



**HAL**  
open science

## Convexité et frottement

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Convexité et frottement. Séminaire sur la convexité et ses applications, Mar 1970, Montréal, Canada. hal-01788456

**HAL Id: hal-01788456**

**<https://hal.science/hal-01788456>**

Submitted on 9 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONVEXITE ET FROTTEMENT

par

Jean Jacques MOREAU

Centre de Recherches Mathématiques de  
l'Université de Montréal

Publication # 32

Cet exposé a été présenté dans le cadre du "Séminaire sur la convexité  
et ses applications" tenu à l'Université de Montréal les 23, 24 et 25 mars 1970.

DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Université de Montréal

Avril 1970

## 1 INTRODUCTION

L'intérêt de l'auteur pour la Théorie de la Convexité, spécialement pour la dualité des fonctionnelles convexes, a été motivé par l'étude des liaisons unilatérales en statique ou en dynamique des milieux continus (cf. réf. [1], [2], [3], [4] et [6]). Une telle rencontre entre la Mécanique et la Théorie de la Convexité n'a rien de surprenant : par exemple, en formulant le théorème du "polygone de sustentation", qui concerne l'équilibre d'un solide posé sur un plan (justement un problème de statique avec liaisons unilatérales), la Mécanique a probablement été le premier domaine de la science à faire usage de l'idée d'enveloppe convexe. Par ailleurs, la mise en dualité d'un espace vectoriel de vitesses et d'un espace vectoriel de forces, par le moyen de la forme bilinéaire "puissance", même si elle n'est pas toujours nettement explicitée, est une démarche mathématique constante en Mécanique.

On présente ici un autre domaine d'application mécanique de la convexité : la théorie du frottement sec, régi par la loi de Coulomb. La théorie de la plasticité consiste à invoquer une répartition continue de frottement dans l'étendue d'un milieu matériel ; la structure mathématique est la même, mais avec des espaces de dimension infinie. L'application de la théorie des fonctions duales à la plasticité fait l'objet de travaux en cours de B. NAYROLES (cf. [7]) ; des résultats de R.T. ROCKAFELLAR [8] sur les fonctionnelles convexes représentées par des intégrales  $\gamma$  jouent un rôle important.

2 FORMULATION CLASSIQUE DE LA LOI DE COULOMB

Soit un solide  $\mathcal{O}_0$ , déclaré fixe ; un second solide  $\mathcal{O}_1$  se meut en demeurant au contact de  $\mathcal{O}_0$ , ce qui veut dire que les surfaces frontières  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  des deux solides, supposés suffisamment régulières, demeurent tangentes en un point M, a priori variable dans l'une et dans l'autre. A l'instant considéré, soit  $\vec{v}$  le vecteur unité normal commun en M aux deux surfaces, orienté de  $\mathcal{O}_0$  vers  $\mathcal{O}_1$ . Par définition, la vitesse de glissement, soit  $\vec{V}$ , de  $\mathcal{O}_1$  sur  $\mathcal{O}_0$  est le vecteur vitesse, relativement à  $\mathcal{O}_0$ , de l'élément  $M_1$  du solide  $\mathcal{O}_1$  qui se trouve en M à l'instant en question. On montre en cinématique que  $\vec{v} \cdot \vec{V} = 0$  : la vitesse de glissement appartient à l'espace vectoriel  $\Pi$ , de dimension 2, constitué par les vecteurs tangents en M aux deux surfaces.

Les actions de contact subies par  $\mathcal{O}_1$  de la part de  $\mathcal{O}_0$  sont supposées réduites à une force unique appliquée à  $M_1$ , soit  $\vec{R}$  ; on décompose ce vecteur en

$$\vec{R} = \vec{F} + N \vec{v},$$

avec  $\vec{F} \in \Pi$ .

Dans ce qui suit, la composante normale  $N \geq 0$  (ou "pression" des deux corps l'un sur l'autre) sera traitée comme connue.

La loi du frottement sec de Coulomb formule une relation entre



$\vec{F}$  et  $\vec{V}$  qui est traditionnellement énoncée comme suit : Il existe  $f \geq 0$ , coefficient de frottement, tel que

$$(1) \quad \text{Si } \vec{V} = \vec{0} \quad : \quad |\vec{F}| \leq f N$$

$$(2) \quad \text{Si } \vec{V} \neq \vec{0} \quad : \quad |\vec{F}| = f N \text{ et les vecteurs } \vec{T} \text{ et } \vec{V} \text{ sont} \\ \text{colinéaires de sens opposés.}$$

Pour un mathématicien du début du siècle, cette juxtaposition de deux éventualités pouvait paraître hétéroclite et de pure opportunité empirique. Au contraire, on va voir que la théorie moderne de la convexité permet de rassembler les deux cas en des formulations très cohérentes.

### 3 GENERALISATION

Introduisons le disque fermé

$$D = \{\vec{F} \in \Pi \quad : \quad |\vec{F}| \leq f N\}.$$

La loi de Coulomb équivaut à

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \in D \\ \forall \vec{\Phi} \in D \quad : \quad \vec{V} \cdot (\vec{\Phi} - \vec{F}) \geq 0. \end{array} \right.$$

En effet, dans l'éventualité  $\vec{V} \neq \vec{0}$ , l'écriture (3) signifie que l'ensemble

$$\{\vec{\Phi} \in \Pi \quad : \quad \vec{V} \cdot (\vec{\Phi} - \vec{F}) \geq 0\}$$

est un demi-espace d'appui pour le disque  $D$  ; d'après les propriétés

élémentaires du cercle, cela équivaut à (2). Dans l'éventualité,  $\vec{V} = \vec{0}$ , l'équivalence de (1) et (3) est banale.

A ce stade, on généralise très naturellement la formulation au cas d'un frottement anisotrope ; l'anisotropie peut tenir à la structure propre des matériaux dont sont faits les solides  $\mathcal{O}_0$  et  $\mathcal{O}_1$  (le bois, par exemple) ou seulement à la structure superficielle produite par un usinage, un type particulier d'usure... Le disque  $D$  sera remplacé par un ensemble  $C$  qu'on a de fortes raisons de supposer toujours convexe, fermé, contenant l'origine.

Par ailleurs, une relation entre une force  $\vec{F}$  et une vitesse  $\vec{V}$ , telle qu'on l'écrit en (3), peut se retrouver dans un cadre plus vaste que celui du "plan"  $\Pi$  muni de son produit scalaire élémentaire. D'une façon générale, on considérera un espace vectoriel de vitesses, soit  $\mathcal{V}$ , de dimension quelconque et un espace vectoriel de forces, soit  $\mathcal{F}$ , espaces mis en dualité par la forme bilinéaire "puissance" : si  $V \in \mathcal{V}$  et  $F \in \mathcal{F}$ , on note  $\langle V, F \rangle$  la puissance de la force  $F$  pour un mouvement de vitesse  $V$ . On donne  $C \subset \mathcal{F}$ , ensemble convexe fermé <sup>(1)</sup> contenant l'origine. Nous étudions dans toute la suite la relation entre  $F$  et  $V$  définie par

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \in C \\ \forall \phi \in C : \langle V, \phi - F \rangle \geq 0 \end{array} \right.$$

---

(1) Au sens de la topologie naturelle de  $\mathcal{F}$  si cet espace est de dimension finie ; si les espaces sont de dimension infinie, il s'agira d'une quelconque des topologies localement convexes compatibles avec la dualité entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  (les convexes fermés sont les mêmes pour toutes ces topologies).

Le fait que  $C$  contient l'origine permet de prendre, en particulier,  $\phi = 0$ , d'où  $\langle V, F \rangle \leq 0$  : le frottement est un phénomène dissipatif ; cela peut être rattaché au second principe de la thermodynamique.

#### 4 PRINCIPE DE LA PUISSANCE MINIMALE

La relation (4) entre  $V$  et  $F$  équivaut visiblement à la propriété suivante : l'ensemble des  $F \in \mathcal{F}$  que cette relation associe à un  $V \in \mathcal{V}^0$  est l'ensemble des points de  $C$  où la fonction numérique  $\phi \mapsto \langle V, \phi \rangle$  atteint son inf (relatif à  $C$ ).

Il pourra paraître plus suggestif de considérer, au lieu de la puissance de  $\phi \in \mathcal{F}$  pour un mouvement de vitesse  $V \in \mathcal{V}^0$ , l'opposé -  $\langle V, \phi \rangle$ , ce qu'on appellera puissance dissipée (si  $F$  est la force qui se manifeste effectivement dans un mouvement réel, -  $\langle V, F \rangle$  est la puissance transformée en chaleur par le phénomène de frottement, puissance essentiellement  $\geq 0$  comme on l'a signalé) : de la sorte, on caractérise les  $F \in \mathcal{F}$  associés à un  $V \in \mathcal{V}^0$  par un "principe" de dissipation maximale.

Si l'ensemble  $C$  est compact<sup>(1)</sup>, la fonction continue  $\phi \mapsto \langle V, \phi \rangle$  y atteint certainement son inf ; on en conclut que, dans ce cas, la relation (4) associe à tout  $V \in \mathcal{V}^0$  au moins un  $F$  (et l'ensemble non vide de ces  $F$  est alors convexe compact).

---

(1) Lorsque l'espace  $\mathcal{F}$  est de dimension finie, cela signifie simplement que cet ensemble fermé est borné ; en dimension infinie, cette compacité devra s'entendre par rapport à une topologie compatible avec la dualité : le moins restrictif sera d'invoquer ici la topologie faible  $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{V}^0)$ .

5 USAGE DE LA FONCTION INDICATRICE DE C .

L'ensemble  $C$  peut être représenté par sa fonction indicatrice  
 $\psi_C$  :

$$\psi_C(\Phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi \in C \\ +\infty & \text{si } \Phi \notin C \end{cases}$$

L'ensemble  $C$  est convexe (resp. fermé) si et seulement si la fonction numérique  $\psi_C$  est convexe (resp. semi-continue inférieurement).

L'introduction de cette fonction permet d'écrire la relation (4) sous la forme équivalente

$$\forall \Phi \in \mathcal{F} : \langle -V, \Phi - F \rangle + \psi_C(F) \leq \psi_C(\Phi)$$

Cela exprime que la fonction affine

$$\Phi \mapsto \langle -V, \Phi - F \rangle + \psi_C(F)$$

est une minorante de la fonction  $\psi_C$  et que cette minorante est exacte au point  $F$  (c'est-à-dire qu'elle prend en ce point la même valeur que  $\psi_C$ , en l'occurrence zéro). La pente (ou gradient) de cette fonction affine est  $-V$  ; selon la terminologie maintenant usuelle, la pente d'une éventuelle minorante affine d'une fonction numérique  $f$ , exacte en un point  $F$ , est déclarée être un sous-gradient de  $f$  au point  $F$  ; l'ensemble, noté  $\partial f(F)$ , des sous-gradients de  $f$  au point  $F$  une partie convexe fermée (éventuellement vide) de  $\mathcal{V}$  appelée sous-différentiel de la fonction  $f$  au point  $F$ .

Moyennant cette notation, la relation (4) s'écrit

$$(5) \quad -V \in \partial\psi_C(F)$$

Entre autres avantages, cette formulation présente l'utilité de fournir un symbole représentant l'ensemble des  $V \in \mathcal{V}$  correspondant à un  $F \in \mathcal{F}$ , symbole pour lequel on dispose de règles de calcul (cf. § 8, ci-après).

## 6 FONCTION DE DISSIPATION

La fonction duale de  $\psi_C$ , au sens de la dualité entre les espaces vectoriels  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$ , est la fonction  $\psi_C^*$  définie, pour tout  $W \in \mathcal{V}$ , par

$$\begin{aligned} \psi_C^*(W) &= \sup_{\Phi \in \mathcal{F}} [ \langle W, \Phi \rangle - \psi_C(\Phi) ] \\ &= \sup_{\Phi \in C} \langle W, \Phi \rangle \end{aligned}$$

ce qu'on appelle aussi (assez improprement) la fonction d'appui de l'ensemble  $C$ . Plus naturel en mécanique est l'usage de la fonction de dissipation  $\phi$  définie par

$$\phi(W) = \psi_C^*(-W) = \sup_{\Phi \in C} [ -\langle W, \Phi \rangle ] = - \inf_{\Phi \in C} \langle W, \Phi \rangle$$

(d'ailleurs  $\phi = \psi_C^*$  dans le cas usuel où l'ensemble  $C$  est symétrique).

Comme  $\psi_c^*$ , la fonction  $\phi$  est convexe, positivement homogène (ou "sous-linéaire"), semi-continue inférieurement, à valeurs dans  $[0, +\infty]$

Par exemple dans le cas élémentaire du § 2, on trouve

$$\phi(V) = f N |V|$$

L'appellation "fonction de dissipation" est justifiée par le principe de dissipation maximale, énoncé au § 4 ci-dessus : les  $F \in \mathcal{F}$  que la loi du frottement (4) associe à un  $V \in \mathcal{V}$  sont caractérisés par

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \in C \\ - \langle V, F \rangle = \phi(V) \end{array} \right. ;$$

autrement dit, ce sont les  $F \in C$  donnant comme puissance dissipée la valeur  $\phi(V)$ .

On retrouverait tout aussi bien (6) en formulant que  $-V$  et  $F$  sont des points conjugués par rapport au couple de fonctions duales  $\psi_c$  et  $\psi_c^*$  c'est-à-dire (cf. [5], section 8)

$$\psi_c^* (-V) + \psi_c (F) = \langle -V, F \rangle$$

ce qui constitue une simple transcription de (5). Cette relation exige que  $\psi_c (F)$  soit fini, donc  $\psi_c (F) = 0$ , d'où son équivalence à (6).

Les règles du calcul des sous-différentiels fournissent également une autre transcription de (5) :

$$F \in \partial \psi_C^* (-V) ,$$

ou encore, vu que la fonction  $\phi$  se déduit de  $\psi_C^*$  par une symétrie dans  $\mathcal{V}^0$ ,

$$(7) \quad -F \in \partial \phi (V).$$

Notons pour mémoire que la tranche de niveau 1 de la fonction  $\psi_C^*$ , c'est-à-dire l'ensemble (convexe fermé)

$$\{ W \in \mathcal{V}^0 : \psi_C^*(W) \leq 1 \} ,$$

n'est autre que l'ensemble polaire de  $C$ , soit

$$D = \{ W \in \mathcal{V}^0 : \forall \phi \in C , \langle W, \phi \rangle \leq 1 \} ,$$

ce qui veut dire aussi que  $\psi_C^*$  est la jauge de  $D$ . De la même façon, la fonction d'appui  $\psi_D^*$  de  $D$  est la jauge de  $C$ . On pourrait tirer de là encore d'autres formulations équivalentes à (4), faisant intervenir l'ensemble  $D$  ou la fonction  $\psi_D^*$ .

## 7 RAPPROCHEMENT AVEC LA LOI DE LA RESISTANCE VISQUEUSE.

L'écriture (7) doit être comparée avec la loi de la résistance visqueuse : dans ce cas une force  $F \in \mathcal{F}$  est fonction linéaire de la vitesse  $V \in \mathcal{V}^0$  et les exemples usuels révèlent que cette application linéaire de

$\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{F}$  est le gradient d'une forme quadratique ; on écrit plutôt

$$(8) \quad -F = \text{grad } q (V)$$

et la forme quadratique  $q$  est appelée fonction de Rayleigh. Comme  $q$  est une fonction homogène de degré 2, l'identité d'Euler donne

$$(9) \quad - \langle V, F \rangle = 2q (V).$$

Le caractère dissipatif de la résistance visqueuse montre alors que la forme quadratique  $q$  prend seulement des valeurs  $\geq 0$  ; on en déduit élémentairement que c'est une fonction convexe. La différentiabilité de cette fonction entraîne que, pour chaque  $V \in \mathcal{V}$ , l'ensemble  $\partial q (V)$  est réduit au seul élément  $\text{grad } q (V) \in \mathcal{F}$  ; donc (8) s'écrit aussi bien

$$(10) \quad -F \in \partial q (V) ,$$

loi formellement semblable à (7).

Si l'on désire appeler systématiquement fonction de dissipation une fonction numérique  $\phi$  ou  $q$  engendrant une relation force-vitesse de la forme (7) ou (10) , ou prendra garde qu'une telle relation n'implique pas, en général, l'égalité de  $\phi(V)$  ou  $q(V)$  à la puissance dissipée  $-\langle V, F \rangle$  ; ainsi, en (9), il s'en faut du facteur 2, qui est précisément le degré d'homogénéité <sup>(1)</sup> de la fonction  $q$ .

---

(1) En fait, la classe des fonctions  $\phi$  telles que (7) assure une relation (non linéaire, en général) entre  $\phi(V)$  et  $\langle V, F \rangle$  est plus large que celles des fonctions homogènes. Il est assez facile de construire explicitement cette classe de fonctions de dissipation.



Le fait que l'application linéaire  $V \mapsto F$  de  $\mathcal{V}^D$  dans  $\mathcal{F}^r$  constituant la loi de la résistance visqueuse soit une différentielle se traduit, si les espaces sont de dimension finie et qu'on y choisisse des bases duales, par la symétrie de la matrice représentative de l'application. La thermodynamique des processus irréversibles considère une telle symétrie comme de règle dans la description de toute loi d'irréversibilité linéaire : on intitule cette règle principe d'Onsager.

La communauté de forme entre (7) et (10) suggère une généralisation du principe d'Onsager aux irréversibilités non linéaires : les relations entre forces et vitesses associées à des processus irréversibles seraient représentables, sinon par des différentielles, du moins par des sous-différentielles.

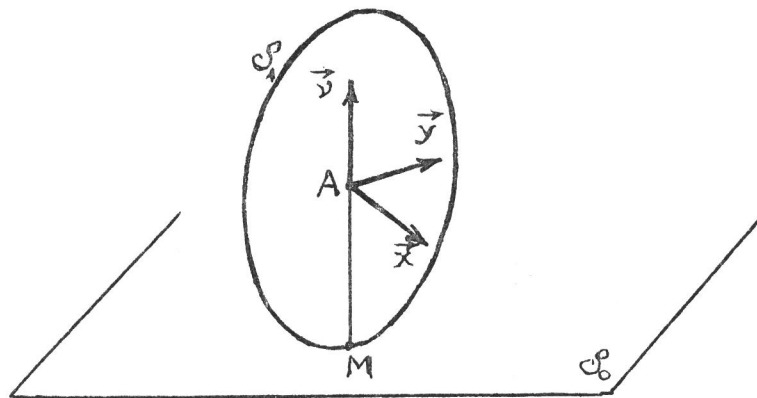
On objectera tout de suite que la loi de Coulomb fournit seulement une première approximation des circonstances réelles ; une étude plus fine du frottement révèle un coefficient de frottement  $f$  non plus constant, mais fonction décroissante de  $|V|$ . La relation entre  $V$  et  $F$  obtenue par là ne peut plus se représenter par une sous-différentielle. La réponse serait que le frottement réel consiste en une superposition de plusieurs phénomènes différents<sup>(1)</sup> ; mais l'essentiel reste alors à faire : caractériser les phénomènes irréversibles "purs" auxquels le principe conjecturé s'applique. Le principe d'Onsager lui-même n'échappe pas à des controverses de cette sorte.

---

(1) Dans le cas de métaux, on pense, par exemple, que des soudures entre aspérités des deux surfaces en contact sont constamment en train de s'établir et de se rompre au cours du mouvement.

8 EXEMPLE DE COMPOSITION DE DEUX FROTTEMENTS

Ici  $\mathcal{O}'_1$  désigne l'une des roues par lesquelles un véhicule  $\mathcal{O}'_2$  prend appui sur le sol horizontal  $\mathcal{O}'_0$  ; comme au paragraphe 2, le contact entre  $\mathcal{O}'_1$  et  $\mathcal{O}'_0$  est supposé s'effectuer par un unique point M, avec un coefficient de frottement  $f$  .



La réaction  $\vec{R} = \vec{F} + N \vec{v}$  subie par la roue  $\mathcal{O}'_1$  de la part du sol  $\mathcal{O}'_0$  obéit ainsi à la loi de Coulomb

$$(11) \quad -\vec{v} \in \partial\psi_D(\vec{F})$$

où comme au §3,  $D$  désigne, dans l'espace  $\Pi$  des vecteurs orthogonaux à  $\vec{v}$ , le disque fermé, centré à l'origine, de rayon  $fN$ . La composante  $N \geq 0$ , charge de la roue, sera supposée connue.

Soit  $\vec{x}$  un vecteur unité de l'axe de la roue ; soit  $h$  le moment par rapport à cet axe des forces subies par la roue de la part du véhicule  $\mathcal{O}'_2$ . On suppose que ce moment représente l'action d'un frein ;

$h$  est ainsi relié à la vitesse angulaire  $\omega$  de la roue par rapport à  $\mathcal{O}_2$  selon une loi de frottement en dimension 1 (dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}$  mis en dualité avec lui-même)

$$(12) \quad -\omega \in \partial\psi_I(h) \quad ,$$

où  $I$  désigne un intervalle donné  $[-g, +g]$  de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\vec{W} \in \Pi$  la vitesse, relativement à  $\mathcal{O}_0$ , du centre  $A$  de la roue (c'est aussi bien la vitesse d'un point du véhicule  $\mathcal{O}_2$ ) ; la cinématique élémentaire donne

$$(13) \quad \vec{W} = \vec{V} - \omega a \vec{y} \quad ,$$

en notant  $\vec{y} = \vec{v} \times \vec{x}$  et en appelant  $a = AM$  le rayon de la roue.

On néglige le poids et l'inertie de la roue ; de la sorte  $\vec{R} = \vec{F} + N \vec{v}$  est aussi bien la résultante des forces subies par le véhicule de la part de la roue et, d'autre part, l'équation des moments par rapport à l'axe  $Ax$  se réduit à

$$(14) \quad h = -a \vec{y} \cdot \vec{F} \quad .$$

On se propose d'établir, dans ces conditions, par élimination de  $\vec{V}$ ,  $\omega$ ,  $h$  entre les 4 relations (11) à (14) une relation entre  $\vec{W}$  et  $\vec{F}$ . Cette relation aura pour utilité de permettre une étude ultérieure du comportement

du véhicule sans qu'il soit besoin d'expliciter le mouvement de la roue.

L'élimination consiste en ceci : il existe  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{V} \in \Pi$  vérifiant avec  $\vec{W}$  et  $\vec{F}$  les 4 relations en question si et seulement si

$$(15) \quad -\vec{W} \in \partial\psi_D(\vec{F}) + (-a \vec{y}) \partial\psi_I(-a\vec{y} \cdot \vec{F})$$

où le dernier terme a naturellement la signification suivante :

$$(-a\vec{y}) \partial\psi_I(-a\vec{y} \cdot \vec{F}) = \{\vec{V} \in \Pi : \vec{V} = -\rho a \vec{y}, \rho \in \partial\psi_I(-a\vec{y} \cdot \vec{F})\}.$$

On constate aisément que cet ensemble n'est autre que  $\partial\psi_B(\vec{F})$ , où B désigne l'ensemble

$$B = \{\vec{F} \in \Pi : -a\vec{y} \cdot \vec{F} \in I\}$$

bande délimitée dans  $\Pi$  par deux droites parallèles à l'axe de la roue, menées de part et d'autre de l'origine à la distance  $g/a$  de ce point.

Alors (15) s'écrit

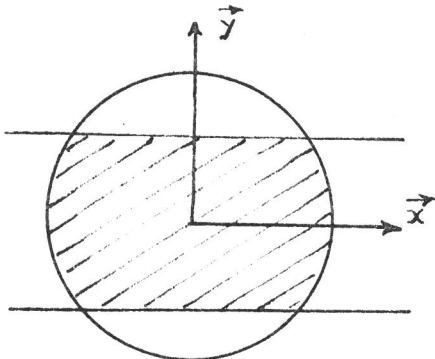
$$-\vec{W} \in \partial\psi_D(\vec{F}) + \partial\psi_B(\vec{F})$$

et on se trouve dans un cas assurant l'"additivité des sous-différentiels" (l'origine est un point où  $\psi_D$  est finie continue et  $\psi_B$  finie ; cf [5], section 10) de sorte que le second membre vaut

$$\partial(\psi_D + \psi_B)(\vec{F}) = \partial\psi_{D \cap B}(\vec{F})$$

La relation attendue entre  $\vec{W}$  et  $\vec{F}$  a donc la forme générale

(5) d'une loi de frottement avec  $C = D \cap B$



Si  $g/a \geq fN$  on a  $D \subset B$ , d'où  $C = D$  :  
la relation entre  $\vec{W}$  et  $\vec{F}$  se réduit  
alors à une loi de Coulomb ordinaire

(cela correspond à un freinage de la roue si fort qu'elle ne peut jamais que patiner au contact du sol). Par contre, pour  $g/a < fN$ , l'ensemble  $C$  définit une loi de frottement anisotrope intéressante. La frontière de  $C$  présente 4 points anguleux : en chacun de ces points,  $C$  possède une infinité de droites d'appui ; ce sont donc 4 valeurs de  $\vec{F}$  correspondant chacune à une infinité de valeurs de  $\vec{W}$ . La frontière de  $C$  contient aussi deux segments de droite perpendiculaires à  $\vec{y}$  : il y a de la sorte deux droites qui, chacune, sont d'appui pour  $C$  en une infinité de points ; cela veut dire qu'une valeur de  $\vec{W}$  colinéaire à  $\vec{y}$ , dans un sens ou dans l'autre (mouvement sans dérapiage de la roue), correspond à une infinité de valeurs de  $\vec{F}$ .

Le cas limite  $g = 0$  (roue non freinée) donne un ensemble  $C$  réduit à un segment de droite : la relation entre  $\vec{W}$  et  $\vec{F}$  fournit dans ce cas un exemple extrême de loi de frottement anisotrope.

## 9 UN SCHEMA GENERAL DE CALCUL.

Le mode de raisonnement qui précède ne constitue pas un artifice

occasionnel, mais reflète une situation générale usuelle en mécanique.

Soit  $\mathcal{V}_1, \mathcal{F}_1$  un premier couple d'espaces vectoriels mis en dualité par la forme bilinéaire notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  et  $\mathcal{V}_2, \mathcal{F}_2$  un second couple mis en dualité par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ . Soit  $L$  une application linéaire de  $\mathcal{F}_1$  dans  $\mathcal{F}_2$  (si les espaces sont de dimension infinie, on devra préciser que  $L$  est continue pour les topologies faibles) et soit  ${}^T L$  l'application de  $\mathcal{V}_2$  dans  $\mathcal{V}_1$  transposée de  $L$ , c'est-à-dire que pour tout  $F_1 \in \mathcal{F}_1$  et tout  $V_2 \in \mathcal{V}_2$

$$(16) \quad \langle {}^T L(V_2), F_1 \rangle_1 = \langle V_2, L(F_1) \rangle_2 .$$

Soit  $f : \mathcal{F}_2 \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction convexe s.c.i sur  $\mathcal{F}_2$ ; la fonction

$$f \circ L : F_1 \mapsto f(L(F_1))$$

est convexe s.c.i. sur  $\mathcal{F}_1$ . Dans des cas usuels (par exemple s'il existe un point de l'espace image  $L(\mathcal{F}_1)$  en lequel la fonction  $f$  est continue; cf. [9], corollaire 3A) on montre que le sous-différentiel de  $f \circ L$  au point  $F_1$  est l'image par  ${}^T L$  du sous-différentiel de  $f$  au point  $L(F_1)$ ; autrement dit

$$(17) \quad \partial(f \circ L) = {}^T L \circ (\partial f) \circ L$$

Prenons ici

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{F}_2 = \Pi \times \mathbb{R}$$

espace mis en dualité avec lui-même par la forme bilinéaire

$$\langle (\vec{V}, \omega), (\vec{F}, h) \rangle_2 = \vec{V} \cdot \vec{F} + \omega h.$$

Le passage aux espaces produits, en ce qui concerne des fonctions duales ou des sous-différentiels, est une opération banale, moyennant laquelle les deux relations (11) et (12) se condensent en

$$(18) \quad -(\vec{V}, \omega) \in \partial \psi_{D \times I}(\vec{F}, h).$$

Prenons en outre

$$\mathcal{V}_1^0 = \mathcal{F}_1 = \Pi,$$

espace mis en dualité avec lui-même par

$$\langle \vec{V}, \vec{F} \rangle_1 = \vec{V} \cdot \vec{F}.$$

Définissons l'application linéaire  $L$  de  $\mathcal{F}_1$  dans  $\mathcal{F}_2$  par

$$L(\vec{F}) = (\vec{F}, -a\gamma \cdot \vec{F}) \in \Pi \times \mathbb{R};$$

en se reportant à la définition (16), on obtient l'expression suivante de l'application transposée  ${}^T L$  de  $\Pi \times \mathbb{R}$  dans  $\Pi$ :

$${}^T L(\vec{V}, \omega) = \vec{V} - a \omega \vec{\gamma} \in \Pi;$$

l'équation cinématique (13) s'écrit donc

$$(19) \quad \vec{W} = {}^T L(\vec{V}, \omega)$$

A ce stade, il est plus clair d'appeler  $\vec{G} \in \Pi$  la composante selon  $\Pi$  de la résultante des forces subies par le véhicule de la part de la roue. Le fait qu'on néglige l'inertie de la roue se traduit par  $\vec{G} = \vec{F}$  et par l'équation des moments (14), ce qui se résume en

$$(20) \quad (\vec{F}, h) = L(\vec{G}) \quad .$$

Entre les trois relations (18) : synthèse des deux lois de frottement en présence, (19) : cinématique de la roue et (20) : quasi-équilibre de la roue, l'élimination des éléments  $\vec{V}, \omega, \vec{F}, h$  est immédiate :

$$- \vec{W} \in (\tau L \circ \partial\psi_{D \times I} \circ L) (\vec{G}).$$

Il n'y a plus qu'à invoquer la règle de calcul (17) (applicable parce que l'origine de  $\Pi \times \mathbb{R}$  est un point où la fonction  $\psi_{D \times I}$  est finie et continue) pour obtenir le résultat du § 8 :

$$- \vec{W} \in \partial\psi_{D \cap B} (\vec{G}).$$

## 10 SYSTEME ENTRAINE

Reprenons les mêmes éléments qu'au § 8 ; la relation obtenue alors entre  $\vec{W}$  et  $\vec{F}$  parvenait à formuler le bilan des deux frottements subis par la roue sans qu'il soit besoin d'explicitier les vitesses de glissement  $\vec{V}$  et  $\omega$  associées à ces deux frottements.



On considère maintenant le problème complémentaire : supposant  $\vec{W}$  connu, ce qui signifie, si l'on veut, <sup>que</sup> la roue subit un mouvement d'entraînement imposé, déterminer  $\vec{V}$  et  $\omega$  (essentiellement liés par la condition cinématique (13)). Le cas particulier  $g = 0$  (roue non freinée) est très classique : c'est celui de la roulette dérapante, organe de mesure des planimètres et autres appareils intégrateurs.

Les particularités du problème fournissent ici une solution facile parce que la ou les valeurs de  $\vec{F}$  que la relation

$$(21) \quad - \vec{W} \in \partial\psi_{D \cap B}(\vec{F})$$

associe à  $\vec{W}$  se trouvent être en même temps les valeurs que la loi de Coulomb (11) associe à  $\vec{V}$ . Limitons-nous au cas intéressant  $g/a < f N$

- Si le vecteur  $\vec{W}$  n'est pas colinéaire à  $\vec{y}$ , il détermine un demi-plan d'appui de l'ensemble  $D \cap B$  qui est d'appui en un seul point  $\vec{F}$ . Si ce point  $\vec{F}$  est intérieur à l'un des arcs de cercle intervenant dans la frontière de  $D \cap B$ , la loi (11) donne  $\vec{V}$  colinéaire à  $\vec{W}$ , de même sens, d'où  $\omega = 0$  si l'on se reporte à (13). Si au contraire ce point  $\vec{F}$  est l'un des quatre points anguleux de la frontière, la direction de  $\vec{V}$  pourra être différente de celle de  $\vec{W}$  et (13) imposera une valeur bien déterminée non nulle de  $\omega$ .

- Si  $\vec{W}$  est colinéaire à  $\vec{y}$ , la relation (21) lui associe une infinité de valeurs de  $\vec{F}$  formant un segment de droite (une telle

indétermination de force est assez fréquente en mécanique : elle signifie que la description, toujours schématique, du dispositif expérimental à partir de laquelle on raisonne, n'est pas assez fine). Selon la loi (11) une valeur non nulle de  $\vec{V}$  (correspondant pour  $\vec{F}$  à l'une des extrémités du segment) ne serait pas colinéaire à  $\vec{y}$  et donc contredirait (13). Reste seulement la possibilité  $\vec{V} = 0$  : roulement sans glissement de la roue, ce qui détermine  $\omega$ .

L'analyse n'est pas toujours aussi simple que dans cet exemple ; cela donne son prix à la propriété suivante qui sera généralisée au § 11 (Proposition 2).

Dans l'ensemble des valeurs de  $\vec{V}$  et  $\omega$  vérifiant (13), avec  $\vec{W}$  imposé, le ou les couples  $(\vec{V}, \omega)$  compatibles avec les données du problème, minimisent la fonction de dissipation (cf. § 6) :

$$(22) \quad \phi(\vec{V}, \omega) = f N |\vec{V}| + g |\omega|$$

c'est-à-dire que la ou les valeurs de  $\omega$  minimisent sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$\omega \mapsto f N |\vec{W} + \omega \vec{y}| + g |\omega|$$

En effet, pour  $\vec{W}$  fixé, l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(\vec{V}, \omega) \in \Pi \times \mathbb{R} : \vec{V} - \omega \vec{y} = \vec{W}\}$$

est une variété affine de l'espace vectoriel  $\Pi \times \mathbb{R}$ . Le sous différentiel  $\partial\psi_{\mathcal{E}}(\vec{V}, \omega)$ , vide si  $(\vec{V}, \omega) \notin \mathcal{E}$ , consiste, si  $(\vec{V}, \omega) \in \mathcal{E}$ , en l'orthogonal de l'espace vectoriel

$$\{(\vec{V}, \omega) \in \Pi \times \mathbb{R} : \vec{V} - \omega \vec{a}_y = \vec{0}\}.$$

On constate (cela signifie que la liaison de rigidité de la roue est parfaite ; cf. § 11) que cet espace orthogonal est justement l'ensemble des  $(\vec{F}, h) \in \Pi \times \mathbb{R}$  vérifiant la condition d'équilibre (14).

Le système de conditions (13) et (14) équivaut donc à

$$(23) \quad (\vec{F}, h) \in \partial\psi_{\mathcal{E}}(\vec{V}, \omega),$$

tandis que les équations (11) et (12), qu'on avait condensées sous la forme (18), peuvent s'écrire

$$(24) \quad (-\vec{F}, -h) \in \partial\phi(\vec{V}, \omega),$$

où  $\phi$  est la fonction de dissipation totale :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{V}, \omega) &= \psi_{D \times I}^*(\vec{V}, -\omega) \\ &= \psi_D^*(\vec{V}) + \psi_I^*(-\omega) \end{aligned}$$

soit bien l'expression (22).

L'élimination de  $\vec{F}, h$  entre (23) et (24) donne

$$(\vec{0}, 0) \in \partial\psi_{\mathcal{C}}(\vec{V}, \omega) + \partial\phi(\vec{V}, \omega) \quad .$$

Comme, essentiellement,  $\partial\psi_{\mathcal{C}} + \partial\phi \subset \partial(\psi_{\mathcal{C}} + \phi)$  on obtient la conclusion annoncée.

D'ailleurs puisque  $\phi$  est une fonction continue (vu que  $D \times I$  est compact),  $\partial\psi_{\mathcal{C}} + \phi = \partial(\psi_{\mathcal{C}} + \phi)$  : la propriété de minimum en question caractérise donc les couples  $\vec{V}, \omega$  compatibles avec la vitesse d'entraînement  $\vec{W}$ .

## 11 THEOREMES GENERAUX.

On va développer une formalisation générale des circonstances rencontrées dans l'exemple des § 8 et 10.

Soit un système matériel, dans une certaine configuration. Soit  $\mathcal{V}$  l'espace vectoriel de ses vitesses éventuelles à partir de ladite configuration. Soit  $\mathcal{F}$ , mis en dualité avec  $\mathcal{V}$  par la forme bilinéaire "puissance", l'espace vectoriel des forces (au sens généralisé) qui peuvent lui être appliquées.

Ce système est soumis à une force de frottement  $F \in \mathcal{F}$  liée à sa vitesse  $V \in \mathcal{V}$  par la relation

$$(25) \quad -V \in \partial\psi_{\mathcal{C}}(F)$$

$\mathcal{C}$  étant une partie convexe donnée de  $\mathcal{F}$ , fermée pour les topologies compatibles avec la dualité.

Il subit par ailleurs un entraînement ou liaison dépendant du temps imposant à la vitesse  $V$  d'appartenir à une certaine variété affine  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$ . Soit  $\mathcal{W}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{V}$  parallèle à la variété  $\mathcal{E}$  : spécifier la variété  $\mathcal{E}$  dans l'ensemble de celles qui sont parallèles à  $\mathcal{W}$  signifie donner un élément  $W$  de l'espace vectoriel quotient  $\mathcal{V}/\mathcal{W}$  : c'est cet élément qu'on appellera la vitesse d'entraînement<sup>(1)</sup>.

La liaison d'entraînement est supposée parfaite ; on entend par là que la force  $R \in \mathcal{F}$  exercée sur le système par le dispositif d'entraînement est orthogonale à la variété affine  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire orthogonale à  $\mathcal{W}$  :

$$(26) \quad R \in \mathcal{W}^\perp .$$

En outre cette liaison parfaite est supposée ferme, c'est-à-dire qu'inversement toute valeur de  $R$  vérifiant cette condition peut effectivement être fournie par le dispositif d'entraînement.

Enfin on suppose négligeable l'inertie du système (évolution quasi-statique), de sorte que l'équation de la dynamique se réduit à

$$(27) \quad R + F = 0 .$$

Au cours d'un mouvement vérifiant cette équation, il est naturel d'interpréter  $F = -R$ , élément de  $\mathcal{W}^\perp$ , comme la résistance du système à l'entraînement.

---

(1) Il n'est pas très usuel d'employer comme ici des notations différentes pour désigner un élément, soit  $W$ , d'un espace quotient et la classe d'équivalence correspondante  $\mathcal{E}$  dans l'espace initial. L'exemple traité au § 10 montre que, dans le présent contexte, cette double notation est plus claire au stade des applications.

Les espaces  $\mathcal{V}/\mathcal{W}^0$  et  $\mathcal{W}^{\perp}$  sont classiquement en dualité ; le premier théorème a pour objet de montrer que la relation entre la vitesse d'entraînement  $W \in \mathcal{V}/\mathcal{W}^0$  et la résistance à l'entraînement  $F \in \mathcal{W}^{\perp}$  a la forme d'une loi de frottement.

PROPOSITION 1.

Au sens de la dualité entre  $\mathcal{V}/\mathcal{W}^0$  et  $\mathcal{W}^{\perp}$ , des éléments  $W$  et  $F$  satisfaisant aux conditions précédentes vérifient la relation

$$(28) \quad -W \in \partial\psi_{C'}(F)$$

où on note  $C' = C \cap \mathcal{W}^{\perp}$ .

Une condition suffisante pour qu'inversement tout couple  $W, F$  vérifiant (28) corresponde à un mouvement du système dans la situation qu'on vient de définir est que  $\mathcal{W}^{\perp}$  rencontre l'intérieur<sup>(1)</sup> de  $C$ . Si cette condition est remplie, la fonction de dissipation  $\dot{\phi}$  correspondant à la loi de frottement (28) a pour expression

$$(29) \quad \dot{\phi}(W) = \min_{U \in \mathcal{E}} \phi(U)$$

( $\mathcal{E}$  : variété affine définie par  $W$  ;  $\phi$  : fonction de dissipation associée à la loi (25)).

(1) Pour la topologie naturelle de  $\mathcal{F}$  si cet espace est de dimension finie ; sinon on précise qu'il s'agit d'une topologie compatible avec la dualité entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  : le moins restrictif est d'invoquer la topologie de Mackey  $\tau(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ .

En effet, si (25) , (26) et (27) sont vérifiées et si  $V$  appartient à  $\mathcal{E}$  , c'est-à-dire s'il est un représentant de  $W$  , on a

$$F \in C \cap \mathcal{W}^\perp = C'$$

et, en exprimant (25) sous la forme (4) ,

$$\forall \phi \in C' \quad : \quad \langle V, \phi - F \rangle \geq 0$$

Comme  $\phi - F \in \mathcal{W}^\perp$ , cela s'écrit aussi bien, au sens de la dualité entre  $\mathcal{V}/\mathcal{W}$  et  $\mathcal{W}^\perp$ ,

$$\forall \phi \in C' \quad : \quad \langle W, \phi - F \rangle \geq 0 ,$$

d'où (28) , par le même argument qu'au § 5.

Réciproquement, supposons que (28) ait lieu ; cela implique  $F \in C'$ . Soit  $V_0 \in \mathcal{V}$  un représentant de la classe  $W$  ; pour tout  $\phi \in C'$  on a  $\phi - F \in \mathcal{W}^\perp$  de sorte que le produit scalaire  $\langle V_0 , \phi - F \rangle$  , au sens de la dualité entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F}$  est aussi bien égal au produit scalaire  $\langle W, \phi - F \rangle$  , au sens de la dualité entre  $\mathcal{V}/\mathcal{W}$  et  $\mathcal{W}^\perp$  ; on en tire qu'au sens de la dualité entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F}$  , on a

$$(30) \quad - V_0 \in \partial\psi_{C'}(F)$$

Or

$$\psi_{C'} = \psi_C + \psi_{\mathcal{W}^\perp}$$

et la condition formulée dans l'énoncé signifie l'existence d'un point de  $\mathcal{F}$  où les deux fonctions  $\psi_C$  et  $\psi_{\mathcal{W}^\perp}$  ont des valeurs finies (à savoir zéro) et

où  $\psi_C$  est continue ; alors (cf. [5], section 10), partout dans  $\mathcal{F}$  on a

$$\partial(\psi_C + \psi_{\mathcal{W}^\perp}) = \partial\psi_C + \partial\psi_{\mathcal{W}^\perp} ;$$

en outre, si  $F \in \mathcal{W}^\perp$ ,

$$\partial\psi_{\mathcal{W}^\perp}(F) = \mathcal{W} .$$

Donc (30) implique

$$\exists U \in \mathcal{W} : -V_0 - U \in \partial\psi_C(F)$$

c'est-à-dire

$$\exists V \in \mathcal{E} : -V \in \partial\psi_C(F) ,$$

ce qu'il fallait établir.

Par définition, la fonction de dissipation correspondant à la loi de frottement (28) est, à une symétrie près, la fonction d'appui de  $C'$  au sens de la dualité entre  $\mathcal{V}/\mathcal{W}^\perp$  et  $\mathcal{W}^\perp$ . Au sens de la dualité entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F}$ , la fonction d'appui de  $C'$  est la fonction duale de  $\psi_{C'} = \psi_C + \psi_{\mathcal{W}^\perp}$ . L'hypothèse de l'énoncé entraîne (cf [5], Proposition 9.c) que cette fonction duale est égale à l'inf-convolution des fonctions duales de  $\psi_C$  et  $\psi_{\mathcal{W}^\perp}$  et que d'ailleurs cette inf-convolution est exacte. La fonction duale de  $\psi_{\mathcal{W}^\perp}$  étant  $\psi_{\mathcal{W}}$ , cela donne, pour tout  $V \in \mathcal{V}$ ,

$$\psi_{C'}^*(V) = (\psi_C^* \nabla \psi_{\mathcal{W}}^*)(V) = \min_{U \in \mathcal{W}} [\psi_C^*(U) + \psi_{\mathcal{W}}^*(V - U)] = \min_{U \in \mathcal{V} + \mathcal{W}} \psi_C^*(U)$$



La fonction ainsi définie sur  $\mathcal{V}$  est constante sur chaque classe mod.  $\mathcal{W}$ ; la fonction d'appui de  $C'$  au sens de la dualité entre  $\mathcal{V}/\mathcal{W}$  et  $\mathcal{W}^\perp$  est donc la fonction

$$W \mapsto \min_{U \in \mathcal{E}} \psi_C^*(U) .$$

Moyennant une symétrie, on en tire (29).

Autre mode de raisonnement :

Utiliser la technique du § 9 avec  $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}/\mathcal{W}$  et en prenant pour  $L$  l'injection canonique de  $\mathcal{W}^\perp$  dans  $\mathcal{F}$ , ce qui donne pour  $\tau_L$  l'application canonique de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ .

Le deuxième théorème a pour objet la question rencontrée au § 10 : la vitesse d'entraînement  $W$  étant imposée, caractériser  $V$ .

PROPOSITION 2

Dans la variété affine  $\mathcal{E}$ , l'ensemble des  $V$  satisfaisant aux conditions du problème, s'il n'est pas vide, coïncide avec l'ensemble des points où la restriction  $\phi|_{\mathcal{E}}$  de la fonction de dissipation atteint un minimum fini.

Si d'ailleurs il existe un point de  $\mathcal{E}$  où  $\phi$  est finie et continue (pour une topologie sur  $\mathcal{V}$  compatible avec la dualité entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F}$ ) les deux ensembles en questions coïncident même si le premier est vide.

En effet, les deux conditions  $V \in \mathcal{E}$  et  $F \in \mathcal{W}^\perp$  se condensent en

$$(31) \quad F \in \partial\psi_{\mathcal{E}}(V) \quad ,$$

tandis que (25) équivaut à (cf. § 6)

$$(32) \quad -F \in \partial\phi(V) \quad .$$

Les  $V \in \mathcal{E}$  satisfaisant les conditions du problème sont donc caractérisés par la propriété

$$(33) \quad 0 \in \partial\psi_{\mathcal{E}}(V) + \partial\phi(V) \quad .$$

En vertu de l'inclusion banale

$$(34) \quad \partial\psi_{\mathcal{E}}(V) + \partial\phi(V) \subset \partial(\psi_{\mathcal{E}} + \phi)(V) \quad ,$$

cette propriété entraîne que la fonction  $\psi_{\mathcal{E}} + \phi$  (égale à  $\phi$  sur  $\mathcal{E}$  et à  $+\infty$  en dehors) atteint un minimum fini au point  $V$ , ce qui équivaut à dire que la restriction  $\phi|_{\mathcal{E}}$  atteint un minimum fini au point  $V$ .

Supposons l'existence de  $V$  et  $F$  vérifiant les conditions (31) et (32); d'après le § 6, cela implique

$$\phi(V) = - \langle V, F \rangle$$

Soit  $V' \in \mathcal{E}$  un autre point où  $\phi|_{\mathcal{E}}$  atteint son inf; alors  $\phi(V') = \phi(V)$ . Comme  $V - V' \in \mathcal{W}^0$  et  $F \in \mathcal{W}^\perp$ , on a

$$\langle V, F \rangle = - \langle V', F \rangle$$

donc

$$\phi(V') = - \langle V', F \rangle$$

Cela prouve que  $V'$  vérifie, avec ce même  $F$ , les conditions du problème.

Enfin l'hypothèse d'existence d'un point de  $\mathcal{E}$  où  $\phi$  est finie est continue entraîne que l'inclusion (34) est une égalité d'ensembles : il y a alors équivalence entre (33) et le fait que  $\phi|_{\mathcal{E}}$  atteigne au point  $V$  un minimum fini.

REMARQUE.

Toute la théorie précédente pourrait s'adapter au cas où, outre la liaison parfaite d'entraînement, le système subit une charge constante donnée, soit  $G \in \mathcal{F}$ . Cela revient à remplacer l'ensemble  $C$  par un translaté  $C + G$ . Si cet ensemble rencontre l'espace  $\mathcal{W}^\perp$  il pourra exister encore, pour un entraînement  $W \in \mathcal{V}/\mathcal{W}^\circ$ , des évolutions quasi-statiques du système.

### BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] J.J. MOREAU, Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss, C.R. Acad. Sci. Paris, 256 (1963), 871-874.
- [2] J.J. MOREAU, Quadratic programming in mechanics : Dynamics of one-sided constraints, SIAM J. on Control, 4(1966), 153-158.
- [3] J.J. MOREAU, Principes extrémaux pour le problème de la naissance de la cavitation, J. de Mécanique, 5(1966), 439-470.
- [4] J.J. MOREAU, One-sided constraints in hydrodynamics, in : J. ABADIE (Editor), Non linear programming, North Holland, Pub. Co. (1967), 261-279.
- [5] J.J. MOREAU, Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les Equations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris (1967), multigraphié 108p.
- [6] J.J. MOREAU, La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique, C.R. Acad. Sci. Paris, 267 (1968), 954-957.
- [7] B. NAYROLES, Essai de théorie fonctionnelle des structures élastoplastiques parfaites, à paraître dans : J. de Mécanique, 1970.
- [8] R.T. ROCKAFELLAR, Integrals which are convex functionels, Pacific. J. Math. 24 (1968), 525-539.
- [9] R.T. ROCKAFELLAR, Integrals which are convex functionals, II, à paraître.