De l'existence d'arbres couvrants complètement disjoints dans les réseaux sans fil

Axel Moinet[1] et Benoît Darties[1] et Jean-Luc Baril[1]

[1] *Le2i, Univ. Bourgogne Franche-Comté, 9 avenue Alain Savary, 21000 DIJON, France*

Les arbres couvrants complètement disjoints (CIST) présentent un réel intérêt dans les réseaux, aussi bien pour des opérations d'augmentation de robustesse que d'équilibrage de charge, de fractionnement du trafic, ... Leur étude théorique a montré de nombreux challenges liés à leur calcul et leur quantification. Nous proposons ici une formulation ILP originale et montrons par des résultats de simulation sur des modèles représentatifs des réseaux sans fil que plusieurs CIST peuvent être calculés lorsque la densité du réseau est suffisamment élevée. Nous montrons que dans ce type de réseaux, la densité et le nombre de nœuds sont proportionnels au nombre de CIST qui peuvent être calculés.

Mots-clefs : CIST, réseaux sans fil, robustesse, MILP, simulations

Les travaux présentés ici sont détaillés dans [MDG+17]. Maintenir la connectivité dans les réseaux de communication est un défi important, particulièrement dans les réseaux sans fil en raison de l'absence de structure centralisée : les nœuds servent de routeurs pour maintenir la connectivité entre pairs, mais sont sujets à différentes perturbations (interférences, batterie limitée, ...) qui peuvent entraîner des défaillances spontanées sur les liaisons directes et/ou les nœuds. De nombreux travaux de recherche s'intéressent au problème de maintien de la connectivité dans ces réseaux sous plusieurs approches complémentaires [JC16] [CR89]. Pour la plupart, les entités communiquent en utilisant un arbre couvrant comme structure de routage. Une façon d'effectuer une communication tolérante aux pannes est d'exploiter les chemins disjoints qui existent entre des paires de nœuds, et d'utiliser plusieurs arbres couvrants *disjoints*. Ainsi, en cas de panne, le système peut passer d'un arbre à l'autre sans interruption. Utiliser plusieurs arbres disjoints trouve d'autres applications au-delà de la robustesse (équilibrage de charge, sécurité, séparation des services, ...).

Nous modélisons nos réseaux par un graphe $G = (V,E)$, V étant l'ensemble des noeuds et E celui des arêtes modélisant des liens directs entre nœuds. En 2001, les *arbres couvrants complètement disjoints* [Has01] (*Completely Independent Spanning Trees* - CIST) ont été définis comme une collection d'arbres couvrants de sorte que pour chaque paire de nœuds $x, y \in V$, les chemins reliant x et y dans chaque arbre sont nœuds-internes disjoints et arêtes-disjoints. Ces collections ont été très étudiées sur des aspects théoriques et se révèlent difficiles à calculer. Soit $C_{CIST}(G)$ la cardinalité de la plus grande collection de CIST sur G : aussi bien la connectivité en terme de nœuds, notée $\kappa(G)$, que la connectivité en terme d'arêtes, notée $\lambda(G)$, sont deux bornes supérieures pour $C_{CIST}(G)$. En 2012, Péterfalvi [Pét12] a proposé une construction d'un graphe k-connecté qui ne contient pas 2 CIST pour tout $k \geq 0$. Cette construction rejette la conjecture [Has02] selon laquelle $C_{CIST}(G) \geq k$ dans tout graphe $2k$-connecté, montrant ainsi que le problème est plus difficile qu'envisagé.

À notre connaissance, aucun travail n'a proposé l'étude des CIST à partir d'une approche opérationnelle, ou étudié l'existence de CIST dans des réseaux sans fil, ceci étant certainement dû aux fortes contraintes structurelles que les topologies réseau doivent satisfaire. Notre objectif est de montrer ici qu'en dépit de ces fortes contraintes topologiques, il est possible de calculer et d'exploiter plusieurs CIST dans des réseaux ad-hoc dès lors que la densité des nœuds est suffisamment élevée.

1 Un programme linéaire pour calculer des collections de CIST

Nous proposons tout d'abord une formulation *ILP* pour déterminer s'il existe ou non une collection de CIST de taille k ou plus dans graphe $G = (V,E)$. Comme k est une entrée, nous utilisons une approche

dichotomique en appelant notre programme *ILP* avec différentes valeurs de k jusqu'à trouver la plus grande collection réalisable. Étant donné un graphe G et un entier k, nous définissons les éléments suivants $\forall u \in V, \forall e \in E$, et tout entier t avec $1 \leq t \leq k$:

Variables : Nous introduisons deux ensembles de variables binaires, désignant respectivement les nœuds internes et les arêtes des arbres de la collection de CIST , comme suit : la variable x_u^t (resp. x_e^t) prendra la valeur 1 si et seulement si le nœud $u \in V$ (resp. l'arête $e \in E$) est nœud interne (resp. arête) de l'arbre $t, 1 \leq t \leq k$, et 0 autrement. Pour assurer la connectivité des composantes induites par les arêtes sélectionnées pour apparaître dans un même arbre t, nous utilisons une technique de flot dans laquelle pour chaque arbre t, chaque nœud de V doit faire remonter une unité jusqu'à un puits $s^t \in V$ (tiré aléatoirement) en utilisant seulement une des arêtes sélectionnées dans t. Pour ce faire, nous introduisons une variable $f_{(u,v)}^t$ pour définir le flot transitant sur $e = \{u, v\}$ dans le sens u vers v sur l'arbre t, $\forall e \in E$, $1 \leq t \leq k$.

Ojectif : Compte tenu de l'approche dichotomique envisagée sur la valeur k, l'objectif de minimisation est optionnel puisqu'il s'agit de déterminer l'existence ou non de k CIST . Cependant, lorsque cette existence est avérée nous rechercherons la collection qui minimise le nombre de nœuds internes utilisés dans tout arbre : $\min_{1 \leq t \leq k} \sum_{v \in V} x_v^t$. Ce critère a une influence significative sur les arbres résultants, car il permet d'augmenter le nombre moyen de feuilles, de diminuer la longueur moyenne des chemins entre les noeuds et de réduire le nombre de points critiques du réseau.

Contraintes :L'ensemble des contraintes permettant de modéliser notre problème sous forme d'un ILP est résumé dans la Table 1, et se détaille comme suit : chaque arbre possède exactement $n-1$ arêtes (Eq. 1). Pour chaque arbre, l'unité de flot produite par chaque nœud doit atteindre le nœud puits s^t (Eq. 3) tout en préservant la loi de conservation des flots (Eq. 2). Pour assurer un transport de flot correct, nous imposons qu'aucun flot ne puisse sortir du puits (Eq. 5). Le flot associé à un arbre t ne peut transiter que par les arêtes qui sont sélectionnées pour cet arbre (Eq. 4). Une fois chaque arbre t défini, nous lions les variables x_u^t aux variables x_e^t : un nœud u est interne dans t si et seulement si au moins deux de ses arêtes incidentes appartiennent à t (Eq. 6). Enfin, nous ajoutons les contraintes d'unicité : un nœud n'est interne que dans un seul arbre (Eq. 7) et une arête n'appartient qu'à un seul arbre au plus (Eq. 8). Nous ajoutons également les coupes optionnelles suivantes, qui améliorent en pratique les temps de calcul : pour chaque arbre t, chaque nœud a un voisin qui est nœud interne de t (Eq. 9) et une arête incidente appartenant à t (Eq. 10).

Notons que $x_{e_1}^t$ et $x_{e_2}^t$ sont des variables binaires dans Eq. 6, et que l'objectif est la minimisation de la somme des x_u^t pour tout $u \in V$. De ce fait, nous pouvons relaxer notre formulation en définissant les variables $x_v^t, \forall$ comme continues sur l'intervalle $[0,1]$ tout en garantissant que leurs valeurs affectées seront entières.

2 Protocole de simulation et résultats

2.1 Protocole expérimental

Nous décrivons ensuite le protocole de simulation que nous avons mis en place : Nous modélisons un réseau sans fil sous la forme d'un graphe de disques quasi-unitaires [BFNO03], plus pertinent que le modèle

$$\forall t, \quad \sum_{e \in E} x_e^t = n-1 \qquad (1) \qquad \forall t, \forall u \in V - s^t, \quad \sum_{v \in N_G(u)} f_{v,u}^t + 1 = \sum_{v \in N_G(u)} f_{u,v}^t \qquad (2)$$

$$\forall t, \quad \sum_{u \in N_G(s^t)} f_{u,s^t}^t = n-1 \qquad (3) \qquad \forall t, \forall e = \{u,v\} \in E, \quad f_{(u,v)}^t + f_{(v,u)}^t \leq n.x_e^t \qquad (4)$$

$$\forall t, \quad \sum_{u \in N_G(s^t)} x_{(s^t,u)}^t = 0 \qquad (5) \qquad \forall t, \forall u \in V, \forall e_1 \neq e_2 \in J_G(u), \quad x_{e_1}^t + x_{e_2}^t - 1 \leq x_u^t \qquad (6)$$

$$\forall u \in V, \quad \sum_{1 \leq t \leq k} x_u^t \leq 1 \qquad (7) \qquad \forall e \in E, \quad \sum_{1 \leq t \leq k} x_e^t \leq 1 \qquad (8)$$

$$\forall t, \forall u \in V, \quad \sum_{v \in N_G(u)} x_v^t \geq 1 \qquad (9) \qquad \forall t, \forall u \in V, \quad \sum_{e \in J_G(u)} x_e^t \geq 1 \qquad (10)$$

TABLE 1: contraintes exprimées dans notre ILP

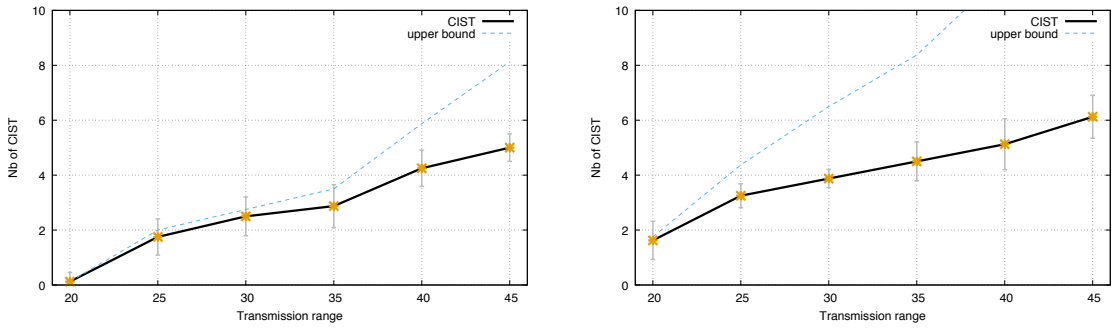
simplifié de graphes de disques unitaires (défini comme le graphe d'intersection de disques de même rayon dans un plan) : nous considérons une zone géographique de 100×100 unités. Étant donné un nombre n de nœuds et un rayon d'émission $r > 0$, nous générons des coordonnées aléatoires $x_i, y_i \in [0, 100]$ pour chaque nœud i afin que la densité du réseau soit uniformément répartie dans l'espace. Nous posons $q = 0.6r$. Nous ajoutons un lien entre toute paire de nœuds dont la distance d est inférieure à q, et ajoutons un lien entre deux nœuds avec une probabilité $p = \frac{r-d}{r}$ si leur distance est comprise entre $0.6r$ et r.

2.2 Impact du rayon de transmission (analogue à la densité)

Nous avons d'abord étudié l'évolution du nombre de CIST lorsque seul le rayon de transmission varie.

Nous avons placé 50 nœuds uniformément, puis nous avons calculé le nombre de (CIST) et une borne supérieure, pour différents rayons de transmission r avec $r \in [20, 25, 30, 35, 40, 45]$. Notons que lorsque nous augmentons le rayon de transmission d'une mesure à l'autre, aucun lien dont l'existence suivait la probabilité $p = \frac{r-d}{r}$ n'est supprimé s'il avait été créé auparavant, pour maintenir la cohésion des simulations. Nous répétons nos mesures pour 10 réseaux simulés différents. Nous réitérons ensuite le même processus sur les réseaux de 100 et 150 nœuds en utilisant les mêmes rayons de transmission pour d'observer si la croissance du nombre de CIST est similaire, indépendamment du nombre de nœuds. Compte tenu des temps de calcul exponentiels, le nombre de CIST trouves est celui obtenu après 1h de calcul. Cette solution s'avère optimale sur des rayons de transmissions inférieurs à 35, et devient une borne inférieure par la suite.

Les résultats présentés en Figure 1 montrent le nombre moyen de CIST trouvés et la borne supérieure $\min(\kappa(G), \lambda(G))$, en fonction du rayon de transmission, pour des réseaux de respectivement 50 et 100 noeuds. Les valeurs sont données avec un intervalle de confiance de 95%. Ces valeurs ont également été calculées pour des réseaux de 150 nœuds (non présenté), et indiquent des courbes de progression similaires.



(a) Réseau de 50 nœuds

(b) Réseau de 100 nœuds

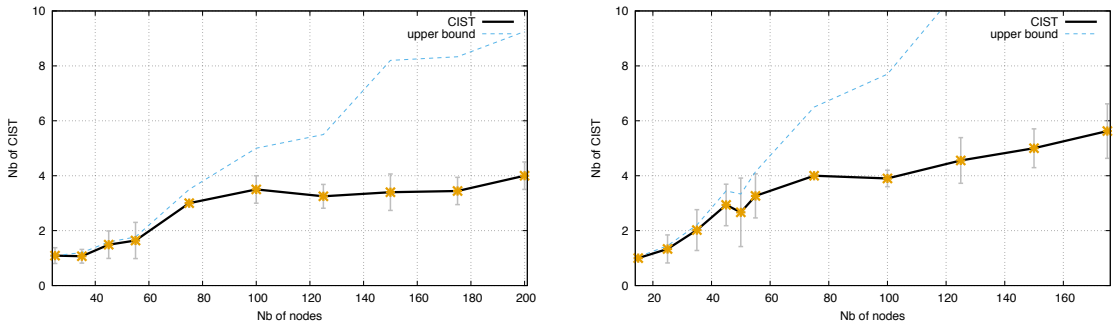
FIGURE 1: Nombre moyen de CIST trouvés et borne supérieure $(\min(\kappa(G), \lambda(G)))$

2.3 Impact du nombre de nœuds à densité constante

Nous vérifions ensuite l'influence du nombre de nœuds sur $C_{CIST}(G)$. Nous effectuons de nouvelles simulations selon le processus suivant : depuis une instance, nous ajoutons de manière incrémentale des nœuds, tout en gardant une densité équivalente en ajustant le rayon de transmission. Ici, la densité $d(G) = 2m/(n(n-1))$ est le rapport entre le nombre d'arêtes de G et le nombre d'arêtes maximal. Nous déterminons le nombre de CIST et répétons 10 fois le processus. Nous évaluons trois types de densité : faible (densité entre 0.9 et 0.12), moyenne (entre 0.15 et 0.18) (non présenté) , et élevée (entre 0.25 et 0.28). La Figure 2 montre la variation moyenne de $C_{CIST}(G)$ et la borne supérieure $\min(\kappa(G), \lambda(G))$ par rapport au nombre de nœds pour les densités faible et élevée (résultats présentés avec un intervalle de confiance de $0,95\%$).

3 Interprétation des résultats

Les résultats présentés dans la Figure 1 confirment l'hypothèse de recherche principale : le nombre de CIST augmente dans les réseaux sans fil lorsque la densité du réseau augmente, faisant des CIST une solution appropriée pour améliorer la robustesse de ces réseaux. Notamment, ces résultats montrent qu'il y



(a) densité du réseau entre 0.15 et 0.18

(b) densité du réseau entre 0.25 et 0.28

FIGURE 2: Nombre moyen de CIST trouvés lorsque le nombre de nœ uds varie.

a un bon espoir de trouver au moins 3 CIST pour des portée de transmission supérieure à 35, quel que soit le nombre de nœds. De plus, il y a une très forte probabilité de trouver au moins 2 CIST même pour de petites densités sur des réseaux de 50 nœuds. Plus étonnant, les résultats présentés en Figure 2) tendent à montrer que la densité n'est pas le seul paramètre qui peut influencer C_{CIST} : pour des densités analogues, le nombre de nœuds semble avoir un impact positif sur le nombre de CIST . Alors que nous déjà démontré une forte corrélation entre $C_{CIST}(G)$ et la densité, ce résultat additionnel suggère qu'il pourrait y avoir une autre mesure qui pourrait bénéficier d'une corrélation plus élevée avec $C_{CIST}(G)$ sur ces réseaux.

Dans ce travail, nous avons concentré nos efforts à montrer que l'utilisation des CIST peut se révéler pertinente dans les réseaux sans fil. Ce travail offre de nombreuses perspectives en terme de recherche opérationnelle : en particulier, nous avons l'intention de proposer une formulation améliorée en utilisant la génération de colonnes pour réduire les temps de calcul, et d'obtenir de nouveaux résultats en étudiant d'autres paramètres topologiques sur des réseaux plus grands. Une autre perspective intéressante serait d'étendre la définition des CIST en incluant un nombre borné de nœuds et / ou d'arêtes sur lesquels les contraintes combinatoires peuvent être assouplies. Un intérêt majeur serait de calculer plus d'arbres, tout en limitant le nombre de nœuds qui ne peuvent pas satisfaire les contraintes spécifiques aux CIST . Notre formulation ILP peut être facilement étendue pour permettre une telle amélioration.

Remerciements : Nous remercions le Conseil Régional de Bourgogne qui a financé ce travail.

Références

[BFNO03] Lali Barrière, Pierre Fraigniaud, Lata Narayanan, and Jaroslav Opatrny. Robust Position-Based Routing in Wireless Ad Hoc Networks with Unstable Transmission Ranges. *Wireless Communications and Mobile Computing*, 3(2) :141–153, 2003.

[CR89] Yuan Chieh Cheng and Thomas G. Robertazzi. Critical Connectivity Phenomena in Multihop Radio Models. *IEEE Transactions on Communications*, 37(7) :770–777, jul 1989.

[Has01] Toru Hasunuma. Completely independent spanning trees in the underlying graph of a line digraph. *Discrete Mathematics*, 234(1-3) :149–157, 2001.

[Has02] Toru Hasunuma. Completely Independent Spanning Trees in Maximal Planar Graphs. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 28th International Workshop, WG 2002*, Cesky Krumlov, 2002. Springer Berlin Heidelberg.

[JC16] Mohit Jain and Satish Chand. Issues and Challenges in Node Connectivity in Mobile Ad Hoc Networks : A Holistic Review. *Wireless Engineering and Technology*, 07 :24–35, 2016.

[MDG+17] A. Moinet, B. Darties, N. Gastineau, J.-L. Baril, and O. Togni. Completely independent spanning trees for enhancing the robustness in ad-hoc Networks. In *International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications*, volume 2017-Octob, 2017.

[Pét12] Ferenc Péterfalvi. Two counterexamples on completely independent spanning trees. *Discrete Mathematics*, 312(4) :808–810, 2012.