dans [9] des extensions à la magnétohydrodynamique) : l'intégrale

$\int_D u \cdot \omega d\xi$ est invariante dans le temps, si D est un *ilot tourbillonnaire*, i.e. une portion de fluide à la frontière de laquelle ω est tangentiel ou nul. Dans la terminologie de Moffat, aujourd'hui largement adoptée, cette expression s'appelle l'*hélicité* de D .

Bref, la formulation d'un résultat général en termes de mesures vectorielles convectées réalise la synthèse de tout cela. Le transport de mesures vectorielles tient par ailleurs un rôle central dans ce que nous appelons le „calcul des variations horizontales” [3]. Familiariser le public des hydrodynamiciens avec ce concept est une autre motivation du présent article.

2. VECTEURS MOBILES CONVECTÉS OU TRANSVECTÉS

A chaque $\lambda \in \Lambda$ s'associe l'espace vectoriel tangent Λ'_λ à la variété en ce point. Pour chaque instant t , le placement π_t est, par hypothèse, un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de Λ dans \mathbb{R}^3 . L'application linéaire tangente à π_t au point λ , notée $\pi'_t(\lambda)$, envoie bijectivement l'espace vectoriel Λ'_λ sur \mathbb{R}^3 . Fixons λ et considérons un élément γ de Λ'_λ , indépendant de t ; son image par $\pi'_t(\lambda)$ est un vecteur $v(t)$, *vecteur mobile dans* \mathbb{R}^3 . On dit que ce vecteur mobile, associé à la particule λ de Λ , est *convecté par le fluide*.

L'exemple le plus usuel de vecteur convecté se présente si l'on considère une *ligne fluide différentiable*, c'est-à-dire une application différentiable $r \rightarrow \lambda(r)$ d'un intervalle réel $[r_1, r_2]$ dans la variété Λ . Pour chaque r , la dérivée $d\lambda/dr = \gamma$ est un élément de $\Lambda'_{\lambda(r)}$. Par les placements successifs π_t , on obtient une *ligne mobile dans* \mathbb{R}^3 , $(t, r) \rightarrow \pi_t(\lambda(r))$. Vu la règle de dérivation des applications composées,

$t \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \pi_i(\lambda(r))$ est pour chaque r un vecteur mobile de \mathbb{R}^3 , image de γ par $\pi'_i(\lambda(r))$, donc un vecteur convecté par le fluide.

Un calcul classique donne que v est convecté si et seulement si on a, pour tout t ,

$$(1) \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j$$

où la dérivée partielle $\partial u_i / \partial x_j$ est à évaluer au point $x = \pi_i(\lambda)$.

L'espace vectoriel *cotangent* au point λ de Λ est, par définition, le dual Λ'_λ de Λ'_λ . On identifie par ailleurs \mathbb{R}^3 à son dual, d'où la construction de l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \rightarrow \Lambda'_\lambda$, adjointe de $\pi'_i(\lambda)$. Cette adjointe possède une inverse, notée ${}_*\pi'_i(\lambda)$, qui envoie bijectivement Λ'^* sur \mathbb{R}^3 . Bref, en omettant d'écrire λ , supposé ici fixé, on a, pour tout $\gamma \in \Lambda'_\lambda$, tout $\theta \in \Lambda'_\lambda$ et tout t

$$(2) \quad \langle \gamma, \theta \rangle = \pi'_i \gamma \cdot {}_*\pi'_i \theta,$$

où on désigne par $\langle ., . \rangle$ la forme bilinéaire de dualité entre Λ'_λ et Λ'_λ et par le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^3 .

Si $\lambda \in \Lambda$ et $\gamma \in \Lambda'_\lambda$ sont fixés, l'image de γ par ${}_*\pi'_i(\lambda)$ est un vecteur $w(t)$ mobile dans \mathbb{R}^3 : nous disons que w est *transvecté* par le fluide.

L'exemple le plus usuel de vecteur transvecté se présente si l'on considère une *fonction scalaire différentiable* $\varphi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, indépendante de t . Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, le gradient (ou différentielle) de φ en ce point est un élément θ de Λ'_λ . Par les placements successifs π_i , la fonction φ donne pour image une fonction $x \rightarrow f(t, x) = \varphi(\pi_i^{-1}(x))$, définie sur la région $\pi_i(\Lambda)$ de \mathbb{R}^3 ; on dit que f est une *fonction scalaire convectée par le fluide*. Le gradient w de f au point $x = \pi_i(\lambda)$ est un vecteur $w(t)$ mobile dans \mathbb{R}^3 ; la règle de dérivation des applications composées donne ici que $w(t)$ est l'image de θ par ${}_*\pi'_i(\lambda)$, donc un vecteur transvecté.

Bref, à chaque particule λ du fluide, s'associent deux modes de transport d'un vecteur mobile dans \mathbb{R}^3 : la convection et la transvection ; l'identité (2) fait qu'un vecteur $a(t) \in \mathbb{R}^3$ est transporté selon un de ces deux modes si et seulement si, pour tout vecteur $b(t) \in \mathbb{R}^3$ transporté selon l'autre mode, le produit scalaire euclidien $a(t) \cdot b(t)$ est constant par rapport à t . On en tire en particulier, par confrontation avec (1), qu'un vecteur mobile $t \rightarrow w(t)$ associé à une particule λ du fluide, est transvecté si et seulement si, pour tout t , on a

$$(3) \quad \frac{dw_i}{dt} = - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} w_k$$

En ce qui concerne un *champ vectoriel* $x \rightarrow h(t, x)$, défini pour chaque t sur tout ou partie de $\pi_i(\Lambda) \subset \mathbb{R}^3$, on dira naturellement qu'il est convecté (resp. transvecté) si, pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $h(t, \pi_i(\lambda))$ soit

défini, ce vecteur mobile de \mathbb{R}^3 , associé à λ , est convecté (resp. transvecté); bref, h est en ce cas l'image par les π_t successifs d'un champ de vecteurs (resp. champ de covecteurs) défini de façon indépendante de t sur tout ou partie de la variété Λ .

3. MESURES VECTORIELLES CONVECTÉES

Soit $d\mu$ une mesure scalaire définie, indépendamment de t , sur la variété Λ ; notons dm_t l'image de cette mesure par le placement π_t , mesure sur l'ensemble $\pi_t(\Lambda)$ qu'on peut, si l'on veut, prolonger à \mathbb{R}^3 entier en la prenant nulle en dehors de cet ensemble. Nous dirons que $t \rightarrow dm_t$ est une *mesure scalaire convectée par le fluide*.

L'exemple le plus classique est obtenu en prenant pour $d\mu$ la mesure *masse*, définie sur le fluide. Dans ce cas, dm_t admet usuellement une densité $x \rightarrow \rho(t, x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\xi$ de \mathbb{R}^3 ; que la mesure $d\mu$ correspondante sur Λ soit indépendante de t se traduit classiquement, si la fonction ρ est assez régulière, par une équation aux dérivées partielles concernant cette fonction.

Par ailleurs soit, dans \mathbb{R}^3 pour chaque t , un champ vectoriel k_t localement intégrable pour la mesure scalaire dm_t . Alors $dc_t = k_t dm_t$ constitue une *mesure vectorielle* dans \mathbb{R}^3 , dépendant de t . Si le champ vectoriel k_t est convecté par Λ , cette mesure vectorielle sera déclarée *convectée par Λ* , avec la propriété caractéristique suivante qui résulte immédiatement de l'identité (2); pour tout champ vectoriel w_t transvecté par Λ et tel que l'intégrale

$$\int w_t(x) \cdot dc_t(x) = \int w_t(x) \cdot k_t(x) dm_t(x)$$

existe, la valeur de cette intégrale est un réel constant par rapport à t .

Naturellement, la représentation de la mesure vectorielle dc_t comme produit d'une mesure scalaire convectée et d'un champ vectoriel convecté n'est pas unique. Aussi apparaît-il plus synthétique d'introduire *par dualité*, la notion de mesure vectorielle convectée, dans la ligne même où Bourbaki [10] construit la théorie des mesures, scalaires ou vectorielles sur tout espace localement compact et De Rham [11] celle des courants sur une variété \mathcal{C}^∞ .

Par définition, une mesure vectorielle sur la variété Λ sera une fonctionnelle linéaire, à valeurs dans \mathbb{R} , sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}(\Lambda, \Lambda'^*)$ des champs de covecteurs continus sur Λ et à support compact fonctionnelle supposée continue pour une topologie sur $\mathcal{H}(\Lambda, \Lambda'^*)$ que nous n'explicitons pas ici (cf., par exemple [10]; on observera d'abord que les concepts de continuité et de support qu'on vient d'invoquer ont bien un sens, relativement à la structure de variété \mathcal{C}^1 dont on a muni Λ , indépendamment de tout choix de cartes de cette variété). Notons dx cette fonctionnelle et θ un élément de $\mathcal{H}(\Lambda, \Lambda'^*)$; la valeur que θ confère à la fonctionnelle sera notée $\int \langle dx, \theta \rangle$.

C'est alors une version multidimensionnelle du théorème de Radon-Nikodym (cf. par exemple [10], Chap. 6, § 2, n° 4, Proposition 9), appliquée en faisant usage d'une carte de la variété Λ , qui permet d'affirmer l'existence d'une mesure scalaire ≥ 0 sur Λ , soit $d\mu$, et d'un champ de vecteurs tangents γ , $d\mu$ -mesurable et borné, tel que $dx = \gamma d\mu$, c'est-à-dire

$$\forall \theta \in \mathcal{K}(\Lambda, \Lambda'^*) : \int \langle dx, \theta \rangle = \int \langle \gamma, \theta \rangle d\mu$$

Cette égalité est d'ailleurs inaltérée si on modifie arbitrairement les valeurs que prend γ sur un ensemble $d\mu$ -négligeable.

Pour tout $\theta \in \mathcal{K}(\Lambda, \Lambda'^*)$, son image par le placement π_i , c'est-à-dire, en prenant $\lambda = \pi_i^{-1}(x)$, le champ vectoriel

$$x \rightarrow * \pi'(\lambda) \theta(\lambda) = w_i(x)$$

est un élément de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$; en résulte la définition de l'image dc_i de dx par ce placement; cette définition consiste dans l'identité

$$(4) \quad \int dc_i \cdot w_i = \int \langle dx, \theta \rangle,$$

d'où, finalement, $dc_i = k_i dm_i$ où k_i , champ vectoriel convecté borné, est l'image du champ γ et dm_i , mesure scalaire ≥ 0 convectée, l'image de $d\mu$.

REMARQUE. Relativement à une mesure vectorielle de \mathbb{R}^3 telle que la mesure e_i ci-dessus, cela aurait un sens d'envisager l'intégration d'une fonction scalaire. En prenant en particulier pour cette fonction scalaire la fonction caractéristique d'un ensemble, on rejoindrait l'idée traditionnelle de mesure: fonction σ -additive d'ensemble, ici à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Par contre, relativement à l'objet dx que nous avons appelé *mesure vectorielle sur la variété* Λ , l'intégration d'une fonction scalaire n'a aucun sens; on se l'explique en songeant qu'on ne sait pas additionner les éléments d'espaces vectoriels tangents en des points différents de la variété. Les mesures vectorielles sur une variété sont en fait des cas particuliers de *courants* au sens de De Rham [11] et non des fonctions d'ensembles.

Exemple 1. Soit, comme au paragraphe précédent, une ligne fluide, c'est-à-dire une application $r \rightarrow \lambda(r)$ d'un intervalle réel $[r_1, r_2]$ dans la variété Λ , application supposée \mathcal{C}^1 pour abrégier (on pourrait considérer plus généralement une application continue à variation bornée, c'est-à-dire une courbe de Jordan dans Λ). Alors la fonctionnelle dx définie sur $\mathcal{K}(\Lambda, \Lambda')$ par

$$\theta \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \left\langle \frac{d\lambda}{dr}, \theta(\lambda(r)) \right\rangle dr,$$

réel noté $\int \langle dx, \theta \rangle$ constitue, dans le sens qu'on vient de définir, une mesure vectorielle. Son image par chaque π_i est la mesure vectorielle

associée de la même façon, dans \mathbb{R}^3 , à la courbe image : c'est une mesure convectée par Λ . Pour ce qui est de la représentation, dans ce cas, de dx sous la forme $\gamma d\mu$, limitons-nous à la situation simple où l'application $r \rightarrow \lambda(r)$ est injective. On définit alors $d\mu$, mesure scalaire ≥ 0 , comme la fonctionnelle linéaire définie pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\Lambda, \mathbb{R})$ par

$$\varphi \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \varphi(\lambda(r)) dr,$$

réel noté $\int \varphi d\mu$. Visiblement, tout sous-ensemble de Λ qui ne rencontre pas la courbe est $d\mu$ -négligeable. Quant à γ , ce sera un champ vectoriel défini arbitrairement en tout point de Λ hors de la courbe et de valeur égale à $\frac{d\lambda}{dr}$ en chaque point $\lambda(r)$ de cette courbe. Les images dm_i et c_i de $d\mu$ et γ par chaque μ_i sont associées de la même manière à la courbe image dans \mathbb{R}^3 .

Exemple 2. Supposons qu'un fluide, vérifiant les assertions A et B de l'Introduction, possède par ailleurs une fonction *masse spécifique* $\rho(t, x)$ telle que la mesure $\rho d\xi$ ($d\xi$: mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^3) soit convectée. Il est très classique sous des formulations diverses que, si $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } u$ désigne le vecteur vorticité, le champ vectoriel $\rho^{-1}\omega$ est convecté. (Noter qu'inversement, cette propriété implique A et B dans le cas où le domaine occupé par le fluide dans \mathbb{R}^3 est, à chaque instant, simplement connexe). Puisque la mesure scalaire $\rho d\xi$ est convectée, il vient que $\rho^{-1}\omega \rho d\xi = \omega d\xi$ est une mesure vectorielle convectée, énoncé bien plus satisfaisant en ce qu'il évacue ρ , et donc le concept de masse, lesquels sont étrangers aux assertions purement cinématiques A et B ; cette mesure vectorielle s'introduit elle-même de façon directe ; elle constitue (au facteur $\frac{1}{2}$ près) le rotationnel de la mesure $u d\xi$ au sens des distributions de Schwartz.

4. MESURES VECTORIELLES SOLÉNOÏDALES ET CYCLIQUES

Les mesures, scalaires ou vectorielles, considérées dans ce qui précède peuvent n'être définies que sur une partie de Λ ; pour le développement de la théorie selon le plan de Bourbaki, cette partie sera supposée localement compacte. Inversement, pour une mesure définie sur Λ entier, on pourra définir sa restriction à une partie localement compacte de Λ . On se limite ici pour abrégé aux deux cas utiles suivants : On note Γ une partie compacte de Λ et on note Ω une partie de Λ qui est ouverte dans le sens suivant : son image par un des placements π_i (donc par tous) est un ouvert de \mathbb{R}^3 .

DÉFINITIONS. Une mesure vectorielle dx est dite cyclique sur le compact Γ de Λ si, pour toute fonction scalaire φ , continûment différentiable dans Λ , on a $\int_{\Gamma} \langle dx, \text{grad } \varphi \rangle = 0$.

Cette mesure vectorielle est dite solénoïdale sur l'ouvert Ω de Λ si pour toute fonction scalaire φ , continûment différentiable et à support compact dans Ω , on a $\int_{\Omega} \langle dx, \text{grad } \varphi \rangle = 0$.

Evidemment si dx est cyclique sur Γ , elle est solénoïdale sur tout ouvert contenu dans Γ .

Les mêmes définitions s'appliquent à des mesures vectorielles sur une partie de \mathbb{R}^3 ; l'identité (4), jointe au fait que l'image par $\ast\pi'$ du vecteur $\text{grad } \varphi$ est le gradient de l'image de φ , entraîne que la mesure dx considérée ci-dessus sera cyclique sur Γ , resp. solénoïdale sur Ω , si et seulement si son image par un placement π_t (donc par les placements de tous les instants) est cyclique sur $\pi_t(\Gamma)$, resp. solénoïdale sur $\pi_t(\Omega)$. En d'autres termes, une mesure convectée c_t est cyclique, resp. solénoïdale, pour tout t si elle l'est pour un t .

Exemple 1. On reprend l'Exemple 1 du paragraphe 3; pour $\theta = \text{grad } \varphi$, il vient

$$\int \langle dx, \theta \rangle = \int_{r_1}^{r_2} \left\langle \frac{d\lambda}{dr}, \text{grad } \varphi \right\rangle dr = \varphi(\lambda(r_2)) - \varphi(\lambda(r_1))$$

La mesure vectorielle en question est donc solénoïdale sur un ouvert Ω de Λ si et seulement si les bouts $\lambda(r_1)$ et $\lambda(r_2)$ de la courbe n'appartiennent pas à Ω ou sont confondus; dans ce dernier cas, nous dirons que la courbe est une boucle. La mesure est cyclique sur un compact Γ de Λ si et seulement si la courbe est une boucle contenue dans Γ .

Exemple 2. Soit v un champ vectoriel continûment différentiable sur une partie V de \mathbb{R}^3 . Par une application classique du théorème flux-divergence, il vient que la mesure vectorielle $v d\xi$ ($d\xi$: mesure de Lebesgue, ou mesure volume, de \mathbb{R}^3) est solénoïdale sur un ouvert de V si et seulement si $\text{div } v = 0$ sur cet ouvert. Soit par ailleurs un ouvert borné de \mathbb{R}^3 dont l'adhérence K est contenue dans V ; on suppose que la frontière ∂K de K est une surface régulière; alors le théorème flux-divergence donne, pour toute fonction scalaire f , continue sur K , continûment différentiable dans l'intérieur $\text{int } K$,

$$\int_K \text{grad } f \cdot v \, d\xi = - \int_{\text{int } K} f \, \text{div } v \, d\xi + \int_{\partial K} f v \cdot n \, d\sigma$$

($d\sigma$: mesure aire de la surface ∂K ; n : vecteur unité normal dans le sens sortant de K). On voit donc que la mesure vectorielle $v d\xi$ est cyclique sur le compact K si et seulement si on a $\text{div } v = 0$ sur $\text{int } K$ et $v \cdot n = 0$ sur ∂K .

Introduisons de nouveau la mesure masse $d\mu$ sur Λ , dont l'image dm_t dans \mathbb{R}^3 est une mesure convectée, avec une densité $\rho_t > 0$ relativement à $d\xi$. En écrivant, comme on le faisait pour ω dans l'Exemple 2 du paragraphe 3,

$$v_t \, d\xi = \rho_t^{-1} v_t \, \rho_t \, d\xi = \rho_t^{-1} v_t \, dm_t,$$

on voit que la mesure vectorielle $v_t d\xi$ est convectée si et seulement si le champ vectoriel $\rho_t^{-1}v_t$ est convecté. Pour un champ vectoriel variable $t \rightarrow v_t$ associé de cette manière-là au fluide, les propriétés précédentes : „div $v = 0$ dans un ouvert” et „ $v.n. = 0$ sur un bord régulier” sont vraies pour tout t dès qu’elles le sont pour un t .

5. LE THÉORÈME

Les assertions équivalentes A et B de l’Introduction sont équivalentes à la suivante :

C. Pour toute mesure vectorielle cyclique dc_t convectée par le fluide, l’intégrale $\int u \cdot dc_t$ est constante par rapport à t .

Preuve. Banalement C entraîne B puisque si L est une ligne fluide fermée, la fonctionnelle $v \rightarrow \int_L v(x) \cdot dx$ est une mesure vectorielle cyclique convectée (cf. § 3, Exemple 1 et § 4, Exemple 1).

Inversement, montrons que A entraîne C. Soit dc_t une mesure convectée, image par π_t d’une mesure dz , cyclique sur un compact K de Λ . La représentation $dz = \gamma d\mu$ donne par passage aux images $dc_t = k_t dm_t$, où dm_t est une mesure scalaire ≥ 0 convectée et k_t un champ vectoriel convecté, dm_t -mesurable, borné uniformément par rapport à t et x . Alors

$$\int u \cdot dc_t = \int u \cdot k_t dm_t = \int_K \varphi(t, \lambda) d\mu(\lambda)$$

où on pose

$$\varphi(t, \lambda) = u(t, \pi_t(\lambda)) \cdot k_t(\pi_t(\lambda)).$$

En notant, comme dans l’Introduction, $x \rightarrow a(t, x)$ le champ des accélérations du fluide, on a, vu (1),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a_i k_i + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} k_j$$

où les fonctions de x écrites au second membre sont à évaluer au point $x = \pi_t(\lambda)$. Par une dérivation sous le signe \int justifiée par le fait que $\partial \varphi / \partial t$ est bornée, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int u \cdot dc_t &= \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mu = \int_{\pi_t(K)} a_i k_i dm_t + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} k_j dm_t \\ &= \int_{\pi_t(K)} \left(a + \frac{1}{2} \text{grad } u^2 \right) \cdot dc_t \end{aligned}$$

nul, d’après les hypothèses.

Reçu le 18 décembre, 1980

Institut de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques
du Languedoc
34060 Montpellier-Cédex, France

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Truesdell, *The Kinematics of vorticity*. Indiana Univ. Pub., Science series, n° 19. Bloomington, Indiana, 1954.
2. C. Truesdell et R. A. Toupin, *The classical field theory*, in : (S. Flugge, ed.) *Handbuch der Physik*, B III/1, Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie, Springer, 1960, p. 226 — 793.
3. J. J. Moreau, *Inviscid fluids and the calculus of horizontal variations*, *J. of Engineering Sci.*, **20**, (1982) 389—411.
4. J. J. Moreau, *Sur les intégrales premières de la dynamique d'un fluide parfait barotrope et le théorème de Helmholtz-Kelvin*, *Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe*, vol. 7, p. 7.1—7.25, Montpellier, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1977.
5. A. Thyagaraja, *An integral invariant in inviscid fluid flow*. *J. of Math. and Phys. Sci.*, **9** (1975), 161 — 164.
6. H. Gouin, *Noether theorem in fluid mechanics*. *Mech. Res. Comm.*, **3** (1976), 151 — 155 (Pergamon Press).
7. J. J. Moreau, *Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope*. *C.R. Acad. Sci.*, **252**, (1961), 2810—2812.
8. H. K. Moffat, *The degree of knottedness of tangled vortex lines*. *J. Fluid Mech.*, **35** (1969), 117 — 129.
9. H. K. Moffat, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge Univ. Press, 1978.
10. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques*, Livre VI, *Intégration*. Hermann, Paris.
11. De Rham, *Variétés différentiables, courants, formes harmoniques*. Hermann, Paris, 1955.
12. C. Eckart, *Variation principles of Hydrodynamics*. *Physics of fluids* **3** (1960), 421 — 427.
13. F. P. Bretherton, *A note of Hamilton's principle for perfect fluids*. *J. of Fluids Mech.*, **44** (1970), 19 — 31.