



HAL
open science

Multiapplications à retraction finie

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Multiapplications à retraction finie. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*, 1974, 1 (3-4), pp.169-203. <hal-01788525>

HAL Id: hal-01788525

<https://hal.science/hal-01788525v1>

Submitted on 9 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JEAN JACQUES MOREAU

Multiapplications à retraction finie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 1, n° 3-4 (1974), p. 169-203.

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1974_4_1_3-4_169_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Multiapplications à Retraction Finie.

JEAN JACQUES MOREAU (*)

Introduction.

1a. Motivation.

Il s'agit, dans cet article, d'applications multivoques ou multiapplications d'un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ dans un espace métrique E . Si $t \mapsto A(t)$ est une telle multiapplication et qu'on interprète la variable t comme le temps, la situation peut se décrire en langage de cinématique: A est un *ensemble mobile* dans l'espace métrique E .

L'étude de certains problèmes d'évolution associés à un ensemble mobile donné conduit à formuler des hypothèses de régularité du mouvement de cet ensemble. Un premier cadre pour cette formulation consiste à faire de l'ensemble des parties (fermées) de E un espace métrique au moyen de la *distance de Hausdorff*, à valeurs éventuellement infinies si on ne se restreint pas à des ensembles bornés. Dans ce cadre, A est traitée comme une application ordinaire et on dispose des notions usuelles d'application *continue*, resp. *à variation bornée*, resp. *absolument continue*, resp. *lipschitzienne* etc.. C'est ce qui est fait, par exemple, chez Hermes [1], Kikuchi et Tomita [1], à propos de théorèmes de sélection ou d'équations différentielles à second membre multivoque dans \mathbf{R}^n . Tel était aussi le point de vue de l'auteur dans une première approche (cf. Moreau [4]) du problème d'évolution suivant, issu de la théorie des *systèmes mécaniques élastoplastiques*. On donne $t \mapsto C(t)$, multiapplication d'un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, contenant son origine t_0 , dans un espace hilbertien réel H , à valeurs convexes fermées non vides; on demande de construire une application (univoque) $u: I \rightarrow H$, absolument continue sur

(*) Institut de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 34060 Montpellier - Cedex.

Pervenuto alla Redazione il 12 Maggio 1973 e pervenuto in forma definitiva il 10 Maggio 1974.

tout sous-intervalle compact, telle que $u(t_0) = a$, élément donné de $C(t_0)$ et que, pour presque tout $t \in I$,

$$(1.1) \quad -\frac{du}{dt} \in \Gamma(t, u);$$

$\Gamma(t, u)$ désigne ici le cône convexe constitué par les éléments de H qui, en un sens classique, sont *normaux* au convexe $C(t)$ au point u , dans la direction « sortante »: cône vide si et seulement si $u \notin C(t)$; réduit à $\{0\}$, en particulier, si u est point interne de $C(t)$. Au moins dans le cas où le convexe mobile $C(t)$ possède un intérieur non vide, la loi d'évolution (1.1) possède une image mécanique intuitive: le *point mobile* $t \mapsto u(t)$ reste fixe tant qu'il est intérieur à C ; lorsqu'il est atteint par la frontière de cet ensemble mobile, il ne peut prendre qu'un mouvement dans une direction normale entrante, comme poussé par ladite frontière, de manière à continuer d'appartenir à $C(t)$ pour tout t .

Un résultat de cette première étude était l'existence d'une solution (d'ailleurs unique, parce que la multiapplication $x \mapsto \Gamma(t, x)$ est monotone au sens de Minty) pour le problème posé, sous l'hypothèse que la multiapplication $t \mapsto C(t)$ soit, au sens de la distance de Hausdorff, *absolument continue sur tout sous-intervalle compact* de I .

Mais cette hypothèse apparaît inutilement restrictive: si, sur un intervalle $[t_1, t_2[$, le convexe mobile ou, tout au moins, son intersection avec un voisinage du point $u(t_1)$, se trouve « en expansion », il est clair que l'application constante $t \mapsto u(t) = u(t_1)$ est solution de (1.1) sur cet intervalle sans qu'il soit besoin d'aucune régularité de l'évolution de C . Une telle régularité n'importe que si C « se rétracte ». De là l'idée de faire usage d'un *écart* entre deux parties A et B de E moins fin que la distance de Hausdorff, *dissymétrique*; on note

$$(1.2) \quad e(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y),$$

expression nulle si et seulement si A est contenu dans l'adhérence de B (notée $\text{adh } B$).

Cet écart (on en rencontre déjà un emploi chez Van Cutsem [1], [2], Bridgland [1], [2]) est un intermédiaire habituel dans l'étude de la distance de Hausdorff, laquelle s'écrit $h(A, B) = \max \{e(A, B), e(B, A)\}$. L'essentiel est que e donne lieu à une *inégalité triangulaire* et cela va permettre de reproduire la construction traditionnelle qui, considérant la somme des distances entre les valeurs successivement prises par une fonction en des points de subdivision d'un intervalle $[s, t]$, élabore, par passage au « sup » (ou limite selon l'ordonné filtrant des subdivisions de $[s, t]$), la *variation* de la fonction sur

cet intervalle: pour toute multiapplication A de $[s, t]$ dans l'espace métrique E , nous définirons, en faisant jouer à e le rôle d'une distance, la *rétraction* $\text{ret}(A; s, t)$, expression à valeurs dans $[0, +\infty]$, nulle si et seulement si la multiapplication $\tau \rightarrow \text{adh } A(\tau)$ est croissante (non strictement) sur cet intervalle.

Appliquée au problème précité cette notion permet une amélioration substantielle du théorème d'existence de la solution: il suffit pour cette existence que la fonction $t \mapsto \text{ret}(C; t_0, t)$ soit absolument continue sur tout sous-intervalle compact de I (cf. Moreau [5]). Il ne s'agit pas là d'un raffinement académique; une équation plus compliquée que (1.1), mais étroitement reliée à elle, régit la dynamique d'un système mécanique présentant des *liaisons unilatérales* par exemple des contacts entre solides: à partir de chaque configuration atteinte par le système, l'ensemble des valeurs que de telles liaisons permettent à la vitesse est une partie convexe mobile $C(t)$ d'un espace hilbertien de dimension finie; à un instant où l'un des contacts vient à cesser la dimension de cet ensemble augmente, d'où une variation, au sens de la distance de Hausdorff, qui peut être discontinue et même infinie; mais cela n'implique pas d'irrégularité pour la fonction rétraction considérée ci-dessus.

1b. Résultats.

La section 2 établit les propriétés élémentaires de l'écart e . Nous avons tenu à prendre en compte l'éventualité d'*ensembles vides*; on doit alors préciser que les « inf » et « sup », écrits en (1.2) ci-dessus, sont entendus au sens de l'ensemble ordonné $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty]$: dans cet ensemble le « sup » de la partie vide est 0.

Dans le cas particulier où E est un espace vectoriel réel normé, et où les ensembles A et B considérés sont *convexes* non vides, on peut évaluer $e(A, B)$ à partir des *fonctions d'appui* de ces ensembles.

La section 3 définit, dans la ligne esquissée plus haut, la *rétraction* $\text{ret}(A; s, t)$ de la multiapplication A sur l'intervalle $[s, t]$. On dit que A est à *rétraction finie* sur l'intervalle I si cette expression est finie pour tout $[s, t] \subset I$; dans ce cas on construit une fonction *rétraction indéfinie* $r: I \rightarrow \mathbf{R}$ (croissante au sens large) telle que

$$\text{ret}(A; s, t) = r(t) - r(s).$$

En inversant l'ordre de \mathbf{R} , on définit de même l'*expansion* $\text{exp}(A; s, t)$. La *variation* au sens de la distance de Hausdorff, notée $\text{var}(A; s, t)$, majore évidemment rétraction et expansion; des relations plus précises sont formulées.

On dit que la multiapplication A est à rétraction finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne) si la fonction numérique r est finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne).

Une remarque techniquement utile est que, si A est à rétraction finie continue sur I , cette multiapplication possède une factorisation de la forme $A = L \circ c$, où c est une application continue strictement croissante de I sur un intervalle J et L une multiapplication de J dans E , à rétraction lipschitzienne de rapport 1.

On ne considère désormais que des multiapplications à rétraction finie. La section 4 débute par l'étude d'une multiapplication A définie au moins sur un intervalle ouvert à gauche $]t_1, t_2]$ et telle que la fonction (croissante au sens large) r soit bornée, d'où l'existence du réel $r^+(t_1)$, limite de r à droite du point t_1 . On montre que A possède une *limite*, à droite du point t_1 , notée $A^+(t_1)$, ensemble fermé éventuellement vide, c'est-à-dire que les ensembles appelés classiquement (cf. par exemple Berge [1]) *limite supérieure* et *limite inférieure* de A à droite du point t_1 sont égaux. Un ensemble B est contenu dans $A^+(t_1)$ si et seulement si

$$\lim_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) = 0.$$

Lorsque les $A(t)$ sont contenus dans un compact fixe, $A^+(t_1)$ est aussi limite de $A(t)$ au sens de la distance de Hausdorff.

Passant au cas où la multiapplication A est définie et à rétraction finie au moins sur l'intervalle compact $[t_1, t_2]$, le § 4b établit

$$(1.3) \quad r^+(t_1) - r(t_1) = \lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) \leq e(A(t_1), A^+(t_1)),$$

ce qui conduit en particulier, au § 4c, à la formulation d'un certain nombre de propriétés équivalentes à la *continuité à droite* de la fonction r au point t_1 .

Il est vital pour la suite de dégager des cas où le dernier membre de (1.3) se trouve égal aux deux premiers. Dans ce but sont examinées au § 4d trois éventualités mettant en jeu certaines *compacités*:

HYPOTHÈSE H_1 . L'espace métrique E est tel que les boules fermées soient compactes.

HYPOTHÈSE H_2 . E est l'espace de Banach dual d'un espace normé X et on suppose que les valeurs de A sont des ensembles fermés pour la topologie faible $\sigma(E, X)$ (exploitation la plus usuelle: cas où E est un espace de Banach réflexif et où les valeurs de A sont convexes fortement fermées).

HYPOTHÈSE H_3 . L'espace métrique E est complet et les valeurs de A sont des ensembles compacts.

Une quatrième éventualité ferait logiquement pendant à H_2 :

HYPOTHÈSE H_4 . E est un espace de Banach et les valeurs de A sont faiblement compactes. Son étude est reportée au paragraphe final 5e où l'on montre qu'elle se ramène banalement à H_2 .

Moyennant l'une quelconque de ces hypothèses, on montre que, si A est à rétraction bornée sur $]t_1, t_2]$, on a, pour tout $B \subset E$,

$$\lim_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) = e(B, A^+(t_1)).$$

De là découlent, en particulier, des conditions assurant $A^+(t_1) \neq \emptyset$. Si, de plus, A est à rétraction finie sur $[t_1, t_2]$ on obtient l'égalité du dernier membre de (1.3) aux deux premiers.

Les *limites à gauche* ne semblent pas avoir, dans les applications de la théorie de la rétraction, la même utilité que les limites à droite. C'est pourquoi on se contente, au § 4e, de résumer un certain nombre de faits concernant ces limites, en renvoyant pour les démonstrations à Moreau [5] et [11].

Tout est alors prêt pour aborder, dans la 5-ème et dernière partie, les *théorèmes de sélection et d'approximation* qui constituent l'objet principal de cet article (et déjà annoncés sans démonstration dans Moreau [6]).

Soit I un intervalle de \mathbf{R} , contenant son origine t_0 et soit A une multiapplication à rétraction finie de I dans E ; on fait l'une des hypothèses « H ». Alors quel que soit $a_0 \in A(t_0)$ (noter que l'existence d'un tel a_0 assure $A(t) \neq \emptyset$ pour tout $t \in I$) il existe une sélection $t \mapsto u(t) \in A(t)$ de la multiapplication A telle que $u(t_0) = a_0$ et que

$$(1.4) \quad \forall [s, t] \subset I: \text{var}(u; s, t) \leq \text{ret}(A; s, t).$$

En particulier cette inégalité entraîne que, si la multiapplication A est à rétraction finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne), l'application u est à variation finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne). Rappelons que la *variation* de la multiapplication A , au sens de la distance de Hausdorff, majore la rétraction; de là un cadre d'exploitation usuel de ce théorème qui contient, en particulier, un résultat de Kikuchi et Tomita [1] (sélections de multiapplications absolument continues ou lipschitziennes, à valeurs dans \mathbf{R}^n). Dans cet ordre d'idées, on trouvera dans Moreau [8], [10] des conditions assurant la continuité absolue de l'intersection de deux multiapplications à valeurs convexes dans un espace normé.

En passant par l'hypothèse H_3 et le plongement d'un espace métrique quelconque dans son complété on obtient que toute multiapplication à rétraction finie, à valeurs compactes dans un espace métrique, présente cette même possibilité de sélection.

La propriété d'approximation « à gauche » qui fait l'objet du § 5c joue un rôle essentiel dans l'étude du problème d'évolution (1.1). On note $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des partitions de l'intervalle I en sous-intervalles de forme quelconque (ouverts, fermés ou semi-ouverts, certains d'entre eux éventuellement réduits à des points), partitions qui soient *localement finies* dans le sens que tout compact de I est recouvert par un nombre fini de ces intervalles. Soit A une multiapplication à rétraction finie définie sur I et soit $P \in \mathcal{F}(I)$; on note A_P la multiapplication (dite localement en escalier) qui prend sur chaque intervalle I_i de P la valeur constante déterminée comme suit: $A_P(I_i) = A(t_i)$ si I_i contient son origine t_i et $A_P(I_i) = A^+(t_i)$ sinon.

Il est facile de construire $P \in \mathcal{F}(I)$ de façon que sur chaque intervalle de cette partition l'oscillation de la fonction r soit inférieure ou égale à un $\varepsilon > 0$ donné: prendre une partition localement finie de \mathbf{R} en intervalles de longueur moindre que ε , puis prendre les images réciproques de ces intervalles par la fonction r (laquelle est croissante au sens large); avec une telle partition P , la Proposition 5c formule que, si l'une des hypothèses « H » est satisfaite, on a, pour tout $t \in I$,

$$e(A_P(t), A(t)) \leq \varepsilon$$

et, pour tout sous-intervalle compact $[s, t]$ de I ,

$$\text{ret}(A_P; s, t) \leq \text{ret}(A; s, t) + \varepsilon.$$

2. – Un écart non symétrique sur l'ensemble des parties d'un espace métrique.

2a. *Excès d'un ensemble sur un autre.*

DEFINITION (2a). Soit A et B deux sous-ensembles d'un espace métrique E ; on appelle excès de A sur B l'expression suivante, à valeurs dans $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty]$,

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b),$$

où le sup est pris au sens de l'ensemble ordonné $\overline{\mathbf{R}}_+$ (dans cet ensemble, le sup de la partie vide est 0).

Il est évidemment indifférent de remplacer les ensembles considérés par leurs adhérences. En particulier

$$(2.1) \quad e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \text{adh } B.$$

Noter que, si on prend pour A la partie vide de E , on obtient, quel que soit B (éventuellement vide lui-même),

$$(2.2) \quad e(\emptyset, B) = 0.$$

En outre, pour tout $a \in E$ on a $d(a, \emptyset) = +\infty$ donc

$$(2.3) \quad A \neq \emptyset \Rightarrow e(A, \emptyset) = +\infty.$$

La classique *distance de Hausdorff* entre deux parties A et B de E s'écrit

$$(2.4) \quad h(A, B) = \max \{e(A, B), e(B, A)\}.$$

On voit qu'on peut, dans le maniement de cette dernière notion, aller jusqu'à la considération d'ensembles vides; cela permet des énoncés plus substantiels et plus cohérents.

PROPOSITION (2a). *Si A, B, C sont trois parties quelconques de E , on a l'inégalité triangulaire*

$$(2.5) \quad e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C).$$

En effet, pour un éventuel $\varrho \in \mathbf{R}$ strictement supérieur au second membre de (2.5), il existe σ et τ dans \mathbf{R} tels que $\varrho = \sigma + \tau$ et que

$$\sigma > \sup_{a \in A} d(a, B), \quad \tau > \sup_{b \in B} d(b, C).$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \quad \exists b \in B: \quad \sigma > d(a, b) \\ \forall b \in B: \quad \tau > d(b, C). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $a \in A$, on peut écrire

$$d(a, C) \leq d(a, b) + d(b, C) < \sigma + \tau = \varrho,$$

d'où $e(A, C) \leq \varrho$, ce qui prouve (2.5).

2b. *La multiapplication « boule ».*

Si b est un point de l'espace métrique E et si $\varrho \in \mathbf{R}_+$, nous notons $\beta(b, \varrho)$ (resp. $\beta_0(b, \varrho)$) la boule fermée (resp. ouverte) de centre b , de rayon ϱ .

On peut interpréter $b \mapsto \beta(b, \varrho)$ (resp. $b \mapsto \beta_0(b, \varrho)$) comme une multiapplication de E dans lui-même; alors, si B est une partie quelconque de E , la notation habituelle d'image d'un ensemble par une multiapplication fournit ici l'écriture

$$\beta(B, \varrho) = \bigcup_{b \in B} \beta(b, \varrho)$$

et une notation semblable avec β_0 .

Appelons g la fonction définie, pour tout $x \in E$, par $g(x) = d(x, B)$ et considérons ses « tranches »:

$$\begin{aligned} g^<(\varrho) &= \{x \in E : g(x) < \varrho\} \\ g^{\leq}(\varrho) &= \{x \in E : g(x) \leq \varrho\}. \end{aligned}$$

On trouve, pour tout $\varrho \in \mathbf{R}_+$,

$$(2.6) \quad g^<(\varrho) = \beta_0(B, \varrho) \subset \beta(B, \varrho) \subset g^{\leq}(\varrho).$$

D'un autre côté (pour g fonction numérique quelconque, définie sur un ensemble E quelconque), si A est une partie de E , on établit aisément:

$$\begin{aligned} \sup g(A) &= \inf \{\varrho : A \subset g^<(\varrho)\} \\ &= \inf \{\varrho : A \subset g^{\leq}(\varrho)\}; \end{aligned}$$

de là une nouvelle expression de $e(A, B)$:

En notant indifféremment B_ϱ l'un quelconque des quatre ensembles qui figurent en (2.6), on a

$$(2.7) \quad e(A, B) = \inf \{\varrho \in \mathbf{R}_+ : A \subset B_\varrho\}.$$

2c. *Cas d'un espace vectoriel normé.*

On suppose dans ce paragraphe que E est un espace vectoriel réel normé; la norme sera notée $|\cdot|$.

Si B est une partie convexe de cet espace vectoriel les quatre ensembles figurant en (2.6) sont convexes. Alors, si on note conv l'enveloppe convexe d'un ensemble, (2.7) montre que

$$B \text{ convexe} \Rightarrow e(A, B) = e(\text{conv } A, B).$$

Soit F le *dual topologique* de E ; on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire de cette dualité.

A toute partie C de E , on associe sa *fonction d'appui* γ , définie sur F par

$$\gamma(y) = \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle .$$

C'est la *fonction polaire* de ψ_C , *fonction indicatrice* de C (i.e. $\psi_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $\psi_C(x) = +\infty$ si $x \notin C$); pour l'usage fait ici de la théorie des fonctions polaires, consulter Laurent [1] ou Moreau [1].

Soit γ et γ' les fonctions d'appui de deux parties *convexes* C et C' de E , *supposées non vides*. Pour tout $a \in E$, on a

$$\begin{aligned} d(a, C') &= \inf_{x' \in C'} |a - x'| = \inf_{x' \in E} [\psi_{C'}(x') + |a - x'|] \\ &= (\psi_{C'} \nabla |\cdot|)(a) . \end{aligned}$$

La fonction polaire de l'*inf-convolution* $\psi_{C'} \nabla |\cdot|$ est la somme des fonctions polaires de $\psi_{C'}$ et de $|\cdot|$, à savoir, respectivement γ' et ψ_B , en désignant ici par B la *boule unité fermée* de F . Comme par ailleurs $|\cdot|$ est convexe partout finie et continue, que $\psi_{C'}$ est convexe (et finie en un point au moins puisque C' est non vide), la fonction $\psi_{C'} \nabla |\cdot|$ est convexe partout finie et continue, donc égale à sa bipolaire. Cela donne

$$d(a, C') = \sup_{y \in F} [\langle a, y \rangle - \gamma'(y) - \psi_B(y)] = \sup_{y \in B} [\langle a, y \rangle - \gamma'(y)] .$$

En théorie des fonctions polaires les « sup » sont naturellement pris au sens de l'ordre de $\bar{\mathbf{R}}$. Comme C et C' sont non vides, ces mêmes « sup » peuvent être employés dans la définition de e ; donc

$$e(C, C') = \sup_{a \in C} \sup_{y \in B} [\langle a, y \rangle - \gamma'(y)] = \sup_{y \in B} \sup_{a \in C} [-\gamma'(y) + \langle a, y \rangle]$$

où l'opération $+$ prolonge l'addition classique selon la convention $(+\infty) + (-\infty) = -\infty$. On invoque alors une règle de calcul des « sup », encore valable avec cette addition prolongée (cf. Moreau [2]).

$$e(C, C') = \sup_{y \in B} [-\gamma'(y) + \sup_{y \in C} \langle a, y \rangle] = \sup_{y \in B} [-\gamma'(y) + \gamma(y)] .$$

D'ailleurs comme γ et γ' sont positivement homogènes il est équivalent d'entendre B comme boule unité ouverte; bref:

Si C et C' sont deux parties convexes non vides de E et si B est la boule unité fermée (resp. ouverte) de F , on a, en faisant la convention $\infty - \infty = -\infty$,

$$(2.8) \quad e(C, C') = \sup_{y \in B} [\gamma(y) - \gamma'(y)].$$

Vu cette convention, tout y tel que $\gamma'(y) = +\infty$ peut être omis dans la construction du « sup », c'est-à-dire que (on note classiquement $\text{dom } \gamma' = \{y \in F: \gamma'(y) < +\infty\}$)

$$e(C, C') = \sup_{y \in B \cap \text{dom } \gamma'} [\gamma(y) - \gamma'(y)].$$

On en tire en particulier l'implication

$$(2.9) \quad e(C, C') < +\infty \Rightarrow \text{dom } \gamma' \subset \text{dom } \gamma.$$

On sait que, si les convexes C et C' sont fermés, leurs cônes asymptotiques C_∞ et C'_∞ (ou cônes de récession) sont respectivement les cônes polaires, au sens de la dualité (F, E) , des cônes convexes $\text{dom } \gamma$ et $\text{dom } \gamma'$; (2.9) fournit donc l'implication

$$e(C, C') < +\infty \Rightarrow C_\infty \subset C'_\infty.$$

Le cas le plus simple est celui où C et C' sont bornés; alors évidemment $e(C, C') < +\infty$ et, d'ailleurs, $\text{dom } \gamma = \text{dom } \gamma' = F$.

3. — Retraction d'une multiapplication.

3a. Définition.

Soit $t \mapsto A(t)$ une multiapplication d'un intervalle I de \mathbf{R} dans l'espace métrique E . Soient s et t dans I , avec $s \leq t$. Pour toute subdivision finie S de l'intervalle $[s, t]$, à savoir

$$(3.1) \quad S: \quad s = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n = t,$$

notons

$$(3.2) \quad R(S) = \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \in \mathbf{R}_+.$$

Le sup de $R(S)$ pour S décrivant l'ensemble des subdivisions finies de $[s, t]$ est appelé rétraction de la multiapplication A sur l'intervalle $[s, t]$; notation $\text{ret}(A; s, t)$ (à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$).

La multiapplication $\tau \mapsto \text{adh } A(\tau)$ a même rétraction que A .
Evidemment, si $[\sigma, \tau]$ est un sous-intervalle de $[s, t]$,

$$(3.3) \quad e(A(\sigma), A(\tau)) \leq \text{ret}(A; \sigma, \tau) \leq \text{ret}(A; s, t).$$

Il résulte alors de (2.1) que $\text{ret}(A; s, t) = 0$ si et seulement si la multi-application $\tau \mapsto \text{adh } A(\tau)$ est (non strictement) croissante sur l'intervalle $[s, t]$.

3b. Additivité.

L'ensemble $\mathcal{S}(s, t)$ des subdivisions finies de $[s, t]$, ordonné par l'inclusion, est filtrant à droite. Et il résulte de l'inégalité triangulaire que la fonction numérique $S \mapsto R(S)$ est croissante sur cet ensemble ordonné: son « sup » est donc aussi bien sa *limite* suivant la base de filtre des sections de l'ensemble ordonné.

Soit $s \leq t \leq u$ dans I ; la réunion d'une subdivision finie S de $[s, t]$ et d'une subdivision finie S' de $[t, u]$ fournit une subdivision finie de $[s, u]$, soit S'' , admettant t pour noeud et

$$R(S'') = R(S) + R(S').$$

Comme l'ensemble des subdivisions finies de $[s, u]$ admettant t pour noeud est visiblement cofinal dans l'ordonné $\mathcal{S}(s, u)$, il vient à la limite:

$$(3.4) \quad \text{ret}(A; s, u) = \text{ret}(A; s, t) + \text{ret}(A; t, u).$$

Soit t_0 un « point de repère » dans I ; pour tout $t \in I$ posons

$$(3.5) \quad r(t) = \begin{cases} \text{ret}(A; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{ret}(A; t, t_0) & \text{si } t < t_0. \end{cases}$$

On tire d'abord de (3.4) que la fonction r ainsi définie sur I (on peut l'appeler *rétraction indéfinie* de A) est *croissante*. En outre, si deux des trois quantités écrites en (3.4) sont finies, la troisième l'est aussi; par suite:

La fonction r est partout finie sur I si et seulement si $\text{ret}(A; s, t) < +\infty$ pour tout sous-intervalle $[s, t] \subset I$; on dit alors que la multiapplication A est à rétraction finie sur I ; dans ce cas (3.4) donne

$$\text{ret}(A; s, t) = r(t) - r(s).$$

On dit que la multiapplication A est à rétraction bornée sur I si la fonction r est bornée.

REMARQUE. (2.2) montre que si $A(t)$ est *vide* pour tout $t \in [t_1, t_2[$, on a $\text{ret}(A; t_1, t_2) = 0$.

Par ailleurs supposons A à rétraction finie sur I et soit $t_1 \in I$; si $A(t_1) \neq \emptyset$, (2.3) montre que $A(t) \neq \emptyset$ pour tout $t > t_1$. De même si $A(t_1) = \emptyset$, (2.3) montre que $A(t) = \emptyset$ pour tout $t < t_1$.

3c. Expansion, rétraction et variation.

De la même manière, on peut poser

$$P(S) = \sum_{i=1}^n e(A(\tau_i), A(\tau_{i-1})) \in \bar{\mathbf{R}}_+.$$

Le « sup » de $P(S)$, pour S décrivant l'ensemble des subdivisions finies de $[s, t]$ est appelé *expansion* de la multiapplication A sur l'intervalle $[s, t]$; notation $\text{exp}(A; s, t)$.

Il vient cette fois $\text{exp}(A; s, t) = 0$ si et seulement si la multiapplication $\tau \mapsto \text{adh } A(\tau)$ est (non strictement) décroissante sur l'intervalle $[s, t]$.

Il est classique, par ailleurs, d'appeler *variation* de la multiapplication A sur $[s, t]$, notation $\text{var}(A; s, t)$, le « sup » de

$$V(S) = \sum_{i=1}^n h(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)).$$

La définition (2.4) de la distance de Hausdorff h impliquant

$$h(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \leq e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) + e(A(\tau_i), A(\tau_{i-1})),$$

on obtient

$$(3.6) \quad \max \{ \text{ret}(A; s, t), \text{exp}(A; s, t) \} \leq \text{var}(A; s, t) \\ \leq \text{ret}(A; s, t) + \text{exp}(A; s, t).$$

La multiapplication A est donc à *variation finie* sur l'intervalle I si et seulement si elle est à la fois à rétraction finie et à expansion finie. Dans ce cas, choisissons, comme en (3.5), un point de repère t_0 dans I et définissons la fonction *expansion indéfinie* de A :

$$p(t) = \begin{cases} \text{exp}(A; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{exp}(A; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases}$$

ainsi que la fonction *variation indéfinie* de A :

$$v(t) = \begin{cases} \text{var}(A; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{var}(A; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0. \end{cases}$$

De (3.6) résultent des inégalités entre les trois fonctions r, p, v ; mais, de façon plus précise, *la donnée de r et p détermine v* . La construction peut se décrire comme suit. Notons a l'application $t \mapsto (r(t), p(t))$ de I dans \mathbf{R}^2 ; munissons \mathbf{R}^2 de la norme

$$(3.7) \quad \|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Alors, au sens de cette métrique de \mathbf{R}^2 , on trouve aisément que la variation de a sur un intervalle $[s, t]$ est

$$(3.8) \quad \text{var}(a; s, t) = \text{var}(A; s, t),$$

de sorte que la fonction v est variation indéfinie de l'application a .

3d. Rétraction continue, absolument continue ou lipschitzienne.

On dit que la multiapplication A est à rétraction finie continue si la fonction numérique r est finie et continue.

On dit que A est à rétraction absolument continue (resp. localement absolument continue) sur l'intervalle I si la fonction numérique r est finie et absolument continue (resp. localement absolument continue) sur cet intervalle. Cela équivaut à l'existence d'une vitesse de rétraction \dot{r} , fonction positive appartenant à $L^1(I)$ (resp. appartenant à $L^1_{\text{loc}}(I)$) telle que

$$\forall [s, t] \subset I: e(A(s), A(t)) \leq \int_s^t \dot{r}(\tau) d\tau.$$

La caractérisation classique des fonctions numériques absolument continues fournit en outre:

La multiapplication A est à rétraction absolument continue sur l'intervalle compact $[s, t]$ si et seulement si à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $\eta > 0$ tel que, pour les familles finies d'intervalles ouverts $]\sigma_i, \tau_i[\subset [s, t]$ deux à deux disjoints, on ait l'implication

$$\sum_i (\tau_i - \sigma_i) < \eta \Rightarrow \sum_i e(A(\sigma_i), A(\tau_i)) < \varepsilon.$$

Par ailleurs:

On dit que la multiapplication A est à rétraction lipschitzienne de rapport ℓ sur I si la fonction numérique r est (finie et) lipschitzienne de rapport ℓ sur I .

Cela équivaut à

$$\forall [s, t] \subset I: e(A(s), A(t)) \leq (t-s)\ell.$$

Il faut et il suffit pour cela que A soit à rétraction localement absolument continue avec $\dot{r} \leq \ell$ presque partout.

Evidemment, si la multiapplication A est à variation localement absolument continue, au sens de la distance de Hausdorff, ce qui équivaut à l'existence d'une vitesse de variation \dot{v} , fonction positive appartenant à $L^1_{loc}(I)$, l'inégalité (3.6) fait qu'a fortiori A est à rétraction localement absolument continue, avec $\dot{r} \leq \dot{v}$ presque partout.

3e. Changement de variable.

Soit π une application surjective croissante (peut-être non strictement) d'un intervalle I' de \mathbf{R} sur l'intervalle I ; cette application est continue. On note naturellement $A \circ \pi$ la multiapplication $t' \mapsto A(\pi(t'))$ de I' dans E . Soit $[s', t'] \subset I'$; on vérifie immédiatement que

$$\text{ret}(A \circ \pi; s', t') = \text{ret}(A; \pi(s'), \pi(t')).$$

Par suite, si la fonction $r: I \rightarrow \mathbf{R}$ est rétraction indéfinie de A , la fonction $r \circ \pi$ est rétraction indéfinie de $A \circ \pi$.

Vient alors une propriété de factorisation:

PROPOSITION (3e). *Si la multiapplication A est à rétraction finie continue sur I , il existe une application c continue strictement croissante de I sur un intervalle J et une multiapplication L de J dans E , à rétraction lipschitzienne de rapport 1, telles que $A = L \circ c$.*

En effet, si la fonction r est finie et continue, l'application $c: t \mapsto t + r(t)$ est continue strictement croissante, donc bijective de I sur un intervalle J . Soit $[\sigma, \tau] \subset J$; posons $s = c^{-1}(\sigma)$, $t = c^{-1}(\tau)$. La multiapplication $L = A \circ c^{-1}$ donne lieu à l'inégalité

$$e(L(\sigma), L(\tau)) = e(A(s), A(t)) \leq r(t) - r(s) \leq \tau - \sigma.$$

REMARQUE. Dans le cas particulier où la fonction rétraction r est strictement croissante, il est possible de prendre $c = r$, ce qui fournit pour la multiapplication $L = A \circ c^{-1}$ une vitesse de rétraction partout égale à 1. Par contre, s'il existe un intervalle $[t_1, t_2]$ sur lequel la fonction r est constante

sans que A le soit, toute application croissante c assurant une factorisation de la forme $A = L \circ c$ enverra $[t_1, t_2]$ sur un intervalle non nul; la vitesse de rétraction de L sera nulle sur ce dernier intervalle.

La situation analogue concernant la *variation*, au sens de la distance de Hausdorff, est plus simple, du moins si l'on suppose A à valeurs *fermées*. Dans ce cas, en effet, la fonction v , variation indéfinie de A , supposée finie et continue, permet toujours une factorisation de la forme $A = L \circ v$ car, sur tout intervalle où v serait constante, la multiapplication A sera constante aussi; cette multiapplication L possède une *vitesse de variation* partout égale à 1.

3f. Cas d'un espace normé.

On suppose dans ce paragraphe que E est un espace vectoriel réel normé, et on introduit, comme en 2c, les *fonctions d'appui* de parties convexes de E .

PROPOSITION (3f). Soit $t \mapsto C(t)$ une multiapplication d'un intervalle I dans un espace vectoriel réel normé E , à valeurs convexes non vides; on note $y \mapsto \gamma(t, y)$ la fonction d'appui de $C(t)$ définie sur le dual topologique F de E . La multiapplication C est à rétraction finie (resp. à rétraction continue finie, resp. à rétraction absolument continue, resp. à rétraction lipschitzienne de rapport ℓ) si et seulement si il existe une fonction numérique croissante finie (resp. continue finie, resp. absolument continue, resp. lipschitzienne de rapport ℓ), soit $\varrho: I \rightarrow \mathbf{R}$, telle que pour tout $[s, t] \subset I$, on ait, avec la convention $\infty - \infty = -\infty$,

$$(3.9) \quad \forall y \in F: \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leq |y|(\varrho(t) - \varrho(s)),$$

ou, de façon équivalente,

$$(3.10) \quad \forall y \in B: \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leq \varrho(t) - \varrho(s),$$

B désignant la boule unité fermée (resp. ouverte) de F .

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (3.9) et (3.10) résulte de ce que les fonctions d'appui sont positivement homogènes.

Si la multiapplication C est à rétraction finie, la fonction croissante r définie en 3b fournit l'inégalité

$$e(C(s), C(t)) \leq r(t) - r(s),$$

done, en invoquant (2.8),

$$\forall y \in B: \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leq r(t) - r(s),$$

d'où (3.10) avec $r = \varrho$. Cela prouve la partie « seulement si » de la proposition.

Inversement, en invoquant (2.8), la condition (3.10) implique, pour tous les intervalles $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ déterminés par une subdivision de $[s, t]$,

$$e(C(\tau_{i-1}), C(\tau_i)) \leq \varrho(\tau_i) - \varrho(\tau_{i-1}).$$

Par suite, en revenant à la définition de la rétraction de C sur $[s, t]$,

$$r(t) - r(s) = \text{ret}(C; s, t) \leq \varrho(t) - \varrho(s).$$

Les propriétés évoquées pour ϱ dans l'énoncé impliquent donc ces mêmes propriétés pour r .

REMARQUE. La proposition ci-dessus montre que, si la multiapplication C est à rétraction finie, la multiapplication $t \mapsto \text{dom } \gamma(t, \cdot)$ de I dans F est (non strictement) *décroissante*.

4. - Limites à droite.

4a. Limite à droite d'une multiapplication à rétraction bornée.

Soit E un espace métrique; on suppose que la multiapplication $t \mapsto A(t) \subset E$ est définie au moins sur un intervalle ouvert à gauche $]t_1, t_2]$, à *rétraction bornée* sur cet intervalle. La fonction r , rétraction indéfinie de A , définie sur cet intervalle à partir d'un « point de repère » quelconque, est une fonction numérique croissante et minorée d'où l'existence du réel

$$(4.1) \quad \lim_{t \downarrow t_1} r(t) = \inf_{t \in]t_1, t_2]} r(t), \quad \text{noté } r^+(t_1).$$

Les notions générales de *limite inférieure* et de *limite supérieure* d'une famille d'ensembles (cf. C. BERGE [1]) se particularisent ici de la façon suivante: la limite inférieure de la multiapplication A à droite du point t_1 est l'ensemble (fermé, éventuellement vide):

$$(4.2) \quad \lim \cdot \inf_{t \downarrow t_1} A(t) = \{x \in E: \lim_{t \downarrow t_1} d(x, A(t)) = 0\};$$

la limite supérieure est l'ensemble (fermé, éventuellement vide, en tout cas contenant le précédent):

$$(4.3) \quad \lim_{t \downarrow t_1} \cdot \sup A(t) = \{x \in E: 0 \text{ est valeur d'adhérence de la fonction } t \mapsto d(x, A(t)) \text{ pour } t \downarrow t_1\}.$$

Autrement dit, x appartient à la limite inférieure (resp. supérieure) si et seulement si il existe une *sélection* de A , soit $t \mapsto u(t) \in A(t)$, admettant x comme limite (resp. valeur d'adhérence) pour $t \downarrow t_1$. On peut écrire aussi ($T \in]t_1, t_2]$ choisi indifféremment):

$$(4.4) \quad \lim_{t \downarrow t_1} \cdot \sup A(t) = \bigcap_{\theta \in]t_1, T[} \text{adh} \bigcup_{\tau \in]t_1, \theta]} A(\tau).$$

PROPOSITION (4a). *On suppose que la multiapplication A est à rétraction bornée sur $]t_1, t_2]$. Les ensembles (4.2) et (4.3) sont égaux à un ensemble (éventuellement vide) qu'on notera $A^+(t_1)$. Un ensemble B est contenu dans $A^+(t_1)$ si et seulement si*

$$(4.5) \quad \lim_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que, si on note A^1 l'ensemble limite supérieure écrit en (4.3), on a

$$(4.6) \quad \lim_{t \downarrow t_1} e(A^1, A(t)) = 0$$

et, plus précisément, pour tout $t \in]t_1, t_2]$,

$$(4.7) \quad e(A^1, A(t)) \leq r(t) - r^+(t_1)$$

(inégalité banalement vérifiée si $A^1 = \emptyset$), ce qui signifie que, pour tout $a \in A^1$,

$$(4.8) \quad d(a, A(t)) \leq \sup \{\text{ret}(A; \tau, t) : \tau \in]t_1, t]\}.$$

Soit $\varrho \in \mathbf{R}$, strictement inférieur au premier membre de (4.8); il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varrho + \varepsilon < d(a, A(t))$. Puisque $a \in A^1$, il existe $\tau \in]t_1, t]$ tel que $d(a, A(\tau)) < \varepsilon$, d'où

$$(4.9) \quad \varrho + d(a, A(\tau)) < d(a, A(t)).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire (2.5) aux trois ensembles $\{a\}$, $A(\tau)$ et $A(t)$, on a

$$d(a, A(t)) \leq d(a, A(\tau)) + e(A(\tau), A(t)) \leq d(a, A(\tau)) + \text{ret}(A; \tau, t).$$

Par addition avec (4.9), il vient $\varrho < \text{ret}(A; \tau, t)$, ce qui établit (4.8) (noter qu'on peut supposer ici les ensembles $A(\tau)$ et $A(t)$ non vides, sans quoi, en vertu de l'hypothèse de rétraction finie, la multiapplication A prendrait des valeurs vides sur un voisinage de t_1 , ce qui ramène au cas banal $A^+ = \emptyset$).

A fortiori, \mathbb{H}_\pm (4.6) entraîne, par l'inégalité triangulaire, que tout $B \subset A^+$ vérifie (4.5).

Inversement, un ensemble B vérifiant (4.5) est contenu dans l'ensemble limite inférieure écrit en (4.2), puisque pour tout $x \in B$ on a $d(x, A(t)) \leq e(B, A(t))$. En particulier, (4.6) montre que tel est le cas pour $B = A^+$ et cela achève la démonstration.

DÉFINITION. *On dira que la valeur commune $A^+(t_1)$ des ensembles (4.2) et (4.3) est la limite de la multiapplication A à droite du point t_1 (ensemble fermé, éventuellement vide).*

REMARQUE 1. Si E est un espace vectoriel normé et si les valeurs de A sont des ensembles *convexes*, on trouve aisément que $A^+(t_1)$ est convexe.

REMARQUE 2. Supposant toujours que la multiapplication A est définie et à rétraction bornée sur $]t_1, t_2]$, prolongeons-la en une multiapplication \hat{A} définie sur $[t_1, t_2]$ en choisissant pour $\hat{A}(t_1)$ une partie quelconque de E . On vérifie aisément que la condition $e(\hat{A}(t_1), A^+(t_1)) < +\infty$ est suffisante mais non nécessaire pour que la multiapplication \hat{A} soit à rétraction finie sur $[t_1, t_2]$.

REMARQUE 3. *Si les ensembles $A(t)$ sont contenus dans un compact fixe K , l'ensemble $A^+(t_1)$ est aussi limite de $A(t)$, au sens de la distance de Hausdorff, pour $t \downarrow t_1$. Il suffit pour le prouver d'établir*

$$\lim_{t \downarrow t_1} e(A(t), A^+(t_1)) = 0.$$

S'il n'en était pas ainsi, il existerait $\alpha > 0$ et une suite (τ_n) , convergeant vers t_1 dans $]t_1, t_2]$, telle que

$$e(A(\tau_n), A^+(t_1)) > \alpha.$$

Dans cette hypothèse, pour chaque n , on peut choisir $x_n \in A(\tau_n)$ tel que $d(x_n, A^+(t_1)) > \alpha$; la suite (x_n) , prenant ses valeurs dans K possède une valeur d'adhérence soit a . La continuité de la fonction $x \mapsto d(x, A^+(t_1))$ fait que $d(a, A^+(t_1)) \geq \alpha$. Mais a appartient à $A^+(t_1)$, en vertu, par exemple, de l'expression (4.4) de cet ensemble, d'où contradiction.

4b. *Saut de r à droite d'un point.*

On suppose maintenant que la multiapplication A est définie et à rétraction finie sur l'intervalle compact non réduit à un point $[t_1, t_2]$; on note r la fonction rétraction indéfinie construite à partir d'un point de repère quelconque.

L'écriture $t \downarrow t_1$ signifiera naturellement que t tend vers t_1 dans $]t_1, t_2]$. Comme la fonction r est croissante on est assuré de l'existence du réel

$$\lim_{t \downarrow t_1} \text{ret}(A; t_1, t) = r^+(t_1) - r(t_1) = \inf_{t \in]t_1, t_2]} \text{ret}(A; t_1, t) \geq 0.$$

Alors:

PROPOSITION (4b). *On a*

$$(4.10) \quad r^+(t_1) - r(t_1) = \lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) \leq e(A(t_1), A^+(t_1)).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$; il existe une subdivision de $[t_1, t_2]$, notons-la

$$t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_2,$$

telle que

$$\text{ret}(A; t_1, t_2) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)).$$

Si $t \in]t_1, \tau_1[$ il en résulte, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \text{ret}(A; t_1, t_2) &\leq \varepsilon + e(A(t_1), A(t)) + e(A(t), A(\tau_1)) + \sum_{i=2}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \\ &\leq \varepsilon + e(A(t_1), A(t)) + \text{ret}(A; t, t_2). \end{aligned}$$

De là l'implication

$$t \in]t_1, \tau_1[\Rightarrow \text{ret}(A; t_1, t) \leq \varepsilon + e(A(t_1), A(t))$$

et comme, essentiellement,

$$e(A(t_1), A(t)) \leq \text{ret}(A; t_1, t),$$

cela démontre l'égalité en (4.10).

Par ailleurs

$$e(A(t_1), A(t)) \leq e(A(t_1), A^+(t_1)) + e(A^+(t_1), A(t)).$$

Pour $t \downarrow t_1$, $t \in]t_1, t_2]$, le dernier terme tend vers zéro d'après la Proposition 4a; cela établit l'inégalité en (4.10) (noter qu'elle est banale si $A(t_1)$ ou $A^+(t_1)$ sont vides).

REMARQUE. L'exemple suivant montre que l'inégalité en (4.10) peut être stricte. On prend pour E la réunion du demi-plan ouvert $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x > 0\}$ et des deux points $p = (0, 1)$ et $q = (0, -1)$; on munit E de la distance euclidienne de \mathbf{R}^2 . On définit

$$A(t) = \begin{cases} \{(x, y) \in E: x = t - t_1, y \geq 0\} & \text{si } t > t_1 \\ \{q\} & \text{si } t = t_1 \end{cases}$$

qui est bien une multiapplication à rétraction finie. On trouve $A^+(t_1) = \{p\}$, d'où $e(A(t_1), A^+(t_1)) = 2$ et

$$\lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) = 1.$$

4c. *Continuité de la fonction r à droite.*

PROPOSITION (4c). *Si la multiapplication A de $[t_1, t_2]$ dans l'espace métrique E est à rétraction finie, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- i) *La fonction numérique r est continue à droite au point t_1 .*
- ii) $\lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) = 0$.
- iii) $A(t_1) \subset A^+(t_1)$.

iv) *La famille de fonctions numériques $t \mapsto d(a, A(t))$ est équi-semi-continue supérieurement à droite au point t_1 , c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\theta \in]t_1, t_2]$ tel que*

$$\forall t \in [t_1, \theta[, \quad \forall a \in E: d(a, A(t)) \leq d(a, A(t_1)) + \varepsilon$$

(propriétés banales si $A(t_1) = \emptyset$).

DÉMONSTRATION. L'équivalence de i) et ii) résulte de la Proposition (4b); l'équivalence de ii) et iii) résulte de la Proposition (4a).

Que ii) entraîne iv) résulte de l'inégalité triangulaire

$$d(a, A(t)) \leq d(a, A(t_1)) + e(A(t_1), A(t)).$$

Inversement, supposer iv) fournit, en prenant $a \in A(t_1)$,

$$\forall t \in [t_1, \theta[: \sup_{a \in A(t)} d(a, A(t)) \leq \varepsilon$$

d'où ii).

COROLLAIRE (4c). *Si la fonction r est continue à droite au point t_1 , la multi-application A est semi-continue inférieurement à droite au point t_1 , dans le sens classique suivant: pour tout ouvert Ω tel que $\Omega \cap A(t_1) \neq \emptyset$, il existe $\theta \in]t_1, t_2]$ tel que*

$$\forall t \in [t_1, \theta[: \Omega \cap A(t) \neq \emptyset.$$

Si on fait l'hypothèse additionnelle que l'ensemble $A(t_1)$ est précompact, cette semi-continuité inférieure implique réciproquement la continuité de r à droite au point t_1 .

En effet, si $\Omega \cap A(t_1) \neq \emptyset$, il existe β , boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ de centre $a \in A(t_1)$, contenue dans Ω . Si la propriété ii) a lieu, il existe $\theta \in]t_1, t_2]$ tel que

$$t \in [t_1, \theta[\Rightarrow e(A(t_1), A(t)) < \varepsilon \Rightarrow d(a, A(t)) < \varepsilon \Rightarrow \beta \cap A(t) \neq \emptyset.$$

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$; on suppose $A(t_1)$ précompact: il existe un recouvrement de cet ensemble par une famille finie de boules ouvertes β_i , de rayon $\leq \varepsilon/2$. Si la multi-application A est s.c.i. à droite au point t_1 , il existe pour chaque β_i d'intersection non vide avec $A(t_1)$ un $\theta_i \in]t_1, t_2]$ tel que $t \in [t_1, \theta_i[$ assure $\beta_i \cap A(t) \neq \emptyset$; donc pour ces valeurs de t on a

$$\forall a \in \beta_i : d(a, A(t)) < \varepsilon.$$

Comme les β_i forment un recouvrement de $A(t_1)$, on voit qu'en prenant pour θ le plus petit des θ_i , on a l'implication

$$t \in]t_1, \theta[\Rightarrow \sup_{a \in A(t_1)} d(a, A(t)) \leq \varepsilon$$

d'où la propriété ii) de la Proposition (4c).

4d. Hypothèses de compacité.

On sera conduit plusieurs fois dans la suite à faire l'une des trois hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSE H₁. *L'espace métrique E est tel que les boules fermées soient compactes.*

HYPOTHÈSE H_2 . E est l'espace de Banach dual d'un espace normé X et on suppose que les valeurs de la multiapplication A sont des ensembles fermés pour la topologie faible $\sigma(E, X)$.

HYPOTHÈSE H_3 . L'espace métrique E est complet et les valeurs de la multiapplication A sont des ensembles compacts.

PROPOSITION (4d). Soit $t_1 < t_2$; on fait l'une des trois hypothèses ci-dessus et on suppose que la multiapplication A est à rétraction bornée sur l'intervalle $]t_1, t_2]$. Alors pour toute partie B de E , on a

$$(4.11) \quad \lim_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) = e(B, A^+(t_1)).$$

Dans l'hypothèse H_2 , l'ensemble $A^+(t_1)$ est fermé pour $\sigma(E, X)$; dans l'hypothèse H_3 , cet ensemble est compact, d'ailleurs non vide si les $A(t)$ sont non vides.

DÉMONSTRATION. On observe d'abord que

$$e(B, A(t)) \leq e(B, A^+(t_1)) + e(A^+(t_1), A(t));$$

la Proposition 4a montre que le dernier terme a pour limite zéro, d'où

$$\limsup_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) \leq e(B, A^+(t_1)).$$

On va établir par ailleurs que

$$\liminf_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) \geq e(B, A^+(t_1))$$

(tout est trivial si $B = \emptyset$) en prouvant que, pour tout $b \in E$,

$$(4.12) \quad \liminf_{t \downarrow t_1} d(b, A(t)) \geq d(b, A^+(t_1)).$$

La démonstration est superflue pour tout b tel que le premier membre de (4.12) vaille $+\infty$ (noter en passant que l'existence d'un tel b exige $A^+(t_1) = \emptyset$; en effet, pour $a \in A^+(t_1)$, on a $d(b, A(t)) \leq d(b, a) + d(a, A(t))$ et le dernier terme tend vers zéro, d'après la Proposition 4a). Soit $\varrho \in \mathbf{R}$ strictement supérieur à ce premier membre; cela veut dire, en appelant β la boule fermée de centre b , de rayon ϱ , qu'il existe une suite infinie décroissante (τ_n) d'éléments de $]t_1, t_2]$, tendant vers t_1 , et une suite (x_n) telle que $x_n \in A(\tau_n) \cap \beta$.

Cas de l'hypothèse H_1 . La boule β étant compacte la suite (x_n) possède au moins une valeur d'adhérence, soit x , laquelle appartient à cette boule et aussi à la limite supérieure de $A(t)$ pour $t \downarrow t_1$, c'est-à-dire $A^+(t_1)$; donc $\rho \geq d(b, A^+(t_1))$ et cela établit (4.12).

Cas de l'hypothèse H_2 . La boule β est, dans ce cas, compacte pour la topologie faible $\sigma(E, X)$; la suite (x_n) possède donc une valeur d'adhérence faible, soit x , qui appartient à la *limite supérieure faible* de $A(t)$ pour $t \downarrow t_1$, c'est-à-dire à l'ensemble

$$(4.13) \quad \sigma\text{-lim} \cdot \sup_{t \downarrow t_1} A(t) = \bigcap_{\theta > t_1} \sigma\text{-adh} \bigcup_{\tau \in]t_1, \theta[} A(\tau).$$

On termine en prouvant que cet ensemble, a priori plus grand que $A^+(t_1)$, lui est en fait égal. Plus précisément, pour tout a dans l'ensemble en question et tout t dans $]t_1, t_2]$, montrons que

$$(4.14) \quad d(a, A(t)) \leq r(t) - r^+(t_1)$$

(inégalité triviale si le premier membre est nul). En effet, soit $k \geq 0$ strictement inférieur à $d(a, A(t))$, c'est-à-dire que, en notant α la boule fermée centrée à l'origine, de rayon k , on a $(a - \alpha) \cap A(t) = \emptyset$, ce qui équivaut à $a \notin \alpha + A(t)$. Or l'ensemble $\alpha + A(t)$ est $\sigma(E, X)$ -fermé puisqu'il en est ainsi pour $A(t)$, par hypothèse, et que la boule α est $\sigma(E, X)$ -compacte. Il existe donc un $\sigma(E, X)$ -voisinage de a , soit V , ne rencontrant pas $\alpha + A(t)$; alors:

$$(4.15) \quad \forall y \in V: d(y, A(t)) \geq k.$$

Puisque a appartient à l'ensemble (4.13) il existe $\tau \in]t_1, t]$ tel que $V \cap A(\tau) \neq \emptyset$. En choisissant y dans $V \cap A(\tau)$, (4.15) montre que

$$k \leq e(A(\tau), A(t)) \leq \text{ret}(A; \tau, t) \leq r(t) - r^+(t_1)$$

ce qui établit (4.14).

Cas de l'hypothèse H_3 . On établit cette fois l'existence d'une valeur d'adhérence forte de la suite (x_n) en prouvant que l'ensemble

$$K = \text{adh} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(\tau_n)$$

est compact. Comme E est complet il suffit de montrer que la réunion des $A(\tau_n)$ est précompacte, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, cette réunion peut

être recouverte par une famille finie de boules de rayon ε . De fait, il existe m tel que $r(\tau_m) - r^+(t_1) < \varepsilon/2$; alors, pour tout $n \geq m$ on a

$$e(A(\tau_n), A(\tau_m)) \leq r(\tau_m) - r(\tau_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après l'hypothèse, on peut recouvrir $A(\tau_m)$ par une famille finie de boules de rayon $\varepsilon/2$. Pour tout $x \in A(\tau_n)$, si $n \geq m$, on a $d(x, A(\tau_m)) < \varepsilon/2$; donc x est contenu dans une des boules de rayon ε concentriques aux précédentes. Ainsi est recouverte la réunion des $A(\tau_n)$, $n \geq m$; par ailleurs la réunion des $A(\tau_n)$, $n < m$, est compacte, donc recouverte aussi par une famille finie de boules de rayon ε .

Tout point de l'ensemble (fermé) $A^+(t_1)$ étant limite d'une sélection de A , cet ensemble est contenu dans K , donc compact. Si les valeurs de A sont non vides, on peut choisir une suite (x_n) telle que $x_n \in A(\tau_n) \subset K$: toute valeur d'adhérence de cette suite appartient à $A^+(t_1)$, qui est donc non vide.

COROLLAIRE 1 (4d). *Avec les mêmes hypothèses que dans la Proposition ci-dessus, on suppose qu'il existe $\theta \in]t_1, t_2]$ tel que $A(\theta)$ soit borné (ce qui est automatiquement assuré dans l'hypothèse H_3) et on suppose que les valeurs de A sont non vides. Alors $A^+(t_1)$ est non vide.*

En effet, il existe une boule (centre c , rayon R) contenant $A(\theta)$; pour $t \in]t_1, \theta]$ et $x \in A(t)$ on a

$$\begin{aligned} d(x, c) &\leq e(\{x\}, A(\theta)) + e(A(\theta), \{c\}) \\ &\leq e(A(t), A(\theta)) + R \leq r(\theta) - r(t) + R. \end{aligned}$$

Comme $A(t)$ est non vide, il en résulte

$$d(c, A(t)) \leq r(\theta) - r^+(t_1) + R.$$

Le premier membre de (4.11), écrit en prenant $B = \{c\}$, est donc différent de $+\infty$.

La Proposition (4d) nous sera surtout utile dans la suite par cet autre corollaire:

COROLLAIRE 2 (4d). *On fait l'une des trois hypothèses H_1 , H_2 ou H_3 et on suppose que la multiapplication A est à rétraction finie sur $[t_1, t_2]$, avec $A(t_1) \neq \emptyset$. Alors*

$$(4.16) \quad r^+(t_1) - r(t_1) = \lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) = e(A(t_1), A^+(t_1)).$$

Il suffit, en effet, de rapprocher (4.10) et (4.11). Noter que $A(t)$ est alors non vide pour tout $t \in [t_1, t_2]$, de même que $A^+(t_1)$.

4e. *Remarques sur les limites à gauche.*

Les limites à gauche ne semblent pas avoir, dans les applications de la théorie de la rétraction, la même utilité que les limites à droite. Signalons simplement les faits suivants, en renvoyant pour les démonstrations à Moreau [5] et [11].

Si A est une multiapplication à rétraction bornée d'un intervalle $[t_0, t_1[$ dans un espace métrique E , on a

$$\lim_{\uparrow t_1} \cdot \inf A(t) = \lim_{\uparrow t_1} \cdot \sup A(t) ;$$

notons $A^-(t_1)$ cette valeur commune, éventuellement vide.

Si A est à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$, on a

$$(4.17) \quad e(A^-(t_1), A(t_1)) \leq r(t_1) - r^-(t_1) = \lim_{\uparrow t_1} e(A(t), A(t_1)).$$

La fonction r est donc continue à gauche si et seulement si

$$(4.18) \quad \lim_{\uparrow t_1} e(A(t), A(t_1)) = 0.$$

Cela équivaut d'ailleurs à l'équi-semi-continuité inférieure à gauche au point t_1 pour la famille de fonctions numériques $t \mapsto d(a, A(t))$, $a \in E$. C'est ce qui a lieu, en particulier lorsque la multiapplication A est semi-continue supérieurement dans le sens classique suivant: pour tout Ω , ouvert contenant $A(t_1)$, il existe $\tau \in [t_0, t_1[$ tel que

$$t \in [\tau, t_1] \Rightarrow A(t) \subset \Omega.$$

Si on fait l'hypothèse additionnelle que $A(t_1)$ est compact, cette semicontinuité supérieure implique inversement (4.18).

Venons-en au cas où l'espace métrique E est *complet*. Si A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$, on trouve dans ce cas

$$(4.19) \quad \forall t \in [t_0, t_1[: e(A(t), A^-(t_1)) \leq r^-(t_1) - r(t).$$

Par suite $A^-(t_1)$ est non vide, à moins que $A(t)$ ne soit partout vide. Si A est à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$, le premier membre de (4.17) est égal aux deux autres; on voit donc que (4.18) équivaut dans ce cas à $A^-(t_1) \subset \text{adh } A(t_1)$. Une autre conséquence de (4.19) est que, si E est complet et si la multiapplication A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$, on a pour tout $B \subset E$

$$\lim_{\uparrow t_1} e(A(t), B) = e(A^-(t_1), B).$$

5. – Approximations et sélections.

5a. Multiapplications localement en escalier.

Soit I un intervalle de \mathbf{R} . On notera $\mathfrak{F}(I)$ l'ensemble des partitions de I en sous-intervalles de forme quelconque (ouverts, fermés ou semi-ouverts, certains d'entre-eux éventuellement réduits à des points), partitions qui soient *localement finies* dans le sens suivant: toute partie compacte de I est recouverte par un nombre fini d'intervalles de la partition considérée.

On définit une *relation d'ordre* sur $\mathfrak{F}(I)$ en écrivant $P \leq P'$ si P' est un *raffinement* de P , c'est-à-dire si tout intervalle de P' est contenu dans un intervalle P . Cet ordre est visiblement *filtrant* à droite.

Une application ou une multiapplication définie sur I est dite *localement en escalier* s'il existe une partition $P \in \mathfrak{F}(I)$ sur chaque intervalle de laquelle cette application ou multiapplication est constante.

Dans toute la suite on supposera, pour alléger, que l'intervalle I possède une origine, soit t_0 , et la contient. En ce cas, les intervalles constituant une partition $P \in \mathfrak{F}(I)$ peuvent être munis d'une indexation dans \mathbf{N} correspondant à leur succession dans \mathbf{R} : on les notera par exemple

$$(5.1) \quad P: I_0, I_1, \dots, I_i, \dots$$

et on notera t_i l'origine de l'intervalle I_i , appartenant ou non à cet intervalle (évidemment l'origine de I_0 coïncide avec l'origine de I , déjà notée t_0).

Si A_P est une multiapplication localement en escalier de I dans l'espace métrique E , constante sur chacun des intervalles de la partition P , on évalue comme suit la *rétraction* de A_P sur tout sous-intervalle compact $[s, t]$ de I . Soient J_0, J_1, \dots, J_m , indexés selon leur ordre de succession dans \mathbf{R} , ceux des intervalles $[s, t] \cap I_i$ qui sont non vides; choisissons arbitrairement un élément σ_j dans chaque J_j . Toute subdivision de $[s, t]$ possède un raffinement dont les σ_j sont des noeuds; on peut donc construire $\text{ret}(A_P; s, t)$ à partir de subdivisions de cette sorte, et cela laisse finalement

$$(5.2) \quad \text{ret}(A_P; s, t) = \sum_{j=1}^m e(A_P(\sigma_{j-1}), A_P(\sigma_j))$$

(expression à interpréter comme nulle si $m = 0$).

5b. Ensemble des débuts.

On dira que deux sous-intervalles J et J' de I ont *même début* s'ils ont même origine et, tous les deux, soit contiennent soit excluent cette origine.

Il s'agit visiblement là d'une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-intervalles non vides de I : l'ensemble quotient s'appellera *ensemble des débuts* associé à I et noté $D(I)$. Soit $b \in D(I)$; tout intervalle J appartenant à la classe b possède la même origine; appelons-la $t \in I$; on dira que t est *l'origine de b* et, naturellement, que b est *le début de J* . Notations:

$$t = \text{ori } b, \quad b = \text{déb } J.$$

Par abus de langage disons que $b = \text{déb } J$ est un *début ouvert* (resp. un *début fermé*) si l'intervalle J est ouvert à gauche (resp. fermé à gauche).

On munit $D(I)$ d'une relation d'ordre total: pour b et b' éléments de $D(I)$, on écrit $b \leq b'$ s'il existe un intervalle de début b' contenu dans un intervalle de début b .

Soit f une application (resp. multiapplication) définie sur I et possédant en chaque point t de I une limite à droite, notée $f^+(t)$. On notera \hat{f} l'extension de f à $D(I)$ définie par

$$\hat{f}(b) = \begin{cases} f(\text{ori } b) & \text{si } b \text{ est en début fermé} \\ f^+(\text{ori } b) & \text{si } b \text{ est un début ouvert.} \end{cases}$$

Lorsque, par exemple, f est une fonction numérique croissante (au sens large) pour l'ordre de I , l'extension \hat{f} est croissante (au sens large) pour l'ordre de $D(I)$.

Avec ces notations:

PROPOSITION (5b). *Si la multiapplication A est à rétraction finie sur I et si est vérifiée l'une des hypothèses H_1 , H_2 ou H_3 du § 4d, on a l'implication*

$$(5.3) \quad b \leq b' \Rightarrow e(\hat{A}(b), \hat{A}(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b).$$

DÉMONSTRATION. Soit $t = \text{ori } b$, $t' = \text{ori } b'$. Si b et b' sont des débuts fermés, (5.3) se réduit à une propriété banale de $\text{ret}(A; t, t')$. Si b est ouvert et b' fermé on a, quel que soit $\tau \in]t, t']$,

$$\begin{aligned} e(\hat{A}(b), \hat{A}(b')) &= e(A^+(t), A(t')) \leq e(A^+(t), A(\tau)) + e(A(\tau), A(t')) \leq \\ &\leq e(A^+(t), A(\tau)) + r(t') - r(\tau). \end{aligned}$$

Lorsque $\tau \downarrow t$, le premier terme du dernier membre tend vers zéro, d'après la Proposition 4a, et $r(\tau)$ tend vers $r^+(t) = \hat{r}(b)$ d'où encore (5.3). C'est seulement lorsque b' est ouvert qu'entrent en jeu les hypothèses H_1 , H_2 ou H_3 .

Dans ce cas, soit b'' le début fermé de même origine t' que b' ; on a $b \leq b'' < b'$ et

$$e(\hat{A}(b), \hat{A}(b')) \leq e(\hat{A}(b), \hat{A}(b'')) + e(\hat{A}(b''), \hat{A}(b')).$$

Le premier terme du second membre rentre dans les cas qu'on vient d'examiner, donc est majoré par $\hat{r}(b'') - \hat{r}(b)$, tandis que, d'après le Corollaire 2 (4d), le dernier terme est égal à

$$e(A(t'), A^+(t')) = r^+(t') - r(t') = \hat{r}(b') - \hat{r}(b''),$$

d'où (5.3) par addition.

5c. Approximantes localement en escalier.

NOTATION. — Soit f une application (resp. multiapplication) définie sur I et possédant en chaque point $t \in I$ une limite à droite $f^+(t)$. Soit $P \in \mathfrak{F}(I)$; on notera f_P l'application (resp. multiapplication) localement en escalier qui prend sur chaque intervalle I_i de P la valeur constante

$$(5.4) \quad f_P(I_i) = \hat{f}(\text{déb } I_i).$$

Autrement dit $f_P(I_i) = f(t_i)$ si I_i contient son origine t_i et $f_P(I_i) = f^+(t_i)$ sinon. Alors:

LEMME 1 (5c). Pour tout $t \in I_i$

$$(5.5) \quad e(A_P(t), A(t)) \leq \sup \{ \text{ret}(A; \sigma, \tau) : [\sigma, \tau] \subset I_i \}.$$

En effet, le premier membre n'est autre que $e(\hat{A}(\text{déb } I_i), \hat{A}(\text{déb } [t]))$; comme $[t]$ est un intervalle fermé on se trouve dans le cas banal où (5.3) a lieu sans aucune des hypothèses « H ». Ce premier membre est donc majoré par

$$\hat{r}(\text{déb } [t]) - \hat{r}(\text{déb } I_i) = r(t) - r_P(I_i)$$

évidemment majoré par le second membre.

LEMME 2 (5c). Si l'une des hypothèses H_1 , H_2 ou H_3 est satisfaite, on a pour tout $[s, t] \subset I$

$$(5.6) \quad \text{ret}(A_P; s, t) \leq r_P(t) - r_P(s).$$

Notons I_p, I_{p+1}, \dots, I_q ceux des membres de la partition P qui ont une intersection non vide avec $[s, t]$; comme $A_P(I_i) = \hat{A}(\text{déb } I_i)$, on a, par (5.2),

$$\text{ret}(A_P; s, t) = \sum_{i=p+1}^q e(\hat{A}(\text{déb } I_{i-1}), \hat{A}(\text{déb } I_i)),$$

somme à interpréter comme nulle si $p = q$; il n'y a qu'à appliquer (5.3) à chaque terme de cette somme et ajouter.

Observons par ailleurs que le second membre de (5.5) constitue l'oscillation de la fonction r sur l'intervalle I_i ; pour l'exploitation du Lemme 2, on utilisera:

LEMME 3 (5c). *Soit une partition localement finie de \mathbf{R} en intervalles de longueur inférieure ou égale à ε . Les images réciproques par r des membres de cette partition sont des sous-intervalles de I ; ceux de ces sous-intervalles qui sont non vides constituent une partition localement finie $P \in \mathfrak{F}(I)$; sur chacun d'entre eux, l'oscillation de la fonction r est $\leq \varepsilon$.*

Vérification immédiate, puisque r est une fonction (non strictement) croissante.

Vient alors la propriété d'approximation « à gauche »:

PROPOSITION (5c). *On suppose satisfaite l'une des hypothèses H_1, H_2 ou H_3 . Soit $P \in \mathfrak{F}(I)$ une partition sur chaque intervalle de laquelle l'oscillation de r est $\leq \varepsilon$. Alors:*

$$(5.7) \quad \forall t \in I: \quad e(A_P(t), A(t)) \leq \varepsilon,$$

$$(5.8) \quad \forall [s, t] \subset I: \text{ret}(A_P; s, t) \leq \text{ret}(A; s, t) + \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité (5.7) résulte immédiatement du Lemme 1. En reprenant d'autre part les mêmes notations que dans la démonstration du Lemme 2, on a $t \in I_q$ donc

$$r_P(t) = r(\text{déb } I_q) \leq r(t)$$

et $s \in I_p$ donc

$$r(s) - r_P(s) \leq \varepsilon,$$

d'où (5.8) en invoquant le Lemme 2.

REMARQUE. Si s se trouve être l'origine d'un des intervalles I_i de la partition P et appartient à cet intervalle, on peut omettre le terme ε au second membre de (5.8). Tel est le cas, en particulier, pour $s = t_0$.

5d. *Théorème de sélection.*

PROPOSITION (5d). *Soit, comme précédemment, I un intervalle de \mathbf{R} contenant son origine t_0 et soit A une multiapplication à rétraction finie de I dans E , à valeurs fermées; on fait l'une des hypothèses H_1 , H_2 ou H_3 . Alors, quel que soit $a_0 \in A(t_0)$, il existe une sélection $t \mapsto u(t) \in A(t)$ de la multiapplication A telle que $u(t_0) = a_0$ et que*

$$(5.9) \quad \forall [s, t] \subset I: \text{var}(u; s, t) \leq \text{ret}(A; s, t).$$

DÉMONSTRATION. L'énoncé est sans objet si $A(t_0)$ est vide; on suppose donc $A(t_0) \neq \emptyset$, d'où $A(t) \neq \emptyset$ pour tout $t \in I$.

D'après le Lemme 3(5c), pour tout entier $n > 0$ il existe une partition $P(n) \in \mathcal{P}(I)$ sur chaque intervalle de laquelle l'oscillation de la fonction r est inférieure ou égale à $1/n$. Utilisant le fait que l'ordre de $\mathcal{P}(I)$ est filtrant à droite on peut en outre obtenir que la suite des partitions $P(n)$ soit (non strictement) croissante. Supposons la suite construite de la sorte; si $b \in D(I)$ est le début d'un des intervalles constituant $P(n_0)$, cet élément b est aussi, pour tout $n \geq n_0$, le début d'un des intervalles de $P(n)$. Notons $B \subset D(I)$ l'ensemble des débuts de tous les intervalles constituant les $P(n)$, pour n parcourant l'ensemble \mathbf{N}^* des entiers > 0 : chaque $b \in B$ figure ainsi comme début d'un intervalle pour toutes les partitions $P(n)$ à partir d'une valeur de n convenable.

Pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$, notons $b_0^n, b_1^n, \dots, b_i^n, \dots$ les débuts des intervalles constituant $P(n)$, indexés dans l'ordre croissant, ce qui fait que $b_0^n = \text{deb}[t_0]$. Définissons sur cet ensemble d'éléments de B une fonction u_n , à valeurs dans E , par la récurrence suivante: On prend $u_n(b_0^n) = a_0$ puis, de proche et proche, $u_n(b_{i+1}^n)$ est choisi dans l'ensemble $\hat{A}(b_{i+1}^n)$ de manière que

$$(5.10) \quad d(u_n(b_i^n), u_n(b_{i+1}^n)) = d(u_n(b_i^n), \hat{A}(b_{i+1}^n)).$$

Les hypothèses H_1 , H_2 ou H_3 assurent classiquement qu'un tel choix est possible (existence de « points proximaux » dans l'ensemble non vide $\hat{A}(b_{i+1}^n)$). Si b et b' sont les débuts de deux intervalles consécutifs de $P(n)$, il résulte de (5.3) et (5.10) que

$$\begin{aligned} d(u_n(b), u_n(b')) &= d(u_n(b), \hat{A}(b')) \\ &\leq e(A(b), \hat{A}(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b). \end{aligned}$$

Par addition, il vient que cette même inégalité

$$(5.11) \quad d(u_n(b), u_n(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b)$$

est vraie encore si $b \leq b'$ sont les débuts de deux intervalles quelconques de $P(n)$.

Cas de l'hypothèse H_3 . Convenons dans ce cas d'étendre u_n en une fonction définie sur l'ensemble B tout entier: si $b \in B$ n'est pas le début d'un des intervalles de $P(n)$, on attribue à $u_n(b)$ une valeur choisie arbitrairement dans $\hat{A}(b)$. Ainsi u_n est une sélection de \hat{A} , autrement dit un élément de l'espace produit

$$\prod_{b \in B} \hat{A}(b).$$

Dans l'hypothèse H_3 , les $\hat{A}(b)$ sont compacts, en vertu de la Proposition (4d), donc cet espace, muni de la topologie produit est compact, d'après Tychonoff. Pour la topologie produit, la suite (u_n) possède donc au moins une valeur d'adhérence, soit $\tilde{u}: B \rightarrow E$.

Montrons que

$$(5.12) \quad b \leq b' \Rightarrow d(\tilde{u}(b), \tilde{u}(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b).$$

Soit $\varepsilon > 0$; puisque \tilde{u} est valeur d'adhérence de (u_n) , il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} d(\tilde{u}(b), u_n(b)) &\leq \varepsilon \\ d(\tilde{u}(b'), u_n(b')) &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

et cet n peut être pris assez grand pour que b et b' soient les débuts d'intervalles de $P(n)$. Vu (5.11), on obtient donc

$$d(\tilde{u}(b), \tilde{u}(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b) + 2\varepsilon$$

d'où (5.12) puisque ε être choisi arbitrairement.

A partir de \tilde{u} on construit maintenant la fonction $u: I \rightarrow E$ attendue. Soit $t \in I$; notons $b_n \in B$ le début de l'intervalle de $P(n)$ contenant t ; l'oscillation de r sur cet intervalle étant moindre que $1/n$ on a

$$(5.13) \quad 0 \leq r(t) - \hat{r}(b_n) \leq \frac{1}{n}.$$

En rapprochant de (5.12), on conclut que la suite des $\tilde{u}(b_n)$ est de Cauchy dans E ; soit $u(t)$ sa limite. Evidemment $u(t_0) = \tilde{u}(\text{déb}[t_0]) = a_0$.

Montrons que $u(t) \in A(t)$. Comme $\tilde{u}(b_n) \in \hat{A}(b_n)$ on a, vu (5.13),

$$d(\tilde{u}(b_n), A(t)) \leq e(\hat{A}(b_n), A(t)) \leq r(t) - \hat{r}(b_n) \leq \frac{1}{n}$$

donc, à la limite, $d(u(t), A(t)) = 0$.

Enfin, pour établir (5.9) il suffit de prouver que, pour tout sous-intervalle compact $[t, t']$ de I on a

$$d(u(t), u(t')) \leq r(t') - r(t).$$

Avec la même définition de b_n que ci-dessus et en notant par ailleurs b'_n le début de l'intervalle de $P(n)$ contenant t' (évidemment $b_n \leq b'_n$ puisque $t \leq t'$) on applique (5.12):

$$d(\tilde{u}(b_n), \tilde{u}(b'_n)) \leq \hat{r}(b'_n) - \hat{r}(b_n).$$

Pour $n \rightarrow +\infty$, le premier membre tend vers $d(u(t), u(t'))$ et le second membre tend vers $r(t') - r(t)$ d'après (5.13).

Cas de l'hypothèse H_1 . C'est, cette fois, la compacité des boules fermées de E qu'il faudra invoquer. Remplaçant, en (5.11), b' par b et b par $b_0^n = \text{déb}[t_0]$ on obtient que, si b est le début d'un des intervalles de $P(n)$, le point $u_n(b)$ appartient à la boule fermée de centre a_0 , de rayon $\hat{r}(b) - r(t_0)$. Notons $\beta(b)$ cette boule et convenons maintenant d'étendre u_n en une fonction définie sur l'ensemble B tout entier de la façon suivante: si b n'est pas le début d'un des intervalles de $P(n)$ on attribue à $u_n(b)$ une valeur arbitrairement choisie dans $\beta(b)$. Alors u_n est une sélection de la multiapplication $\beta: B \rightarrow E$, c'est-à-dire que les u_n constituent une suite de points de l'espace produit

$$\prod_{b \in B} \beta(b)$$

lequel est compact d'après Tychonoff. On note \tilde{u} une valeur d'adhérence de cette suite et la démonstration s'achève comme précédemment, car l'hypothèse H_1 entraîne que E est complet.

Cas de l'hypothèse H_2 . Avec les mêmes notations que dans le cas précédent, on a seulement la compacité des boules $\beta(b)$ pour la topologie faible $\sigma(E, X)$. On obtient donc l'existence d'une valeur d'adhérence \tilde{u} de la suite (u_n) au sens de la topologie produit des topologies faibles des espaces facteurs $\beta(b)$, c'est-à-dire la topologie de la convergence simple faible pour les fonctions définies sur B , à valeurs dans E .

Etablissons (5.12) dans ce nouveau cadre. Soit W un voisinage de l'origine dans E pour la topologie $\sigma(E, X)$; il en existe alors un autre, soit V , tel que $V + V \subset W$. Puisque \tilde{u} est valeur d'adhérence de la suite (u_n) , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$u_n(b) - \tilde{u}(b) \in V$$

$$\tilde{u}(b') - u_n(b') \in V$$

et cet n peut être pris assez grand pour que b et b' soient les débuts d'intervalles de $P(n)$. Par ailleurs, en appelant γ la boule fermée contrée à l'origine, de rayon $\hat{r}(b') - \hat{r}(b)$, (5.11) s'écrit

$$u_n(b') - u_n(b) \in \gamma.$$

Par addition on obtient donc

$$\tilde{u}(b') - \tilde{u}(b) \in V + V + \gamma \subset W + \gamma$$

quel que soit W . Comme la boule γ est fermée pour la topologie $\sigma(E, X)$, on conclut que $\tilde{u}(b') - \tilde{u}(b) \in \gamma$, c'est-à-dire (5.12).

La démonstration s'achève comme précédemment.

COROLLAIRE (5d). *On suppose que E est un espace métrique quelconque et que la multiapplication A , à rétraction finie de I dans E , a ses valeurs compactes. Alors, quel que soit $a_0 \in A(t_0)$, il existe une sélection u de A telle que $u(t_0) = a_0$ et satisfaisant (5.9).*

En effet, l'immersion de E dans son complété étant une isométrie, on se ramène à la Proposition précédente, cas de l'hypothèse H_3 .

5e. Cas d'un espace de Banach ou d'un espace normé quelconque.

Les hypothèses H_1 et H_2 mettent en jeu la compacité des boules fermées, respectivement pour la topologie métrique de E , puis pour la topologie $\sigma(E, X)$, E étant dans ce second cas le dual d'un espace normé X . Par contre, la compacité invoquée dans l'hypothèse H_3 concerne les valeurs de la multiapplication A , cela au sens de la topologie métrique de E . Il aurait semblé naturel, pour faire pendant à l'hypothèse H_2 , d'envisager systématiquement aussi:

HYPOTHÈSE H_4 . *E est un espace de Banach et les valeurs de la multiapplication A sont des ensembles compacts pour la topologie faible.*

En fait on va voir que ce cas se ramène immédiatement à celui de l'hypothèse H_2 .

PROPOSITION (5e). *La Proposition (4d) et ses Corollaires, le Lemme 2 (5c), les Propositions 5c et 5d sont également vraies si l'on substitue l'hypothèse H_4 aux hypothèses H_1 , H_2 ou H_3 .*

DÉMONSTRATION. Appelons X le dual topologique de l'espace de Banach E et interprétons l'injection canonique de E dans le dual topologique E'' de X comme un plongement. Alors A peut aussi bien s'interpréter comme une

multiapplication dans E'' , avec les mêmes valeurs pour les excès et les rétractions, puisque le plongement de E dans E'' est isométrique. Comme E est fermé dans E'' pour la topologie de la norme, tout ensemble limite tel que $A^+(t_1)$ est aussi le même dans les deux points de vue: en effet, les points de $A^+(t_1)$ sont caractérisés comme les limites de sélections de A pour $t \downarrow t_1$. La topologie $\sigma(E'', X)$ induit sur E la topologie $\sigma(E, X)$; si donc on fait l'hypothèse H_4 , les $A(t)$ sont compacts pour $\sigma(E'', X)$, donc fermés pour cette topologie: on est ainsi ramené à l'hypothèse H_2 , vis-à-vis de l'espace E'' , dual de l'espace normé X .

Noter aussi que, si A est à rétraction bornée sur $]t_1, t_2]$, on a par l'inégalité (4.7)

$$e(A^+(t_1), A(t_2)) \leq r(t_2) - r^+(t_1).$$

L'hypothèse H_4 entraînera que $A(t_2)$ est borné dans E'' , donc aussi $A^+(t_1)$ vu cette inégalité: on en conclut que $A^+(t_1)$ est compact pour la topologie $\sigma(E'', X)$ et de même pour la topologie $\sigma(E, X)$, puisque cet ensemble est contenu dans E .

Finalement, la Proposition (5d) donne:

COROLLAIRE (5e). *On suppose que E est un espace vectoriel normé, non nécessairement complet, et on appelle X son dual topologique. On suppose que la multiapplication A , à rétraction finie de I dans E , a ses valeurs compactes pour la topologie $\sigma(E, X)$. Alors, pour tout $a_0 \in A(t_0)$, il existe une sélection $u: I \rightarrow E$ de A telle que $u(t_0) = a_0$ et que, pour tout $[s, t] \subset I$, on ait*

$$\text{var}(u; s, t) \leq \text{ret}(A; s, t).$$

On observe en effet que le plongement de E dans son complété \widehat{E} est une isométrie et que X est aussi bien le dual topologique de \widehat{E} . Les valeurs de A s'interprètent donc comme des parties de \widehat{E} , compactes pour la topologie $\sigma(\widehat{E}, X)$, ce qui ramène à l'hypothèse H_4 .

REFERENCES

BERGE (C.):

- [1] *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, Dunod, 1959.

BRIDGLAND (T. F.):

- [1] *Contributions to the theory of generalized differential equations*, I, Math. Systems Theory, **3** (1969), pp. 17-50; II, *ibid.*, pp. 156-165.
 [2] *Extreme limits of compacta valued functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **170** (1972), pp. 149-163.

HERMES (H.):

- [1] *On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **29** (1971), pp. 535-542.

KIKUCHI (N.) - TOMITA (Y.):

- [1] *On the absolute continuity of multifunctions and orientor fields*, Funkcialaj ekvacioj, **14** (1971), pp. 161-170.

LAURENT (P.J.):

- [1] *Approximation et optimisation*, Hermann, 1972, Chap. VI.

MOREAU (J. J.):

- [1] *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1967 (multigraphié 108 p.).
- [2] *Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques*, J. Math. pures et appl., **49** (1970), pp. 109-154.
- [3] *Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **273** (1971), pp. 118-121.
- [4] *Rafle par un convexe variable, première partie*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1971, exposé n. 15 (multigraphié 43 p.); deuxième partie, *ibid.*, 1972, exposé n. 3 (multigraphié 36 p.).
- [5] *Rétraction d'une multiapplication*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, exposé n. 13 (multigraphié 89 p.).
- [6] *Sélections de multiapplications à rétraction finie*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **276** (1973), pp. 265-268.
- [7] *Problème d'évolution associé à un convexe mobile d'un espace hilbertien*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **276** (1973), pp. 791-794.
- [8] *Intersection de deux convexes mobiles*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1973, Exposé n. 1 (multigraphié 26 p.) résumé dans: C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **276** (1973), pp. 1505-1508.
- [9] *Systèmes élastoplastiques de liberté finie*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1973, Exposé n. 12 (multigraphié 33 p.).
- [10] *On unilateral constraints, friction and plasticity*, in: *New variational techniques in Mathematical physics*, Centro Internazionale Matematico Estivo, 1973.
- [11] *Compléments sur les multiapplications à rétraction finie*, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1974, Exposé n. 9 (multigraphié 26 p.).

VAN CUTSEM (B.):

- [1] *Eléments aléatoires à valeurs convexes compactes*, Thèse, Grenoble, 1971.
- [2] *Problems of convergence in stochastic linear programming*, in: *Techniques of Optimization*, (A. V. BALAKRISHNAM, ed.) Academic Press, 1972, pp. 445-454.