



**HAL**  
open science

## Attachement préférentiel comme unique équilibre

Chen Avin, Avi Cohen, Pierre Fraigniaud, Zvi Lotker, David Peleg

► **To cite this version:**

Chen Avin, Avi Cohen, Pierre Fraigniaud, Zvi Lotker, David Peleg. Attachement préférentiel comme unique équilibre. ALGOTEL 2018 - 20èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, May 2018, Roscoff, France. hal-01782206

**HAL Id: hal-01782206**

**<https://hal.science/hal-01782206>**

Submitted on 1 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Attachement préférentiel comme unique équilibre<sup>†</sup>

Chen Avin<sup>1</sup>, Avi Cohen<sup>2</sup>, Pierre Fraigniaud<sup>3</sup>,<sup>‡</sup> Zvi Lotker<sup>1</sup>,<sup>§</sup> David Peleg<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ben Gurion University, Beer Sheva, Israel

<sup>2</sup>Weizmann Institute, Rehovot, Israel

<sup>3</sup>IRIF, CNRS and University Paris Diderot, France

---

Cet article démontre que la règle de l'attachement préférentiel apparaît comme *unique* équilibre de Nash d'un jeu naturel de formation de réseaux sociaux. Dans ce jeu, les nœuds se joignent au réseau l'un après l'autre, et chaque nœud souhaite maximiser son degré ultime, ce dernier représentant son capital social dans la « société » composée des nœuds et de leurs connexions. Ce résultat fournit un argument formel supplémentaire en faveur de l'utilisation du modèle de l'attachement préférentiel, conçu initialement pour capturer le mécanisme intuitif selon lequel les plus favorisés tendent à accroître leur avantage sur les autres acteurs.

---

## 1 Introduction

Le modèle d'attachement préférentiel [AB02] est très certainement un des modèles les plus communément utilisés pour modéliser tous types de réseaux, dont en particulier les réseaux sociaux. Ce modèle est basé sur la règle selon laquelle un nœud  $u$  de degré  $d_u$  recevra une connexion avec un nouveau nœud avec probabilité  $d_u / \sum_v d_v$ . Il génère des graphes synthétiques dont les caractéristiques (distances, distribution statistique des degrés, corrélation entre les degrés des voisins, etc.) sont très proches de celles des réseaux réels, même si le modèle ne reflète que très partiellement le fort coefficient de clustering typiquement observé dans les graphes de terrain. Cela dit, les raisons profondes pour lesquelles l'attachement préférentiel correspond si bien aux observations sont encore largement inconnues. En effet, à notre connaissance, alors que quantité d'observations empiriques justifient l'utilisation de l'attachement préférentiel dans le contexte des réseaux sociaux [Bar16], très peu de résultats analytiques formels justifient cet usage. Dans cet article, nous remédions partiellement à cet état de faits en montrant que l'attachement préférentiel est l'*unique* choix rationnel pour des joueurs impliqués dans un jeu naturel de formation de réseaux.

### 1.1 Le jeu de recommandation basé sur la prospérité

Nous considérons l'évolution d'un réseau social comme un jeu, appelé le jeu de *recommandation basé sur la prospérité* (RBP), dans lequel chaque nœud a pour objectif de maximiser son degré. Le seul choix de chaque nœud lui est offert lorsqu'il rejoint le réseau : il consiste dans sa stratégie de connexion aux nœuds préexistants dans ce réseau. Plus spécifiquement, nous considérons un processus selon lequel les nœuds se joignent les uns après les autres au réseau. Initialement, le réseau consiste en un unique nœud. Le nœud  $v_t$  arrive au temps discret  $t > 1$ , et se connecte à un nœud existant choisi aléatoirement. Ce choix est effectué sur la base du capital social courant de chaque nœud déjà présent dans le réseau, modélisé par son degré. Ainsi,  $v_t$  choisit un indice  $i \in \{1, \dots, t-1\}$  selon une distribution de probabilité  $\pi_t$  sur la séquence de degrés courante  $D = (d_1, \dots, d_{t-1})$ ,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{t-1}$  correspondant aux nœuds actuellement

---

<sup>†</sup>Une version étendue de cette note est à paraître dans les actes de *The Web Conference* (anciennement connue comme la *World Wide Web Conference*, ou WWW), Lyon, France, April 23-27, 2018 — voir [ACF<sup>+</sup>18].

<sup>‡</sup>Recherche partiellement supportée par le projet ANR DESCARTES, et menée au sein de l'équipe-projet Inria GANG.

<sup>§</sup>Recherche partiellement supportée par le LabEx Sciences Mathématiques de Paris (SMP). Ce travail fut effectué partiellement durant la visite de Zvi Lotker à l'IRIF, CNRS et Université Paris Diderot, financée par le LabEx SMP et le LIA CNRS FILOFOCS.

présents dans le réseau. Ensuite,  $v_t$  contacte un nœud  $u$  de degré  $d_i$ , et demande une connexion à  $u$ . Ce dernier, appelé *hôte*, peut accepter la connexion ou la déléguer à un de ses voisins. Cette fonctionnalité donnée au nœud hôte est motivée par le fait que, dépendant de la nature actuelle de la société formée par le réseau courant, tout hôte pouvant souhaiter ou craindre d’accepter de nouvelles connexions (c’est-à-dire de nouveaux contrats, de nouvelles dépendances sociales, émotionnelles ou économiques, etc.) car ces connexions peuvent induire des risques. La capacité de la société à prendre des risques au temps  $t$  est modélisée par le paramètre  $\alpha_t \in [0, 1]$  où  $\alpha_t$  proche de 1 indique une société dont les acteurs sont prêts à prendre des risques. L’hôte  $u$  accepte donc la connexion proposée par  $v_t$  avec probabilité  $\alpha_t$ , ou la délègue à un de ses voisins, avec probabilité  $1 - \alpha_t$ . Ce voisin  $w$  est choisi aléatoirement uniformément parmi les voisins de l’hôte  $u$ , et  $w$  accepte la connexion (dans cet article, nous ne considérons pas la version récursive du jeu où le voisin  $w$  serait à son tour susceptible de déléguer la demande de connexion). Notons que chaque nouveau nœud ne se connecte qu’à un seul nœud existant, et que l’insertion de liens entre nœuds existants, en sus de l’insertion de nœuds, n’est pas considérée. Ces extensions sont toutefois discutées en fin d’article.

L’*utilité* d’un nœud est définie comme son degré, mesurant son capital social. Notez que le choix de l’hôte à qui la connexion est initialement proposée lorsque le nœud  $v_t$  joint le réseau n’a que peu d’impact à court terme sur le capital social de celui-ci. En particulier, tout nouveau nœud a degré 1 après connexion, indépendamment de l’hôte choisi. Les nœuds ont donc une considération du jeu sur le long terme, en fonction de l’état du réseau au moment de le rejoindre (capturé par sa séquence de degrés) et des stratégies de connexion des nœuds à venir. Ainsi, le jeu RBP capture certaines caractéristiques cruciales de prises de décisions, lorsque l’on doit tenir compte à la fois du passé et du futur, et lorsque les poids respectifs des implications à court et long termes doivent être soupesées. En particulier, les nœuds ne savent pas lorsque le jeu s’arrêtera, et ceux-ci doivent donc agir en fonction de différents scénarios temporels.

En résumé, le jeu RBP est caractérisé par la séquence  $\bar{\alpha} = (\alpha_t)_{t \geq 1}$  modélisant le rapport des membres de la société à la prise de risque, et par le temps de fin  $\tau$  où les utilités des nœuds sont mesurées. Ni  $\bar{\alpha}$ , ni  $\tau$  ne sont connus des nœuds. Ces paramètres représentent l’incertitude sur le futur, et les mécanismes de prise de décision doivent pouvoir faire face à cette incertitude. La stratégie du  $t$ -ième nœud rejoignant le réseau est une distribution de probabilités  $\pi_t$  sur toutes les séquences de degrés  $(d_1, \dots, d_{t-1})$ ,  $d_1 \geq \dots \geq d_{t-1}$ . Un profil de stratégies  $\Pi$  est défini par l’ensemble de toutes les stratégies des nœuds, i.e.,  $\Pi = (\pi_t)_{t \geq 1}$ .

## 1.2 Nos résultats

Notre principal résultat stipule que l’attachement préférentiel est l’*unique* équilibre de Nash du jeu RBP( $\bar{\alpha}, \tau$ ) qui soit *universel*, i.e., qui soit équilibre de Nash pour *toute* séquence  $\bar{\alpha} = (\alpha_t)_{t \geq 1}$  et *tout* temps de fin  $\tau$ . L’unicité est la propriété frappante de ce résultat : l’incertitude à propos du futur a pour conséquence le fait que l’attachement préférentiel est la *seul* choix rationnel viable pour établir sa connexion lorsqu’un nœud rejoint le réseau. Tout autre stratégie  $\Pi = (\pi_t)_{t \geq 1}$  peut potentiellement être un équilibre de Nash pour certaines paires  $(\bar{\alpha}, \tau)$ , mais il existera systématiquement au moins une paire  $(\bar{\alpha}', \tau')$  pour laquelle  $\Pi$  ne sera pas un équilibre de Nash. Spécifiquement, pour le jeu RBP( $\bar{\alpha}', \tau'$ ), s’il existe un nœud  $v_t$  au temps  $t \leq \tau$  qui se connecte selon une stratégie  $\pi_t$  différente de l’attachement préférentiel, alors il existera un autre nœud  $v_{t'}$  au temps  $t' < t$  qui aura intérêt à dévier de  $\pi_{t'}$  pour gagner en degré au temps  $\tau$ .

## 1.3 Travaux précédents en lien avec cet article

Jackson [Jac06] distingue deux types de modèles pour la formation de réseaux : ceux basés sur les graphes aléatoires, et ceux basés sur la théorie des jeux. Il note que si les premiers sont appropriés pour répondre aux questions relatives au *comment* s’effectue la formation, les seconds fournissent des indications relatives au *pourquoi*. Le modèle d’attachement préférentiel (AP) est un processus stochastique utilisé pour générer des graphes dont la distribution des degrés suit une loi de puissance, dite également “sans échelle”. Ce modèle a été originellement proposé par Price [Pri76] pour l’étude des réseaux de citations, puis popularisé par Barabasi et Albert [AB02] qui proposèrent une explication de la structure de la toile en utilisant le modèle AP. Voir [New10] pour d’autres types de réseaux correspondant au modèle AP, incluant les réseaux de collaborations, les réseaux de paiements inter-bancaires, les réseaux aériens, etc. Ainsi le modèle AP est un modèle parfaitement adapté à l’étude de nombreux types de réseaux. Néanmoins, le modèle n’explique pas *pourquoi* les lois qu’il simule émergent dans ces réseaux.

D'souza et al. [DBC<sup>+</sup>07] ont proposé une explication de l'émergence de la distribution des degrés en loi de puissance sur la base de processus d'optimisation sous-jacents. Dans le cadre de la théorie des jeux, Fabrikant et al. [FLM<sup>+</sup>03] (voir aussi [MMO14]) montrent des équilibres en clique ou en étoile, mais ces deux graphes apparaissent rarement dans les réseaux sociaux. Le jeu PageRank (voir [AIP11, HS08, KMP<sup>+</sup>15]) possède des équilibres universels (i.e., indépendant de la probabilité de saut), mais il suppose un nombre fini de joueurs.

## 2 Description formelle du jeu de recommandation

Les jeux  $\text{RBP}(\bar{\alpha}, \tau)$  sont définis formellement comme suit. L'évolution du réseau s'effectue par étape. A l'étape 1, il y a un unique nœud noté  $v_1$ , et pas d'arête. Ce graphe est dénoté  $T^{(1)}$ . A chaque étape  $t > 1$ , un nouveau nœud  $v_t$  arrive, et se connecte à un nœud  $v_j$  existant dans  $T^{(t-1)}$  pour créer le graphe  $T^{(t)}$  de  $t$  nœuds et  $t - 1$  arêtes. Spécifiquement, lorsque  $v_t$  arrive, il contacte un nœud existant  $v_i$  pour connexion. Ce dernier, appelé hôte, accepte la connexion avec probabilité  $\alpha_t$ , ou la refuse avec probabilité  $1 - \alpha_t$ . Dans le premier cas,  $v_t$  se connecte à l'hôte  $v_i$ . Dans le second cas, l'hôte choisit un de ses voisins  $v_j$  uniformément aléatoirement, et  $v_t$  se connecte à  $v_j$ .

La stratégie  $\pi_t$  de  $v_t$  réside dans son choix de l'hôte  $v_i$ , pour toute instance du graphe  $T^{(t-1)}$ . Pour tout nœud  $v_i$  dans un graphe  $G$ , notons  $\deg_G(v_i)$  son degré. La séquence des degrés  $\text{DS}(G)$  d'un graphe  $G$  de  $n$  nœuds est la séquence croissante (non nécessairement strictement)  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  des degrés de ses nœuds. Soit  $\mathcal{D}^{(t)}$  l'ensemble de toutes les séquences de degrés d'arbres de  $t$  sommets. Pour tout  $t \geq 1$ , la stratégie  $\pi_t$  est une fonction  $\pi_t : \mathbb{N} \times \mathcal{D}^{(t-1)} \rightarrow [0, 1]$ . Ainsi, pour toute séquence  $D \in \mathcal{D}^{(t-1)}$ , et pour tout nœud  $v_i$  de degré  $k$  dans un arbre  $T^{(t-1)}$  de séquence de degrés  $D$ , la probabilité que le nœud  $v_i$  soit contacté comme hôte au temps  $t$  est  $\pi_t(k, D)$ . Notez que si la probabilité pour un nœud de devenir hôte au temps  $t$  est entièrement déterminé par la stratégie  $\pi_t$ , il n'en est pas de même de la probabilité de devenir voisin du nouveau nœud au temps  $t$ . Cette dernière dépend en effet également de l'ensemble des arêtes de  $T^{(t-1)}$ , et du paramètre  $\alpha_t$ . Un *profil de stratégie*  $\Pi$  est l'ensemble de toutes les stratégies des nœuds, i.e.,  $\Pi = (\pi_t)_{t \geq 1}$ .

Soit  $\bar{\alpha} = (\alpha_t)_{t \geq 1}$  avec  $\alpha_t \in [0, 1]$  pour tout  $t \geq 1$ , et soit  $\tau > 1$ . On note  $\text{RBP}(\bar{\alpha}, \tau)$  le jeu ci-dessus joué avec paramètre  $\alpha_t$  aux étapes  $t \in \{1, \dots, \tau\}$ , et qui termine juste après l'étape  $\tau$ . Étant donné un jeu  $\text{RBP}(\bar{\alpha}, \tau)$ , soit  $T^{(t)}(\Pi)$  l'arbre aléatoire obtenu à l'étape  $t$  lorsque le profil de stratégies  $\Pi$  est utilisé. Notez que  $T^{(t)}(\Pi)$  est en fait un arbre étiqueté, où chaque nœud est étiqueté par son étape d'arrivée. Pour tout tel arbre étiqueté  $T$  de  $t$  nœuds, soit  $\varphi(T) = \Pr[T^{(t)}(\Pi) = T]$ . Dans le jeu RBP, l'utilité d'un nœud  $v_i$  au temps  $t$  est définie comme  $\mathbf{u}_i^{(t)}(\Pi) = \mathbb{E}[\deg_{T^{(t)}(\Pi)}(v_i)] = \sum_{T \in \mathcal{T}^{(t)}} \deg_T(v_i) \cdot \varphi(T)$ , où  $\mathcal{T}^{(t)}$  est l'ensemble de tous les arbres étiquetés de  $t$  nœuds. Un profil de stratégies  $\Pi$  est un équilibre de Nash pour un jeu  $\text{RBP}(\bar{\alpha}, \tau)$  si aucun nœud  $v_t$  peut accroître son utilité en modifiant unilatéralement sa propre stratégie  $\pi_t$ .  $\Pi$  est équilibre de Nash *universel* s'il est un équilibre de Nash pour  $\text{RBP}(\bar{\alpha}, t)$  pour tout  $t \geq 1$  et toute séquence  $\bar{\alpha}$ .

## 3 Propriétés des équilibres du jeu de recommandation

Notons AP la stratégie *d'attachement préférentiel*, c'est-à-dire la stratégie telle que, étant donnée une séquence de degrés  $D = (d_1, \dots, d_n)$ , un nœud de degré  $k \in D$  est contacté comme hôte avec probabilité  $\text{AP}(k, D) = k / \sum_{j=1}^n d_j$ . Notez que, dans le jeu RBP, le graphe  $T^{(t)}$  après l'étape  $t$  est un arbre de  $t$  nœuds, et donc, indépendamment de l'histoire du jeu, on a, pour tout  $t > 1$ ,  $\text{AP}(k, D) = \text{AP}(k) = \frac{k}{2(t-1)}$ . Le *profil d'attachement préférentiel*, noté  $\Pi_{\text{AP}}$ , est le profil de stratégies où le nœud  $v_t$  joue de façon quelconque pour tout  $t \leq 4$ , et le nœud  $v_t$  joue selon AP pour tout  $t \geq 5$ . (Notez en particulier que le 4ème joueur est libre de sa stratégie dans  $\Pi_{\text{AP}}$ ). Le résultat ci-dessous indique qu'il est naturel, pour un nœud rationnel, de jouer AP.

**Théorème 1** *Le profil d'attachement préférentiel  $\Pi_{\text{AP}}$  est équilibre de Nash universel du jeu RBP.*

Le principal résultat de cet article stipule que des joueurs rationnels n'ont pas d'alternative à jouer AP.

**Théorème 2** *Pour tout profil de stratégies  $\Pi \neq \Pi_{\text{AP}}$ ,  $\Pi$  n'est pas équilibre de Nash universel du jeu RBP.*

La variante *uniforme* du jeu RBP est définie par les séquences  $\bar{\alpha} = (\alpha_t)_{t \geq 1}$  où  $\alpha_t = \alpha_1$  pour tout  $t \geq 1$ . Ainsi, le jeu RBP uniforme ne suppose pas de variation dans le temps de la capacité de la société à prendre

des risques. Trouver un équilibre universel est donc plus simple dans le cas uniforme que dans le cas général. Le résultat ci-dessous démontre que sauf pour quelques scénarios pathologiques, l'attachement préférentiel est la seule stratégie qu'un joueur rationnel puisse jouer dans le jeu RBP uniforme.

**Théorème 3** *Soit  $\Pi$  un profil de stratégies équilibre de Nash universel pour le jeu RBP uniforme. Alors, sur tout graphe différent d'une étoile, tout nœud joue AP. Sur les étoiles, si le nœud  $v_t$  arrivant au temps  $t$  joue AP sur l'étoile  $S_{t-1}$ , alors tout nœud  $v_{t'}$ ,  $t' > t$ , joue AP sur tous les graphes (y compris sur les étoiles).*

Enfin, on peut montrer que si  $\Pi$  un équilibre de Nash universel pour la variante du jeu RBP où  $\alpha_t = 1$  pour tout  $t \geq 1$ , si  $\pi_{t'}$  est degré-consistante pour tout  $t' \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ , et si  $\pi_{t'}(k) > 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, t-1\}$ , alors  $\pi_t$  est une stratégie degré-consistante. (Une stratégie  $\pi_t$  est dite *dégré-consistante* si la probabilité de sélectionner tout nœud à l'étape  $t$  ne dépend que de son degré).

## 4 Conclusion

Il est possible de généraliser le jeu RBP au cas où le mécanisme de recommandation procède récursivement, c'est-à-dire lorsque le voisin recommandé par l'hôte peut à son tour recommander un autre voisin avec une probabilité positive, et ainsi de suite. En fait, les mêmes arguments que ceux développés dans les preuves des théorèmes listés plus haut permettent de démontrer que l'attachement préférentiel reste un équilibre de Nash universel dans ce cas également. Une extension plus complexe de ce travail consiste à supposer que chaque nouveau nœud se connecte à  $m > 1$  nœuds existants. Les réseaux résultant de ce modèle ne sont alors plus uniquement des arbres, et l'extension de nos résultats dans ce cadre apparaît non triviale. Enfin, des extensions incluant l'insertion de liens entre nœuds existants, en sus de l'insertion de nœuds, seraient probablement plus réalistes, tout comme celles où l'on suppose que les nœuds disposent de plus d'informations à propos du réseau actuel qu'uniquement sa séquence de degrés. Tous ces axes de recherche sont autant de défis scientifiques nécessitant des travaux plus poussés.

## Références

- [AB02] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, 74(1):47, 2002.
- [ACF<sup>+</sup>18] Chen Avin, Avi Cohen, Pierre Fraigniaud, Zvi Lotker, and David Peleg. Preferential attachment as a unique equilibrium. In *Proceedings of The Web Conference (WWW)*. ACM, 2018.
- [AIP11] D. Avis, K. Iwama, and D. Paku. Verifying nash equilibria in pagerank games on undirected web graphs. In *Int. Symp. on Algorithms and Computation (ISAAC)*, pages 415–424, 2011.
- [Bar16] Albert-László Barabási. *Network science*. Cambridge university press, 2016.
- [DBC<sup>+</sup>07] R. D'souza, C. Borgs, J. Chayes, N. Berger, and R. Kleinberg. Emergence of tempered preferential attachment from optimization. *National Acad. of Sciences*, 104(15):6112–6117, 2007.
- [FLM<sup>+</sup>03] A. Fabrikant, A. Luthra, E. Maneva, C. Papadimitriou, and S. Shenker. On a network creation game. In *22nd symp. on Principles of Dist. Comp. (PODC)*, pages 347–351. ACM, 2003.
- [HS08] John Hopcroft and Daniel Sheldon. Network reputation games. Technical report, Cornell's digital repository, 2008.
- [Jac06] Matthew O Jackson. The economics of social networks. In *Proceedings of the 9th World Congress of the Econometric Society, vol. 1*, pages 1–56. Cambridge University Press, 2006.
- [KMP<sup>+</sup>15] G. Kouroupas, E. Markakis, C. Papadimitriou, V. Rigas, and M. Sideri. The web graph as an equilibrium. In *Int. Symp. on Algorithmic Game Theory*, pages 203–215, 2015.
- [MMO14] E. Meirum, S. Mannor, and A. Orda. Network formation games with heterogeneous players and the internet structure. In *15th Conf. on Economics and comput.*, pages 735–752, 2014.
- [New10] Mark Newman. *Networks : an introduction*. Oxford university press, 2010.
- [Pri76] D. Price. A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes. *Journal of the Association for Information Science and Technology*, 27(5):292–306, 1976.