



**HAL**  
open science

# Branche d'excitation collective du continuum dans les supraconducteurs BCS et les gaz de fermions superfluides

Hadrien Kurkjian, S N Klimin, J Tempere, Y. Castin

► **To cite this version:**

Hadrien Kurkjian, S N Klimin, J Tempere, Y. Castin. Branche d'excitation collective du continuum dans les supraconducteurs BCS et les gaz de fermions superfluides. 2018. hal-01782342v1

**HAL Id: hal-01782342**

**<https://hal.science/hal-01782342v1>**

Preprint submitted on 4 May 2018 (v1), last revised 16 May 2019 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Branche d'excitation collective du continuum dans les supraconducteurs BCS et les gaz de fermions superfluides

H. Kurkjian, S. Klimin et J. Tempere

*TQC, Universiteit Antwerpen, Universiteitsplein 1, B-2610 Antwerpen, België*

Y. Castin

*Laboratoire Kastler Brossel, École Normale Supérieure, Université PSL,  
CNRS, Sorbonne Université, Collège de France, Paris, France*

Nous montrons l'existence d'une branche d'excitation collective dans le continuum de brisure de paires des gaz de fermions superfluides et des supraconducteurs BCS, comme pressenti par Littlewood et Varma en 1982. Nous prolongeons analytiquement l'équation de la RPA donnant l'énergie des modes collectifs à travers sa ligne de coupure associée au continuum, et obtenons l'intégralité de la relation de dispersion complexe, y compris dans le régime de couplage fort. Pour  $\Delta/\mu > 1,210$  (très proche de la limite unitaire dans un gaz de fermions superfluide), où  $\Delta$  est le paramètre d'ordre et  $\mu$  le potentiel chimique, la partie réelle de la branche est intégralement située dans la bande interdite  $[0, 2\Delta]$ . Dans la limite des grandes longueurs d'ondes, la branche varie quadratiquement avec le nombre d'onde, avec une masse effective complexe que nous calculons analytiquement. Ceci contredit le résultat de Littlewood et Varma qui prévalait jusqu'ici.

*Introduction* – Les systèmes dans lesquels une cohérence macroscopique s'établit entre paires de fermions présentent naturellement dans leur spectre d'excitation un continuum lié à la rupture de ces paires, dont l'énergie est supérieure à deux fois le paramètre d'ordre  $\Delta$ . C'est le cas notamment des supraconducteurs et des gaz froids d'atomes fermioniques de spin  $1/2$ . Le comportement collectif de ces systèmes aux énergies inférieures à  $2\Delta$  est connu : il se caractérise par une branche bosonique d'excitation, de départ phononique dans les gaz neutres, ou plasmonique dans les supraconducteurs avec interactions de Coulomb [1]. La relation de dispersion a été calculée dans l'approximation de la phase aléatoire (RPA) [2, 3] et l'existence de la branche confirmée expérimentalement [4–6].

À l'inverse, la question de l'existence d'un mode collectif *dans* le continuum de brisure de paires, qui suscite un fort intérêt en raison d'une analogie souvent avancée avec le mode de Higgs en théorie des champs [7], n'a pas reçu de réponse définitive. Nous identifions deux lacunes majeures dans le traitement théorique [8–10] de ce mode : (i) il repose sur une hypothèse de symétrie particule-trou et néglige le couplage entre l'amplitude et la phase du paramètre d'ordre, ce qui le restreint au régime de couplage faible, (ii) il est limité aux grandes longueurs d'onde. Ces lacunes sont préjudiciables car elles engendrent des doutes sur l'existence même de ce mode [11], en particulier à vecteur d'onde nul [12].

Dans cet article, nous clarifions considérablement la description des modes collectifs du continuum. En prolongeant analytiquement la matrice des fluctuations gaussiennes du paramètre d'ordre, nous faisons apparaître un pôle dans le propagateur de  $\Delta$  sous la ligne de coupure associée au continuum, pour un potentiel chimique  $\mu > 0$  et à vecteur d'onde non nul uniquement. Nous obtenons la relation de dispersion complète de ce mode sans négliger

le couplage amplitude-phase. Ceci nous permet de traiter le régime de couplage fort ; en particulier nous voyons la partie réelle de la branche être intégralement dans la bande interdite  $[0, 2\Delta]$  lorsque  $\Delta > 1,210\mu$ . Dans la limite de couplage faible et des grandes longueurs d'onde, nous sommes en désaccord net avec la prédiction communément acceptée dans la littérature [10], en particulier pour le taux d'amortissement que nous trouvons de départ quadratique en le nombre d'onde, et non pas linéaire. Toutes nos prédictions sont fondées sur la RPA pour des interactions de contact. Cette théorie décrit qualitativement bien tant les gaz de fermions froids dans le raccordement CBE-BCS que les supraconducteurs BCS (en admettant que les interactions de Coulomb sont sans effet sur les modes collectifs d'amplitude [10]) et est un préalable à toute description plus réaliste des interactions.

La branche que nous trouvons décrit le comportement collectif des paires suite à une excitation de leurs degrés de liberté internes ; sa pulsation n'est donc pas trivialement celle du bord du continuum  $2\Delta/\hbar$ , comme pour les « oscillations de Higgs » observées [12–18] à vecteur d'onde nul. Elle est observable dans un gaz de fermions superfluide par spectroscopie de Bragg résolue en impulsion, de la même façon que la référence [6] a observée le mode de Bogolioubov-Anderson. Le pôle dans le prolongement analytique se traduit par l'apparition d'un pic élargi dans la fonction de réponse du paramètre d'ordre.

*Fluctuations du paramètre d'ordre* – Nous considérons un système homogène de fermions de masse  $m$ , de spin  $\sigma = \uparrow / \downarrow$  et de potentiel chimique  $\mu$ , en interactions attractives de contact. À température nulle  $T = 0$ , les fluctuations du paramètre d'ordre  $\Delta$  autour de sa valeur d'équilibre admettent des modes propres, qui sont les modes collectifs du système. En développant au second ordre en les fluctuations d'amplitude  $\delta\lambda$  et de phase  $\delta\theta$

on obtient l'action gaussienne [19]

$$S = S_0 + \int d\omega \int d^3q (i\Delta\delta\theta_{-\mathbf{q}} \delta\lambda_{-\mathbf{q}}^* M(\omega, \mathbf{q}) \begin{pmatrix} -i\Delta\delta\theta_{\mathbf{q}} \\ \delta\lambda_{\mathbf{q}} \end{pmatrix}) \quad (1)$$

La matrice  $M$  des fluctuations est symétrique et donne accès au propagateur du champ  $\Delta$  par une simple inversion. L'équation donnant l'énergie  $z_{\mathbf{q}}$  des modes collectifs en fonction de leur vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  s'écrit donc

$$\det M(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0 \quad (2)$$

Le paramètre d'ordre  $\Delta$  étant relié à la condensation de paires, les coefficients de sa matrice de fluctuations contiennent une intégrale sur le vecteur d'onde interne  $\mathbf{k}$  des paires, faisant intervenir  $\xi_k = \hbar^2 k^2 / 2m - \mu$  et  $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$  les relations de dispersion des fermions libres et des quasi-particules BCS respectivement, ainsi que l'énergie d'une paire d'excitations de vecteur d'onde total  $\mathbf{q}$ ,  $E_{\mathbf{kq}} = E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}$  :

$$M_{\pm\pm}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} \left[ \frac{(W_{\mathbf{kq}}^{\pm})^2}{z - E_{\mathbf{kq}}} - \frac{(W_{\mathbf{kq}}^{\pm})^2}{z + E_{\mathbf{kq}}} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \right] \quad (3)$$

$$M_{+-}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} W_{\mathbf{kq}}^+ W_{\mathbf{kq}}^- \left[ \frac{1}{z - E_{\mathbf{kq}}} + \frac{1}{z + E_{\mathbf{kq}}} \right] \quad (4)$$

où les indices  $+$  et  $-$  se rapportent respectivement aux fluctuations de phase et d'amplitude et nous introduisons la notation  $(W_{\mathbf{kq}}^{\pm})^2 = (E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \pm \Delta^2) / (2E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})$ .<sup>1</sup> Relevons que l'équation (2) se retrouve à l'identique dans la RPA [1, 20, 21], par resommation de diagrammes [3] ou par linéarisation des équations BCS dépendant du temps [22].

L'équation (2) étant invariante par changement de  $z$  en  $-z$ , nous pouvons nous restreindre à  $\text{Re } z \geq 0$ . La matrice  $M$  admet alors une ligne de coupure pour  $z \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \{E_{\mathbf{kq}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}$ , provenant des termes ayant  $z - E_{\mathbf{kq}}$  au dénominateur dans (3-4). Telle quelle, l'équation (2) admet au plus une solution à  $\mathbf{q}$  fixé : celle-ci est réelle, d'énergie inférieure au continuum  $\hbar\omega_{\mathbf{B},\mathbf{q}} < \min \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$  et correspond à la branche bosonique d'Anderson-Bogoliubov [3]. Ce n'est pas ce que nous cherchons. Les modes collectifs que nous voulons caractériser se trouvent *dans* le continuum, c'est-à-dire *a priori* pour  $\text{Re } z_{\mathbf{q}} > \min \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ . Comme dans le cas d'école d'un atome couplé au rayonnement électromagnétique [23], la bonne façon d'obtenir une solution à (2) en présence du continuum est de prolonger analytiquement la matrice  $M$  à travers sa ligne de coupure [8]. Ceci est l'occasion pour nous de rappeler la très belle prescription de Nozières [24, 25] pour prolonger

analytiquement une fonction de la forme

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\rho(\omega)}{z - \omega}, \quad (5)$$

analytique pour  $\text{Im } z \neq 0$  mais présentant une ligne de coupure sur l'axe réel, en tout point où la densité spectrale  $\rho(\omega)$  est non nulle. La contribution non analytique à  $M_{\sigma\sigma'}$ , avec  $\sigma, \sigma' = \pm$ , se met naturellement sous la forme (5) avec la densité spectrale

$$\rho_{\sigma\sigma'}(\omega, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} W_{\mathbf{kq}}^{\sigma} W_{\mathbf{kq}}^{\sigma'} \delta(\hbar\omega - E_{\mathbf{kq}}) \quad (6)$$

Le prolongement analytique de  $f$  du demi-plan complexe supérieur au demi-plan inférieur, à travers un intervalle  $]\omega_1, \omega_2[$  de la ligne de coupure où la fonction  $\rho$  est analytique, s'écrit simplement

$$f_{\downarrow}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } \text{Im } z > 0 \\ f(z) - 2i\pi\rho(z) & \text{si } \text{Im } z \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

où  $z \mapsto \rho(z)$  est le prolongement analytique de  $\rho$  pour  $\text{Im } z \neq 0$ . On s'en convainc sans mal en écrivant  $\rho(\omega) = (\rho(\omega) - \rho(z)) + \rho(z)$  dans (5).

Pour effectuer le prolongement analytique de  $M$ , il nous faut donc étudier la fonction  $\omega \mapsto \rho_{\sigma\sigma'}$  en premier lieu sur l'axe réel, en cherchant les singularités de la fonction et de ses dérivées. Pour cela, nous calculons l'intégrale sur  $\mathbf{k}$  dans (6) dans un repère sphérique d'axe  $\mathbf{q}$ . L'intégrale sur l'angle azimutal disparaît par invariance par rotation et nous utilisons le Dirac pour effectuer l'intégrale sur l'angle polaire paramétré par  $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} / kq$ . L'intégrale restante sur  $k$  est alors restreinte à un domaine représenté sur la figure 1, dont la forme dépend de  $\omega$ . Lorsque  $\mu > 0$  la branche d'excitation BCS possède son minimum en  $k_0 = \sqrt{2m\mu/\hbar^2}$ ; pour  $0 < q < 2k_0$ , la fonction  $\omega \mapsto \rho_{\sigma\sigma'}$  possède alors trois points anguleux liés à un changement de configuration de ce domaine, ce qui découpe l'axe réel en quatre secteurs distincts (voir la figure 1). (i) Pour  $\omega < \omega_1 = 2\Delta/\hbar$ , la condition de résonance  $\hbar\omega = E_{\mathbf{kq}}$  n'est jamais vérifiée si bien que  $\rho_{\sigma\sigma'}(\omega < \omega_1) = 0$ . Ce secteur est en dehors de la ligne de coupure  $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ . (ii) Pour  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  la résonance est atteinte pour  $k \in [k_1, k_2]$ , avec

$$\frac{\hbar k_{1,2}}{(2m)^{1/2}} = \sqrt{\mu - \frac{\hbar^2 q^2}{8m} \pm \frac{\sqrt{\hbar^2 \omega^2 - 4\Delta^2}}{2}} \quad (8)$$

(iii) Pour  $\omega_2 < \omega < \omega_3$ , la résonance se produit pour  $k \in [k_1, k'_1] \cup [k'_2, k_2]$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont toujours donnés par (8) et  $k'_1$  et  $k'_2$  sont les solutions réelles positives du couple d'équations polynomiales

$$\tilde{\omega}^4 - 4\tilde{\omega}^2 P(\tilde{k}, \tilde{q}) + 4R^2(\tilde{k}, \tilde{q}) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}^2 - 2P(\tilde{k}, \tilde{q}) > 0 \quad (9)$$

avec les polynômes  $P(x, y) = (x^2 + y^2/4 - \mu/\Delta)^2 + x^2 y^2 + 1$  et  $R(x, y) = 2xy(x^2 + y^2/4 - \mu/\Delta)$  et les notations

1. Avec  $W_{\mathbf{kq}}^+ > 0$  pour tout  $\mathbf{k}$  et  $W_{\mathbf{kq}}^- > 0$  si et seulement si  $k^2 > 2m\mu/\hbar^2 - q^2/4$ .

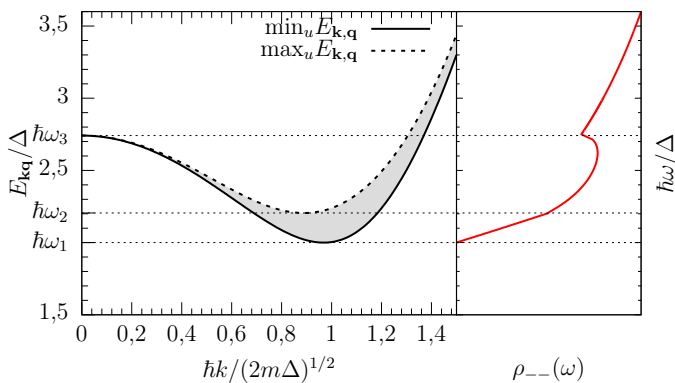


FIGURE 1: En fonction de  $k$ , l'intervalle entre  $\min_u E_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$  atteint en  $u = 0$  (trait plein à gauche) et  $\max_u E_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$  atteint en  $u = \pm 1$  (tireté à gauche) définit une bande d'énergie (zone en grisé à gauche) sur laquelle la résonance  $\hbar\omega = E_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$  se produit pour au moins une valeur de  $u = \cos(\mathbf{k}, \mathbf{q})$  appartenant à  $[-1, 1]$ . À  $\omega$  fixé, l'intervalle d'intégration sur  $k$  dans (6) se lit horizontalement; en fonction de  $\omega$ , sa structure subit 3 transitions en  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  (pointillés), qui se traduisent par des points anguleux dans la densité spectrale, ici l'exemple de  $\rho_{--}$  (trait plein rouge à droite). Sur cette figure,  $\mu/\Delta = 1$  et  $\hbar q/\sqrt{2m\Delta} = 0,5$ .

$\tilde{k}^2 = \hbar^2 k^2/2m\Delta$ ,  $\tilde{q}^2 = \hbar^2 q^2/2m\Delta$  et  $\tilde{\omega} = \hbar\omega/\Delta$ . (iv) Pour  $\omega > \omega_3$ , les solutions  $k_1$  et  $k'_1$  ne sont plus réelles, l'intervalle d'intégration se réduit donc à  $[k'_2, k_2]$ .

Une fois cette étude faite, l'extension des fonctions  $\rho_{\sigma\sigma'}$  au plan complexe est immédiate, il suffit de remplacer  $\omega$  par  $z$  dans les équations (8) et (9) donnant les bornes d'intégration,  $\rho_{\sigma\sigma'}(z)$  étant alors donnée par une intégrale curviligne entre des bornes complexes. En appliquant la prescription de Nozières (7), on obtient ainsi un prolongement analytique de  $M$ , où les points anguleux  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  deviennent les points de branchement de trois lignes de coupure.

*Étude numérique à  $q$  quelconque* – Nous trouvons une solution  $z_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} - i\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}/2$  à l'équation (2) dans le prolongement analytique à travers l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$ , que nous identifions comme l'énergie du mode collectif de « Littlewood-Varma » que nous cherchons. La relation de dispersion  $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$  est représentée sur la figure 2 pour différentes forces d'appariement  $\mu/\Delta = 1/10$ , 10 et 100 ( $1/k_F a \simeq 0,5$ ,  $-1,5$  et  $-3,0$  dans un gaz de fermions froids de spin 1/2, avec  $k_F$  le nombre d'onde de Fermi et  $a$  la longueur de diffusion dans l'onde  $s$ ). De départ quadratique à partir de sa limite  $2\Delta$  en  $q = 0$ , la branche passe par un maximum de hauteur en énergie proportionnelle à  $\Delta$  dans le régime de couplage faible  $\Delta \ll \mu$ . Elle entre ensuite dans la bande interdite  $[0, 2\Delta]$  en  $q = q_{\text{sup}}$ . Dans le régime de couplage fort  $\Delta > \mu$ , le domaine  $[0, q_{\text{sup}}]$  où l'énergie de la branche est supérieure à  $2\Delta$  se réduit, jusqu'à sa disparition pour  $\mu/\Delta \simeq 0,8267$ . Le taux d'amortissement  $\Gamma_{\mathbf{q}}$  est lui une fonction strictement croissante

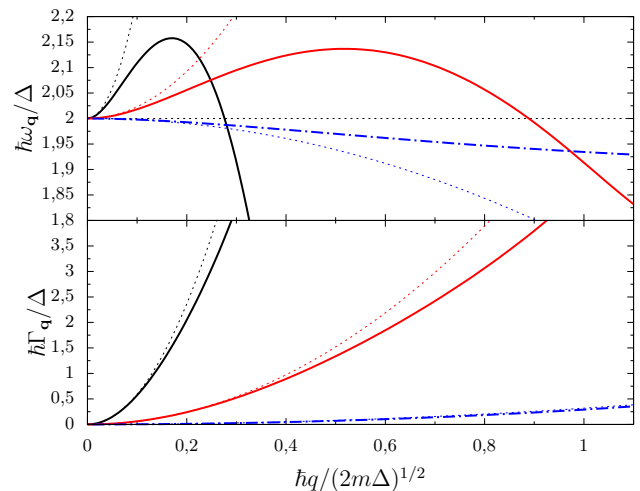


FIGURE 2: Pulsation (en haut) et taux d'amortissement (en bas) des modes collectifs de Higgs en fonction de leur nombre d'onde  $q$  pour  $\mu/\Delta = 100$  ( $1/k_F a \simeq -3,0$ , trait plein noir),  $\mu/\Delta = 10$  ( $1/k_F a \simeq -1,5$ , trait plein rouge) et  $\mu/\Delta = 0,1$  ( $1/k_F a \simeq 0,5$ , tireté pointillé bleu). Les courbes pointillées montrent le comportement quadratique en  $q$  aux faibles  $q$  obtenu analytiquement des équations (12)-(16).

de  $q$ , de départ quadratique à partir de sa limite de valeur nulle en  $q = 0$ . Ceci est en désaccord marqué avec la prédiction communément acceptée dans la littérature d'un taux d'amortissement linéaire en  $q$  [10].

La branche disparaît finalement en  $q = 2k_0$  (donc avant que la branche de Bogoliubov-Anderson ne rejoigne le continuum [3]) lorsque l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$  à travers lequel passe notre prolongement analytique se réduit à un point. Enfin nous excluons l'existence d'une branche d'énergie supérieure à  $2\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$  dans le régime CBE où  $\mu < 0$  et où les trois singularités de  $\rho_{\sigma\sigma'}$  se regroupent,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{(|\mu| + \hbar^2 q^2/2m)^2 + \Delta^2}/\hbar$ .

*Limite des grandes longueurs d'ondes* – Dans cette limite, nous obtenons plusieurs résultats analytiques qui corroborent notre étude numérique. Nous traitons à part le cas singulier  $q = 0$ , où la matrice  $M(z, \mathbf{q} = 0)$  est exprimable en termes des fonctions elliptiques complètes de première et troisième espèce,  $K(k)$  et  $\Pi(n, k)$  [26] :

$$\text{th}\zeta \tilde{M}_{++}(z, 0) = \frac{\tilde{M}_{--}(z, 0)}{\text{th}\zeta} = -\pi(2e^t)^{1/2}[F(\zeta) - F(-\zeta)]$$

$$\tilde{M}_{+-}(z, 0) = -\pi(2e^t)^{1/2}[F(\zeta) + F(-\zeta)] \quad (10)$$

avec les variables définies par  $\mu/\Delta = \text{sh } t$  et  $z = 2\Delta \text{ch } \zeta$ ,

$\zeta$  contraint par  $\text{Re } \zeta \geq 0$  et  $-\pi/2 \leq \text{Im } \zeta \leq \pi/2$  et<sup>2</sup>

$$F(\zeta) = (\text{sh } t + \text{sh } \zeta) [\Pi(e^{t+\zeta}, ie^t) - \Pi(-e^{t-\zeta}, ie^t)] + K(ie^t) \text{ch } \zeta \quad (11)$$

L'équation (2) s'écrit alors simplement  $F(\zeta)F(-\zeta) = 0$ . La seule solution de cette équation, même après prolongement analytique<sup>3</sup> de  $F(\zeta)$ , est  $\zeta = \pm i\pi/2$  (soit  $z = 0$ ) : c'est le point de départ de la branche phononique d'Anderson-Bogolioubov. Ainsi, le point limite  $\omega = 2\Delta/\hbar$  en  $q = 0$  de la branche collective du continuum n'est pas solution de (2) :  $F(\zeta)$  admet une limite finie et non nulle  $F(0)$  lorsque  $\zeta \rightarrow 0$  avec  $\text{Im } z > 0$ . Pour  $q = 0$ , il n'y a donc pas de mode collectif de pulsation  $2\Delta/\hbar$ , et les oscillations observées [15–18] à cette pulsation correspondent simplement au bord du continuum de brisure de paires, comme l'avait compris les références [9, 12, 13]. Le comportement collectif se manifeste plutôt dans l'amortissement en loi de puissance des oscillations [13, 14].

Pour  $q$  petit mais non nul, et  $\mu > 0$ , le secteur de résonance entre  $\hbar\omega_1 = 2\Delta$  et  $\hbar\omega_2 = 2\Delta + \mu\hbar^2 q^2/2m\Delta + O(q^4)$  sur la figure 1 a une largeur en énergie  $O(q^2)$ , et  $O(q)$  en le nombre d'onde  $k$  autour du minimum  $k_0 = \sqrt{2m\mu/\hbar^2}$  de la branche BCS. Ceci suggère de poser

$$z_{\mathbf{q}} = 2\Delta + Z \frac{\hbar^2 q^2}{4m^*} + O(q^3) \quad \text{et} \quad k = k_0 + Kq \quad (12)$$

avec  $m^* = m\Delta/2\mu$  la masse effective de la branche BCS au voisinage de son minimum. On concentre ainsi l'attention sur le domaine des vecteurs d'onde où le dénominateur dans (3,4) est d'ordre  $q^2$  :

$$z - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = z - 2\Delta - \frac{\hbar^2 q^2}{m_*} (K^2 + u^2/4) + O(q^3) \quad (13)$$

En utilisant alors les développements des amplitudes du numérateur  $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ \sim 1$  et  $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- \sim \hbar^2 k_0 q K/m\Delta$ , puis en effectuant l'intégrale sur la variable angulaire  $u$  avant celle sur  $K$  (non sans avoir vérifié que le reparamétrage (12) donne lieu lorsque  $q \rightarrow 0$  à une intégrale absolument convergente sur  $K$ ) on obtient sans mal les expressions

2. À l'aide des densités spectrales  $\rho_{\sigma\sigma'}(\omega)$ , on exprime  $M_{\sigma\sigma'}(z, 0)$  sous forme d'une intégrale sur  $\omega$ , en distinguant pour  $\mu > 0$  les contributions de  $k < k_0$  et  $k > k_0$ . Le changement de variable  $\hbar\omega = \Delta(x^2 + 1/x^2)$ ,  $0 < x < 1$ , fait alors disparaître la racine carrée  $(\hbar^2\omega^2 - 4\Delta^2)^{1/2} = \Delta(1/x^2 - x^2)$  et conduit à l'intégrale  $\int dx R(x)/\sqrt{P(x)}$ , où  $P(x)$  est un polynôme de degré 4 et  $R(x)$  une fraction rationnelle, ramenable à une combinaison linéaire d'intégrales elliptiques (cf. §8.110 de [26]).

3. La ligne de coupure  $[2\Delta, +\infty[$  (respectivement  $[2\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}, +\infty[$ ) en  $z$  donne une ligne de coupure en  $\zeta$   $[0, +\infty[$  pour  $\mu > 0$  (respectivement  $[-t, +\infty[$  pour  $\mu < 0$ ).

analytiques pour  $\text{Im } z > 0$  :

$$\tilde{M}_{++}(z, \mathbf{q}) = -\frac{i\pi^2 k_\Delta}{q} \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} + O(q) \quad (14)$$

$$\tilde{M}_{--}(z, \mathbf{q}) = -\frac{i\pi^2 \mu q}{2\Delta k_\Delta} \left[ \sqrt{Z-1} + Z \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right] + O(q^3) \quad (15)$$

où nous introduisons  $k_\Delta = \sqrt{2m\Delta/\hbar^2}$  et adimensionnons les intégrales  $\tilde{M}_{\sigma\sigma'} = M_{\sigma\sigma'}\Delta/k_\Delta^3$ . Puisque la divergence de  $M_{++}$  d'ordre  $1/q$  est compensée par l'annulation de  $M_{--}$  linéaire en  $q$ , il suffit de prendre la limite finie et non nulle (10) de  $M_{+-}$  en  $q = 0$  et  $\hbar\omega = 2\Delta$  ( $\zeta = 0$ ). Il n'y a plus qu'à insérer les expressions (10,14,15) dans l'équation de la RPA (2) et à prolonger analytiquement le produit  $M_{++}M_{--}$  à travers sa ligne de coupure  $[0, 1]$  en  $Z$  (correspondant au segment  $[\hbar\omega_1, \hbar\omega_2]$  en  $z$ ) grâce aux substitutions  $\text{asin} 1/\sqrt{Z} \rightarrow \pi - \text{asin} 1/\sqrt{Z}$  et  $\sqrt{Z-1} \rightarrow -\sqrt{Z-1}$  pour obtenir l'équation explicite mais transcendante sur  $Z$  :

$$\left[ \pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right] \left[ Z \left( \pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right) - \sqrt{Z-1} \right] + \frac{2}{\pi^4 \mu} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right)^3 M_{+-}^2(2\Delta, 0) = 0 \quad (16)$$

Le prolongement vaut pour tout le demi-plan inférieur, donc y compris pour  $\text{Re } z < 2\Delta$  ( $\text{Re } Z < 0$ ). L'unique solution de l'équation (16) reproduit fidèlement le coefficient de  $q^2$  dans la figure 2; elle est représentée sur la figure 3 en fonction de  $\mu/\Delta$ . La partie réelle change de signe en  $\mu/\Delta \simeq 0,8267$ , ce qui confirme l'existence d'une branche d'énergie inférieure à  $2\Delta$  dans le régime de couplage fort. Il ne faut pas surinterpréter l'existence de solutions de pulsation inférieure à  $2\Delta$  : elles demeurent séparées du segment  $[0, 2\Delta]$  de l'axe réel par une ligne de coupure, si bien que leur effet ne se fait sentir au voisinage de l'axe réel qu'aux énergies supérieures à  $2\Delta$ .

Dans la limite de couplage faible  $\mu/\Delta \rightarrow +\infty$ ,  $M_{+-}$  tend vers zéro à cause de la symétrie particule-trou  $k \leftrightarrow k_0 - k$ , si bien que l'équation de la RPA se réduit pour  $q \neq 0$  à  $M_{--} = 0$ , et que l'équation (16) sur  $Z$  se réduit à la partie dépendante de  $Z$  de la première ligne. Le mode collectif de Littlewood-Varma correspond bien à un pur mode d'amplitude, l'annulation de  $M_{++}$  donnant le mode de phase phononique dans cette limite, comme il est dit dans [10]. Cependant, nous obtenons une relation de dispersion fort différente

$$z_{\mathbf{q}} \underset{\mu/\Delta \rightarrow +\infty}{\overset{q \rightarrow 0}{\simeq}} 2\Delta + (0,2369 - 0,2956i) \frac{\hbar^2 q^2}{4m^* \Delta} \quad (17)$$

où même la partie réelle de  $Z$  diffère de celle  $2/3$  de [10].

Notre calcul montre les limites de l'analogie habituelle avec les modes de Higgs en théorie des champs : bien qu'il s'agisse aussi d'un mode d'amplitude dans la limite de couplage faible, et qu'il possède une bande interdite, le mode collectif, ici plongé dans un continuum,

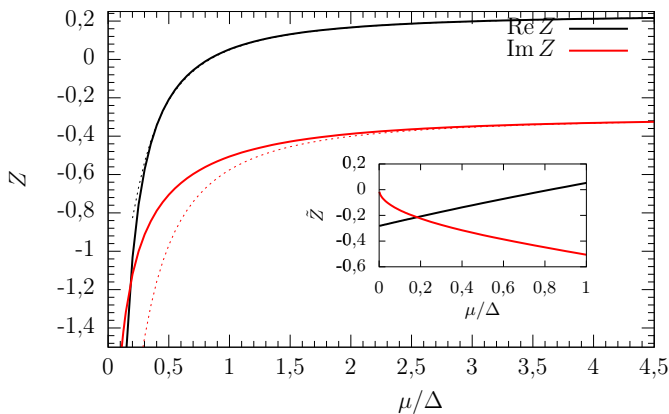


FIGURE 3: La partie réelle (trait plein noir) et imaginaire (trait plein rouge) du coefficient adimensionné  $Z$  de  $q^2$  dans l'énergie  $z_{\mathbf{q}}$  du mode de « Littlewood-Varma » sont représentées en fonction de  $\mu/\Delta$ . Les courbes pointillées donnent le développement asymptotique dans la limite de couplage faible  $\mu/\Delta \rightarrow +\infty$  :  $Z = Z_0 - \frac{2Z_0^2}{Z_0 - 1} \left(\frac{\Delta}{\pi\mu}\right)^2 \ln^2 \frac{\Delta}{8\mu e} + \dots$  avec  $Z_0 = 0,2369 - 0,2956i$ . L'encart montre le coefficient redimensionné  $\tilde{Z} = Z\mu/\Delta = Zm/2m^*$  qui admet la limite finie réelle  $\tilde{Z}_\infty = -16K^2(i)/\pi^4 \simeq -0,2823$  dans la limite de couplage fort  $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$ , sa partie imaginaire tendant vers zéro comme  $-12K(i)(\mu/\Delta)^{1/2}/\pi^3$ .

ne s'obtient qu'après traitement non perturbatif du couplage aux degrés de liberté fermioniques ; aucune chance donc de l'obtenir à partir d'une action effective de basse énergie comme suggéré parfois [7, 27].

*Observabilité dans les fonctions de réponse* – La branche collective que nous prédisons s'observe dans les fonctions de réponse du système. Nous donnons sur la figure 4 l'exemple de la fonction de réponse du paramètre d'ordre  $\text{Abs}[N/\det M](\omega + i0^+, \mathbf{q})$  avec  $N = (M_{++} + M_{--})/2 + M_{+-}$ , obtenue à partir des fonctions de réponse d'amplitude et de phase par le changement de variable  $\delta\Delta = \delta\lambda + \Delta i\delta\theta$ . Aux faibles  $q$  (lorsque l'amortissement du mode est faible) la branche obtenue dans le prolongement analytique prédit remarquablement bien la position d'un pic élargi dans la fonction de réponse. Nous notons d'ailleurs avec un vif intérêt que la référence [6] observe un tel pic dans ses mesures de la fonction de réponse densité-densité, qui pourrait bien correspondre à la branche collective de « Higgs », en particulier si la dépendance en  $q^2$  de la position du pic aux faibles  $q$  se confirmait.

*Conclusion* – Nous avons établi sur des bases théoriques solides l'existence d'une branche collective dans le continuum de brisure de paires d'un supraconducteur BCS ou d'un gaz de fermions superfluide, et nous avons caractérisé intégralement sa relation de dispersion et son taux d'amortissement dans l'approximation RPA. Nous apportons ainsi une réponse claire et rigoureuse à un

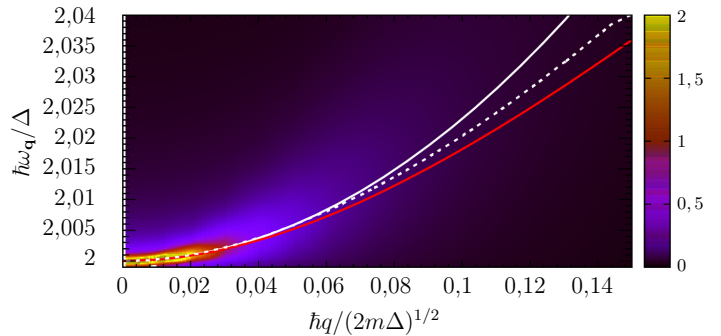


FIGURE 4: L'intensité de la fonction de réponse du champ de paire est représentée en couleurs et en unités arbitraires en fonction de  $q$  et  $\omega$  dans le régime BCS ( $\mu/\Delta = 10$ ). Le sommet du pic (tireté blanc) de la fonction est bien prédit aux faibles  $q$  par la branche collective du prolongement analytique (trait plein rouge et trait plein blanc pour son approximation quadratique (12)).

vieux problème de matière condensée. Notre branche apparaît nettement dans les fonctions de réponse du système et peut donc être mesurée dans un gaz d'atomes froids par spectroscopie de Bragg.

- 
- [1] P.W. ANDERSON : Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 112:1900–1916, 1958.
  - [2] M. MARINI, F. PISTOLESI et G.C. STRINATI : Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : analytic results for the crossover in three dimensions. *European Physical Journal B*, 1:151–159, 1998.
  - [3] R. COMBESCOT, M. YU. KAGAN et S. STRINGARI : Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 74:042717, octobre 2006.
  - [4] K. KADOWAKI, I. KAKEYA, M. B. GAIFULLIN, T. MOCHIKU, S. TAKAHASHI, T. KOYAMA et M. TACHIKI : Longitudinal Josephson-plasma excitation in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  : Direct observation of the Nambu-Goldstone mode in a superconductor. *Phys. Rev. B*, 56:5617–5621, septembre 1997.
  - [5] J. JOSEPH, B. CLANCY, L. LUO, J. KINAST, A. TURLAPOV et J. E. THOMAS : Measurement of Sound Velocity in a Fermi Gas near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 98:170401, avril 2007.
  - [6] Sascha HOINKA, Paul DYKE, Marcus G. LINGHAM, Jami J. KINNUNEN, Georg M. BRUUN et Chris J. VALE : Goldstone mode and pair-breaking excitations in atomic Fermi superfluids. *Nature Physics*, 13:943–946, juin 2017.
  - [7] David PEKKER et C.M. VARMA : Amplitude/Higgs Modes in Condensed Matter Physics. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 6(1):269–297, 2015.
  - [8] Albert SCHMID : The approach to equilibrium in a pure superconductor. The relaxation of the Cooper pair density. *Physik der kondensierten Materie*, 8(2):129–140, no-

- vembre 1968.
- [9] I. O. KULIK, Ora ENTIN-WOHLMAN et R. ORBACH : Pair susceptibility and mode propagation in superconductors : A microscopic approach. Journal of Low Temperature Physics, 43(5):591–620, Jun 1981.
- [10] P. B. LITTLEWOOD et C. M. VARMA : Amplitude collective modes in superconductors and their coupling to charge-density waves. Phys. Rev. B, 26:4883–4893, novembre 1982.
- [11] T. CEA, C. CASTELLANI et L. BENFATTO : Nonlinear optical effects and third-harmonic generation in superconductors : Cooper pairs versus Higgs mode contribution. Phys. Rev. B, 93:180507, mai 2016.
- [12] R. G. SCOTT, F. DALFOVO, L. P. PITAEVSKII et S. STRINGARI : Rapid ramps across the BEC-BCS crossover : A route to measuring the superfluid gap. Phys. Rev. A, 86:053604, novembre 2012.
- [13] A.F. VOLKOV et Ch. M. KOGAN : Collisionless relaxation of the energy gap in superconductors. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 65:2038, 1973.
- [14] V. GURARIE : Nonequilibrium Dynamics of Weakly and Strongly Paired Superconductors. Phys. Rev. Lett., 103:075301, août 2009.
- [15] Ryusuke MATSUNAGA, Yuki I. HAMADA, Kazumasa MAKISE, Yoshinori UZAWA, Hirotaka TERAJ, Zhen WANG et Ryo SHIMANO : Higgs Amplitude Mode in the BCS Superconductors  $Nb_{1-x}Ti_xN$  Induced by Terahertz Pulse Excitation. Phys. Rev. Lett., 111:057002, juillet 2013.
- [16] M.-A. MÉASSON, Y. GALLAIS, M. CAZAYOUS, B. CLAIR, P. RODIÈRE, L. CARIO et A. SACUTO : Amplitude Higgs mode in the  $2H - NbSe_2$  superconductor. Phys. Rev. B, 89:060503, février 2014.
- [17] A. F. KEMPER, M. A. SENTEF, B. MORITZ, J. K. FREE-RICKS et T. P. DEVEREAUX : Direct observation of Higgs mode oscillations in the pump-probe photoemission spectra of electron-phonon mediated superconductors. Phys. Rev. B, 92:224517, décembre 2015.
- [18] K. GAO, C. KOLLATH et M. KÖHL : Observation of the Higgs mode in strongly interacting Fermi gases. À paraître dans Nature Physics.
- [19] Roberto B. DIENER, Rajdeep SENSARMA et Mohit RANDERIA : Quantum fluctuations in the superfluid state of the BCS-BEC crossover. Phys. Rev. A, 77:023626, février 2008.
- [20] Hadrien KURKJIAN et Jacques TEMPERE : Absorption and emission of a collective excitation by a fermionic quasiparticle in a Fermi superfluid. New Journal of Physics, 19(11):113045, 2017.
- [21] H. KURKJIAN : Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure, Paris, 2016.
- [22] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Three-Phonon and Four-Phonon Interaction Processes in a Pair-Condensed Fermi Gas. Annalen der Physik, 529(9):1600352, 2017.
- [23] C. COHEN-TANNOUJJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG : Processus d'interaction entre photons et atomes. InterEditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [24] Philippe NOZIÈRES : Le problème à  $N$  corps : propriétés générales des gaz de fermions. Dunod, Paris, 1963.
- [25] Francesco MATERA et Matthias F. WAGNER : Low-energy modes of spin-imbalanced Fermi gases in BCS phase. The European Physical Journal D, 71(11):293, novembre 2017.
- [26] I. S. GRADSHTEYN et I. M. RYZHIK : Tables of Integrals, Series, and Products. Academic Press, San Diego, 1994.
- [27] Boyang LIU, Hui ZHAI et Shizhong ZHANG : Evolution of the Higgs mode in a fermion superfluid with tunable interactions. Phys. Rev. A, 93:033641, mars 2016.