



**HAL**  
open science

# Analyse asymptotique de milieux élastiques stratifiés dans les espaces de fonctions à déformation bornée

Michel Bellieud, Shane Cooper

► **To cite this version:**

Michel Bellieud, Shane Cooper. Analyse asymptotique de milieux élastiques stratifiés dans les espaces de fonctions à déformation bornée. *Comptes Rendus. Mathématique*, 2016, 354 (4), pp.437 - 442. 10.1016/j.crma.2016.01.004 . hal-01774932

**HAL Id: hal-01774932**

**<https://hal.science/hal-01774932v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse asymptotique de milieux élastiques stratifiés dans les espaces de fonctions à déformation bornée

Michel Bellieud<sup>a</sup>, Shane Cooper<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Université Montpellier II, Case courrier 048, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5.

<sup>b</sup> Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath, BA2 7AY, UK

Reçu le \*\*\*\*\*; accepté après révision le +++++

Présenté par

---

## Résumé

Nous analysons le comportement asymptotique des solutions de problèmes du type

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : \begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon)) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega = (0, L) \times \Omega', \\ \sigma_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon(x_1) \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_\varepsilon))I + 2\mu_\varepsilon(x_1)\mathbf{e}(\mathbf{u}_\varepsilon), & \mathbf{e}(\mathbf{u}_\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}_\varepsilon + \nabla^T\mathbf{u}_\varepsilon), \\ \mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), & \mathbf{f} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (1)$$

lorsque les coefficients de Lamé dépendent uniquement de la variable  $x_1$ , sont bornés dans  $L^1(\Omega)$  et  $\frac{1}{\mu_\varepsilon}$  est borné dans  $L^1(\Omega)$ . Nous déterminons le problème limite sous les hypothèses

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{*} m, \quad \frac{1}{\mu_\varepsilon} \xrightarrow{*} \nu \quad \text{faiblement* dans } \mathcal{M}([0, L]), \quad \lambda_\varepsilon = l\mu_\varepsilon \quad (l \geq 0), \quad (2)$$
$$m(\{t\})\nu(\{t\}) = 0 \quad \forall t \in [0, L], \quad m(\{0\}) = m(\{L\}) = \nu(\{0\}) = \nu(\{L\}) = 0.$$

Notre travail s'applique aussi à l'équation de la chaleur, étendant au cas anisotrope les résultats obtenus par G. Bouchitté et C. Picard [2].

*Pour citer cet article :*

## Abstract

### Asymptotic analysis of stratified elastic media in the space of functions with bounded deformation.

We analyse the asymptotic behaviour of solutions to problems of the type (1) in the case where the Lamé coefficients only depend on the variable  $x_1$ , are bounded in  $L^1(0, L)$  and  $\frac{1}{\mu_\varepsilon}$  is bounded in  $L^1(0, L)$ . We determine the limit problem under the assumptions (2). Our method applies as well to the heat equation, extending to the general anisotropic setting the results of G. Bouchitté and C. Picard [2].

*To cite this article:*

---

*Email addresses:* michel.bellieud@univ-montp2.fr (Michel Bellieud), s.a.l.cooper@bath.ac.uk (Shane Cooper).

## Abridged English version

Let  $\Omega := (0, L) \times \Omega'$  be a bounded cylindrical domain of  $\mathbb{R}^3$ . We are interested in the asymptotic analysis of the behaviour of the solution  $\mathbf{u}_\varepsilon$  to the elasticity problem (1) when the Lamé coefficients  $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$  only depend on one variable ( $x_1$ ), are bounded in  $L^1(0, L)$ , and satisfy the weak\* convergences in the sense of measures stated in (2). We prove that the limit problem is

$$(\mathcal{P}^{eff}) := \min_{\mathbf{u} \in BD_0^{\nu, m}(\Omega)} \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (3)$$

The Hilbert space  $BD_0^{\nu, m}(\Omega)$  is defined by

$$BD_0^{\nu, m}(\Omega) = \left\{ \varphi \in BD(\Omega) \left| \begin{array}{l} \mathbf{E}\varphi \ll \nu \otimes \mathcal{L}^2, \mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\varphi \in L_{\nu \otimes \mathcal{L}^2}^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \\ \varphi_\alpha^* \in L_m^2(0, L; H_0^1(\Omega'; \mathbb{R}^3)) \quad \alpha \in \{2, 3\} \\ \varphi = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{array} \right. \right\},$$

$$\|\mathbf{v}\|_{BD_0^{\nu, m}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |\mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\mathbf{v}|^2 d\nu \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} |\mathbf{e}_{x'}(\mathbf{v}^*)|^2 dm \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

where  $\mathbf{e}_{x'}(\mathbf{v}) := \sum_{\alpha, \beta=2}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ ,  $BD(\Omega)$  is the space of functions with bounded deformation (set of the elements  $\varphi$  of  $L^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  whose symmetrized gradient in the sense of distributions  $\mathbf{E}\varphi$  is a vector measure, see [4]),  $\varphi^*$  is the precise representative of  $\varphi$  (equal at  $x$  to the limit of the averaged value of  $\varphi$  on balls centered at  $x$  whose radius tends to 0 if this limit exists, to 0 otherwise, see [3, p. 46]) and  $\mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\varphi$  denotes the Radon-Nikodym derivative of the vector measure  $\mathbf{E}\varphi$  with respect to  $\nu \otimes \mathcal{L}^2$ . Setting  $\Xi(\mathbf{v}) = \mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\mathbf{v}$ , the mapping  $a(\cdot, \cdot)$  is the continuous coercive symmetric bilinear form on  $BD_0^{\nu, m}(\Omega)$  given by

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{1}{l+2} \left| \text{tr}(\Xi(\mathbf{v})) + 2\Xi_{11}(\mathbf{v}) \right|^2 d\nu \otimes \mathcal{L}^2 + 4 \sum_{\alpha=2}^3 \int_{\Omega} |\Xi_{1\alpha}(\mathbf{v})|^2 d\nu \otimes \mathcal{L}^2$$

$$+ 4 \int_{\Omega} |e_{23}(\mathbf{v}^*)|^2 + \frac{4(l+1)}{l+2} \left( |e_{22}(\mathbf{v}^*)|^2 + |e_{33}(\mathbf{v}^*)|^2 + \frac{1}{l+1} e_{22}(\mathbf{v}^*) e_{33}(\mathbf{v}^*) \right) dm \otimes \mathcal{L}^2.$$

**Theorem 0.1** *Under the assumption (2), the solution  $\mathbf{u}_\varepsilon$  to (1) weakly\* converges in  $BD(\Omega)$  to the unique solution  $\mathbf{u}$  of (3).*

**Case of the anisotropic heat equation.** Our method applies to the study of anisotropic linear scalar diffusion problems of the type (5), where  $\mathbf{A}$  is a symmetric positive definite  $3 \times 3$  matrix satisfying  $A_{11} \neq 0$ . The limit problem takes the form (6) where  $BV_0^{\nu, m}(\Omega)$  is the Hilbert space defined by (7), with  $\nabla_{x'} v := \left( 0, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^T$  and  $BV(\Omega)$  denoting the space of functions with bounded variation on  $\Omega$ . Setting  $\xi(\varphi) := \mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{D}\varphi$ , the map  $a(\cdot, \cdot)$  is the coercive continuous bilinear form on  $BV_0^{\nu, m}(\Omega)$  given by (8).

**Theorem 0.2** *Under the assumption (2), the sequence of solutions to (5) weakly\* converges in  $BV(\Omega)$  to the unique solution of the problem (6).*

## 1. Introduction et énoncé du résultat

Soit  $\Omega := (0, L) \times \Omega'$  un domaine borné cylindrique de  $\mathbb{R}^3$ . Nous nous intéressons à l'analyse asymptotique du problème d'élasticité (1) lorsque les coefficients de Lamé  $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon$  dépendent d'une seule variable ( $x_1$ ), sont bornés dans  $L^1(0, L)$ , et satisfont les convergences étoile-faibles au sens des mesures (2). Nous montrons que le problème effectif s'écrit

$$(\mathcal{P}^{eff}) := \min_{\mathbf{u} \in BD_0^{\nu, m}(\Omega)} \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (4)$$

L'espace de Hilbert  $BD_0^{\nu, m}(\Omega)$  est défini par

$$BD_0^{\nu, m}(\Omega) = \left\{ \varphi \in BD(\Omega) \left| \begin{array}{l} \mathbf{E}\varphi \ll \nu \otimes \mathcal{L}^2, \mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\varphi \in L_{\nu \otimes \mathcal{L}^2}^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \\ \varphi_\alpha^* \in L_m^2(0, L; H_0^1(\Omega'; \mathbb{R}^3)) \quad \alpha \in \{2, 3\} \\ \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{array} \right. \right\},$$

$$\|\mathbf{v}\|_{BD_0^{\nu, m}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |\mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\mathbf{v}|^2 d\nu \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} |\mathbf{e}_{x'}(\mathbf{v}^*)|^2 dm \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $BD(\Omega)$  est l'espace des fonctions à déformation bornée (éléments  $\varphi$  de  $L^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  dont le gradient symétrisé au sens des distributions  $\mathbf{E}\varphi$  est une mesure vectorielle, voir [4]),  $\varphi^*$  est le représentant précis de  $\varphi$  (égal en  $x$  à la limite de moyennes de  $\varphi$  sur des boules centrées en  $x$  dont le rayon tend vers 0 si cette limite existe, à 0 sinon, voir [3, p. 46]),  $\mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\varphi$  désigne la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure vectorielle  $\mathbf{E}\varphi$  par rapport à  $\nu \otimes \mathcal{L}^2$  et  $\mathbf{e}_{x'}(\mathbf{v}) := \sum_{\alpha, \beta=2}^3 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ . Posant  $\Xi(\mathbf{v}) = \mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{E}\mathbf{v}$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur  $BD_0^{\nu, m}(\Omega)$  donnée par

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{1}{l+2} \left| \text{tr}(\Xi(\mathbf{v})) + 2\Xi_{11}(\mathbf{v}) \right|^2 d\nu \otimes \mathcal{L}^2 + 4 \sum_{\alpha=2}^3 \int_{\Omega} |\Xi_{1\alpha}(\mathbf{v})|^2 d\nu \otimes \mathcal{L}^2$$

$$+ 4 \int_{\Omega} |e_{23}(\mathbf{v}^*)|^2 + \frac{4(l+1)}{l+2} \left( |e_{22}(\mathbf{v}^*)|^2 + |e_{33}(\mathbf{v}^*)|^2 + \frac{l}{l+1} e_{22}(\mathbf{v}^*) e_{33}(\mathbf{v}^*) \right) dm \otimes \mathcal{L}^2.$$

**Theorem 1.1** *Sous l'hypothèse (2), la suite  $(\mathbf{u}_\varepsilon)$  des solutions de (1) converge étoile-faiblement dans  $BD(\Omega)$  vers l'unique solution  $\mathbf{u}$  du problème (4).*

**Cas de l'équation de la chaleur anisotrope.** Nos résultats s'étendent à l'étude de problèmes du type

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) : -\text{div}(\mu_\varepsilon \mathbf{A} \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad f \in L^\infty(\Omega), \quad (5)$$

lorsque  $\mathbf{A}$  est une matrice symétrique définie positive vérifiant  $A_{11} \neq 0$ . Le problème limite s'écrit

$$(\mathcal{P}^{eff}) := \min_{u \in BV_0^{\nu, m}(\Omega)} \frac{1}{2} a(u, u) - \int_{\Omega} f u. \quad (6)$$

Notant  $BV(\Omega)$  l'espace des fonctions à variation bornée sur  $\Omega$ ,  $BV_0^{\nu, m}(\Omega)$  est l'espace de Hilbert défini par

$$BV_0^{\nu,m}(\Omega) := \left\{ \varphi \in BV(\Omega) \left| \begin{array}{l} \mathbf{D}\varphi \ll \nu \otimes \mathcal{L}^2, \mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{D}\varphi \in L_{\nu \otimes \mathcal{L}^2}^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \\ \varphi^* \in L_m^2(0, L; H_0^1(\Omega')) \\ \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{array} \right. \right\}, \quad (7)$$

$$\|v\|_{BV_0^{\nu,m}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |\mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{D}v|^2 d\nu \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} |\nabla_{x'}(v^*)|^2 dm \otimes \mathcal{L}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $\nabla_{x'} v := \left(0, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^T$ . Posant  $\xi(\varphi) := \mathbf{D}_{\nu \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{D}\varphi$ , l'application  $a(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire continue et coercive sur  $BV_0^{\nu,m}(\Omega)$  donnée par

$$a(v, w) := \int_{\Omega} A_{11}^{-1}(\mathbf{A}\xi(v))_1 (\mathbf{A}\xi(w))_1 d\nu \otimes \mathcal{L}^2 - \int_{\Omega} A_{11}^{-1}(\mathbf{A}\nabla_{x'} v^*)_1 (\mathbf{A}\nabla_{x'} w^*)_1 + \mathbf{A}\nabla_{x'} v^* \cdot \nabla_{x'} w^* dm \otimes \mathcal{L}^2. \quad (8)$$

**Theorem 1.2** *Sous l'hypothèse (2), la suite  $(u_\varepsilon)$  des solutions de (5) converge étoile-faiblement dans  $BV(\Omega)$  vers l'unique solution  $u$  du problème (6).*

## 2. Résumé de la preuve

La démonstration repose sur la construction d'une suite  $(\varphi_\varepsilon)$  de champs test. Elle déduite d'une famille de suite  $((\varphi_\varepsilon^k)_\varepsilon)_{k \in \mathbb{N}}$  définies à partir de sous-ensembles finis  $A_k$  de  $[0, L]$  satisfaisant

$$\begin{cases} A_k = \{t_0^k, t_1^k, \dots, t_{n_k}^k\}, & A_k \subset A_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ 0 = t_0^k < t_1^k < t_2^k < \dots < t_{n_k-1}^k < t_{n_k}^k = L, \\ \nu(\{t_j^k\}) = m(\{t_j^k\}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \{0, \dots, n_k\}, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{j \in \{1, \dots, n_k\}} |t_j^k - t_{j-1}^k| = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Posant  $I_j^k := (t_{j-1}^k, t_j^k]$ , notant  $j_{x_1}$  l'entier tel que  $x_1 \in I_{j_{x_1}}^k$ , on définit  $\phi_\varepsilon^k(x_1) := \frac{\nu_\varepsilon((t_{j_{x_1}-1}^k, x_1))}{\nu_\varepsilon(I_{j_{x_1}}^k)}$ . On fixe  $\mathbf{v} \in BD_0^{\nu,m}(\Omega)$  arbitraire (prolongé à  $\mathbb{R}^3$  par 0),  $\delta > 0$  et on introduit sa régularisée partielle  $\varphi(x) = \mathbf{v}^\delta(x) := \mathbf{v}(x_1, \cdot) \star \rho_\delta$  où  $(\rho_\delta)$  est une suite régularisante dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Le champ test est l'élément de  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  donné en fonction de  $\varphi$  par

$$\begin{aligned} \varphi_{\varepsilon 1}^k(x) &:= \frac{1}{l+2} \left( \int_{I_{j_{x_1}}^k} \text{tr}(\Xi(\varphi))(s_1, x') + 2\Xi_{11}(\varphi)(s_1, x') d\nu(s_1) \right) \phi_\varepsilon^k(x_1) \\ &\quad - \frac{l}{l+2} \sum_{\alpha=2}^3 \int_{t_{j_{x_1}-1}^k}^{x_1} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha}(s_1, x') ds_1 + \varphi_1^+(t_{j_{x_1}-1}^k, x'), \\ \varphi_{\varepsilon \alpha}^k(x) &:= \left( \int_{I_{j_{x_1}}^k} 2\Xi_{1\alpha}(\varphi)(s_1, x') d\nu(s_1) \right) \phi_\varepsilon^k(x_1) \\ &\quad - \int_{t_{j_{x_1}-1}^k}^{x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\alpha}(s_1, x') ds_1 + \varphi_\alpha^+(t_{j_{x_1}-1}^k, x'), \quad \forall \alpha \in \{2, 3\}, \end{aligned} \quad (10)$$

où  $\varphi^+(x_1, x')$  désigne la trace de  $\varphi$  à droite de  $\{x_1\} \times \Omega'$ . Etant donnée une suite de mesures  $(\theta_\varepsilon)$  convergeant \*faiblement vers  $\theta$  on dit qu'une suite de fonction  $f_\varepsilon$  converge faiblement vers  $f$  suivant le

couple  $(\theta_\varepsilon, \theta)$  (notation  $f_\varepsilon \xrightarrow{\theta_\varepsilon} f$ ) si  $f \in L^2_\theta$ ,  $\sup_\varepsilon \int |f_\varepsilon|^2 d\theta_\varepsilon < +\infty$ , et  $f_\varepsilon \theta_\varepsilon$  converge \*faiblement vers  $f\theta$ . Elle converge fortement (notation  $f_\varepsilon \xrightarrow{\theta_\varepsilon} f$ ) si de plus  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |f_\varepsilon|^2 d\theta_\varepsilon = \int |f|^2 d\theta$ . Si  $f_\varepsilon$  (resp.  $g_\varepsilon$ ) converge faiblement (resp. fortement) vers  $f$  (resp.  $g$ ) suivant  $(\theta_\varepsilon, \theta)$ , alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon g_\varepsilon d\theta_\varepsilon = \int f g d\theta$  (voir [1,6]). Par un argument de diagonalisation, on montre l'existence d'une suite  $\varphi_\varepsilon (= \varphi_\varepsilon^{k_\varepsilon})$  vérifiant

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\varphi_\varepsilon - \varphi| dx = 0, \quad \sigma_{\varepsilon 11}(\varphi_\varepsilon) \xrightarrow{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} (\text{ltr}(\Xi(\varphi)) + 2\Xi_{11}(\varphi)), \\ \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\varphi_\varepsilon) \xrightarrow{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} 2\Xi_{1\alpha}(\varphi) \quad \forall \alpha \in \{2, 3\}, \quad \mathbf{e}_{x'}(\varphi_\varepsilon) \xrightarrow{m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, m \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{e}_{x'}(\varphi^*). \end{aligned} \quad (11)$$

A partir d'estimations a priori, on prouve l'existence de  $\mathbf{u} \in BD_0^{\nu, m}(\Omega)$  tel que, à une suite extraite près,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}| dx = 0, \quad \sigma_{\varepsilon 11}(\mathbf{u}_\varepsilon) \xrightarrow{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} \text{ltr}(\Xi(\mathbf{u})) + 2\Xi_{11}(\mathbf{u}), \\ \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\mathbf{u}_\varepsilon) \xrightarrow{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} 2\Xi_{1\alpha}(\mathbf{u}) \quad \forall \alpha \in \{2, 3\}, \quad \mathbf{e}_{x'}(\mathbf{u}_\varepsilon) \xrightarrow{m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, m \otimes \mathcal{L}^2} \mathbf{e}_{x'}(\mathbf{u}^*). \end{aligned} \quad (12)$$

On multiplie (1) par  $\varphi_\varepsilon$  et on intègre par parties. Après un réarrangement des termes, il vient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\varepsilon dx = \int_\Omega \left( \frac{1}{l+2} \sigma_{\varepsilon 11}(\mathbf{u}_\varepsilon) \sigma_{\varepsilon 11}(\varphi_\varepsilon) + \sum_{\alpha=2}^3 \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\mathbf{u}_\varepsilon) \sigma_{\varepsilon 1\alpha}(\varphi_\varepsilon) \right) d\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2 \\ + \int_\Omega \frac{4(l+1)}{l+2} \sum_{\alpha=2}^3 e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{\alpha\alpha}(\varphi_\varepsilon) + 4e_{23}(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{23}(\varphi_\varepsilon) + \frac{2l}{l+1} \left( e_{22}(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{33}(\varphi_\varepsilon) + e_{33}(\mathbf{u}_\varepsilon) e_{22}(\varphi_\varepsilon) \right) dm_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

En passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , compte tenu de (11) et (12), on obtient  $a(\mathbf{u}, \varphi) = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \varphi dx$ . Comme  $\varphi = \mathbf{v}^\delta$  converge fortement vers  $\mathbf{v}$  dans  $BD^{\nu, m}(\Omega)$  (espace déduit de  $BD_0^{\nu, m}(\Omega)$  en supprimant les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$ ) quand  $\delta \rightarrow 0$ , on déduit que  $\mathbf{u}$  satisfait le problème variationnel

$$(\mathcal{P}^{eff}) : \begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & \forall \mathbf{v} \in BD_0^{\nu, m}(\Omega), \\ \mathbf{u} \in BD_0^{\nu, m}(\Omega), \end{cases}$$

équivalent à (4).

**Cas de l'équation de la chaleur.** On reprend le raisonnement précédent en remplaçant (10) par

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon^k(x) := A_{11}^{-1} \left( \int_{I_{j_{x_1}}^k} (\mathbf{A}\xi(\varphi))_1(s_1, x') d\nu(s_1) \right) \phi_\varepsilon^k(x_1) \\ - A_{11}^{-1} \int_{t_{j_{x_1}-1}^{x_1}} (\mathbf{A}\nabla_{x'}\varphi)_1(s_1, x') ds_1 + \varphi^+(t_{j_{x_1}-1}^k, x'). \end{aligned}$$

On montre l'existence d'une suite  $\varphi_\varepsilon (= \varphi_\varepsilon^{k_\varepsilon})$  vérifiant

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\varphi_\varepsilon - \varphi| dx = 0, \quad \mu_\varepsilon(\mathbf{A}\nabla\varphi)_1 \xrightarrow{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} (\mathbf{A}\xi(\varphi))_1, \quad \nabla_{x'}\varphi_\varepsilon \xrightarrow{m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, m \otimes \mathcal{L}^2} \nabla_{x'}\varphi^*.$$

On prouve que la solution  $u_\varepsilon$  de (1) vérifie, à une suite extraite près,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |u_\varepsilon - u| dx = 0, \quad \mu_\varepsilon(\mathbf{A}\nabla u_\varepsilon)_1 \xrightarrow{\nu_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, \nu \otimes \mathcal{L}^2} (\mathbf{A}\xi(u))_1, \quad \nabla_{x'}u_\varepsilon \xrightarrow{m_\varepsilon \otimes \mathcal{L}^2, m \otimes \mathcal{L}^2} \nabla_{x'}u^*.$$

Le réarrangement (13) devient

$$\int_{\Omega} f \varphi_{\varepsilon} dx = A_{11}^{-1} \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon} (\mathbf{A} \nabla u_{\varepsilon})_1 \mu_{\varepsilon} (\mathbf{A} \nabla \varphi_{\varepsilon})_1 d\nu_{\varepsilon} \otimes \mathcal{L}^2 \\ + \int_{\Omega} -A_{11}^{-1} (\mathbf{A} \nabla_{x'} u_{\varepsilon})_1 (\mathbf{A} \nabla_{x'} \varphi_{\varepsilon})_1 + \mathbf{A} \nabla_{x'} u_{\varepsilon} \cdot \nabla_{x'} \varphi_{\varepsilon} dm_{\varepsilon} \otimes \mathcal{L}^2.$$

La suite de la démonstration est identique.

**Remerciements.** Les travaux de S.C. et M.B. ont été financés par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) (Projet "Blanc", ANR-13-BS03-0009-03). Ceux de S.C. ont été aussi supportés par l'"Engineering and Physical Sciences Research Council" (grant EP/M017281/1).

## Références

- [1] G. BOUCHITTÉ, *Représentation intégrale de fonctionnelles convexes sur un espace de mesures*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) 33 (1987) pp. 113–156.
- [2] G. BOUCHITTÉ, C. PICARD, *Singular perturbations and homogenization in stratified media*, Applicable Analysis, Vol. 61 (1996), pp. 307-341.
- [3] L. C. EVANS, R. F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, (1992).
- [4] R. TEMAM, *Problèmes mathématiques en plasticité*, Gauthier-Villars, Paris (1983).
- [5] L. TARTAR, *Cours Peccot, Collège de France*, (1977), unpublished, partially written in F. MURAT, L. TARTAR, "H-convergence", in *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, ed. by L. CHERKAEV, R. V. KOHN, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 31, Birkhäuser, Boston (1998), pp. 21–43.
- [6] V. V. ZHIKOV, *On weighted Sobolev spaces*, (Russian) Mat. Sb. 189 (1998), no. 8, pp. 27–58; translation in Sb. Math. 189 (1998), no. 7-8, pp. 1139–1170